Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 408, 2012 г.

М. Гордин, М. Денкер

ПУАССОНОВСКИЙ ПРЕДЕЛ ДЛЯ АВТОМОРФИЗМОВ ДВУМЕРНЫХ ТОРОВ, ЗАДАВАЕМЫХ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ

§1. Введение и основной результат

Пусть R – коммутативное кольцо с единицей и пусть $\mathrm{Mat}(2, R)$ – совокупность всех 2×2 матриц с элементами из R. Обозначим через $\mathrm{Mat}^{\pm 1}(2, R)$ множество тех $A \in \mathrm{Mat}(2, R)$, у которых $\det A = \pm 1$. Каждая матрица $A \in \mathrm{Mat}^{\pm 1}(2, \mathbb{R})$ определяет линейное обратимое отображение $\tilde{T}_A$ пространства $\mathbb{R}^2$ на себя, сохраняющее меру Лебега. Если к тому же $A \in \mathrm{Mat}^{\pm 1}(2, \mathbb{Z})$, то тогда $\tilde{T}_A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ и A определяет алгебраический автоморфизм T_A тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Заметим, что T_A сохраняет нормированную меру Хаара $\mathbf{P}$ на $\mathbb{T}^2$.

Предположим, что $A \in \mathrm{Mat}^{\pm 1}(2, \mathbb{Z})$ – *гиперболическая матрица* (то есть матрица, модули всех собственных чисел которой отличны от 1). Тогда T_A представляет собой фундаментальный пример диффеоморфизма Аносова [1], к которому приложимы результаты далеко продвинутых для таких диффеоморфизмов и их обобщений динамической и вероятностной теорий. В частности, мера $\mathbf{P}$ оказывается представителем обширного множества гиббсовских T_A-инвариантных мер и для широких классов функций f на $\mathbb{T}^2$ к стационарным последовательностям вида $(f \circ T_A^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, определённым на $\mathbb{T}^2$, оказываются применимыми предельные теоремы, обобщающие хорошо известную теорию предельных распределений сумм независимых случайных величин.

Рассмотрим теперь такую гиперболическую матрицу $A \in \mathrm{Mat}^{\pm 1}(2, \mathbb{R})$, что $A \notin \mathrm{Mat}^{\pm 1}(2, \mathbb{Z})$. Так как A по всей видимости не порождает никакого преобразования T_A тора $\mathbb{T}^2$, мы не можем

Ключевые слова: автоморфизмы торов, пуассоновский предел, метод Чена–Стейна, гомоклинические структуры, граничное поведение.

Часть настоящей работы была выполнена во время визита первого автора в Университет штата Пенсильвания (США). Первый автор частично поддерживался грантами НШ-1216.2012.1 и РФФИ 10-01-00242-а, грантом Шапиро Университета штата Пенсильвания и грантом NSF DMS-10008538. Второй автор поддерживался грантом NSF DMS-10008538.

даже корректно определить последовательность $(f \circ T_A^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ для функции f на торе, не говоря уже об её исследовании. По этой причине неясно, о какой предельной теории может идти речь в этом контексте. Заметим, что в $\mathrm{Mat}^{\pm 1}(2,\mathbb{R})$ имеется континуум таких матриц как A, в то время как множество $\mathrm{Mat}^{\pm 1}(2,\mathbb{Z})$ всего лишь счётно. Цель настоящей работы – показать, что по крайней мере какая-то часть предельной теории оказывается вполне осмысленной для некоторых классов последовательностей таких матриц, хотя этим последовательностям могут не соответствовать никакие действия, понимаемые как гомоморфизмы группы $\mathbb{Z}$ в группу автоморфизмов тора $\mathbb{T}^2$. Фактически же в настоящей работе мы имеем дело с последовательностями элементов группы $\mathrm{Mat}^{\pm 1}(2,\mathbb{Z})$, не образующими, вообще говоря, последовательности степеней одной целочисленной матрицы. Тот факт, что рассматриваемая последовательность целочисленных матриц аппроксимирует некоторую однопараметрическую группу, в работе не используется, но обсуждается в последней её части. Предельная теорема, доказываемая нами в описанной ситуации, относится к тому же типу теорем о сходимости к распределению Пуассона, что и теорема, доказанная Б. Пицкелем [2] для степеней гиперболического автоморфизма тора $\mathbb{T}^2$ и являющаяся, вероятно, наиболее ранним результатом такого типа, доказанным для динамических систем.

Пусть $\alpha_+ \in (0,1)$ – иррациональность, разложение которой в обыкновенную цепную дробь [3] имеет вид

$$\alpha_+ = [a_1, a_2, \dots] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots}}}.$$

Здесь для каждого $n \geqslant 1$ $a_n = a_n(\alpha_+) \in \mathbb{N}$ – n-ое *неполное частное* числа α_+.

Пусть $p_n = p_n(\alpha_+)$ и $q_n = q_n(\alpha_+)$ – *числитель* и *знаменатель* n-й *подходящей дроби* числа α_+. Мы полагаем $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$. Тогда последовательности (a_n), (p_n) и (q_n) при $n \geqslant 1$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Эти соотношения могут быть переписаны в матричной форме как

$$\begin{pmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-2} & q_{n-2} \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 1,$$

или

$$M_n = A_n M_{n-1}, \quad n \geqslant 1, \tag{1.1}$$

где мы положили

$$M_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_n & q_n \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 0,$$

и

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 1.$$

Каждая целочисленная 2×2 матрица с определителем, равным ± 1, порождает *алгебраический автоморфизм* двумерного тора

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2.$$

Мера Хаара $\mathbf{P}$ на $\mathbb{T}^2$ сохраняется каждым таким автоморфизмом. Таким образом, последовательность $(M_n)_{n\geqslant 1}$ 2×2 матриц определяет последовательность $(T_n)_{n\geqslant 1}$ автоморфизмов двумерного тора $\mathbb{T}^2$. Мы увидим впоследствии, что каждый автоморфизм T_n *гиперболичен* (то есть у M_n нет собственных чисел с модулем 1). Поэтому модуль одного из них больше 1, а другого – меньше 1 и оба они вещественны.

Пусть $\alpha_- \in [1, \infty)$ – иррациональность, разложение которой в обыкновенную цепную дробь имеет вид

$$\alpha_- = a_0 + \cfrac{1}{a_{-1} + \cfrac{1}{a_{-2} + \cfrac{1}{\dots}}} \quad .$$

Мы представляем α_- и пару $\alpha \overset{\text{def}}{=} (\alpha_-, \alpha_+)$ как

$$\alpha_- = [\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0]$$

и

$$\alpha = (\alpha_-, \alpha_+) = [\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0; a_1, a_2, \dots],$$

соответственно. Распространим на все $n \in \mathbb{Z}$ данные выше определения матричнозначных последовательностей (A_n) и (M_n), полагая

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

и

$$M_n = \begin{cases} A_n \cdots A_1, & \text{если} \quad n > 0, \\ I, & \text{если} \quad n = 0, \\ (A_0 \cdots A_{n+2}\, A_{n+1})^{-1}, & \text{если} \quad n < 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

где I – (2×2) единичная матрица.

Замечание 1. Будет удобно определить матричнозначную функцию M *ориентированного интервала*, полагая

$$M_\varnothing = M_{[\,n\,n]} = I,$$

$$M_{[\,m,\,n]} = A_n \cdots A_{m+1} = M_n M_m^{-1} \quad \text{для} \quad m < n, \quad m,n \in \mathbb{Z},$$

$$M_{[\,n,\,m]} = (M_{[\,m,\,n]})^{-1} = M_m M_n^{-1} \ \ \text{для} \ \ m < n, \quad m,n \in \mathbb{Z}.$$

Мы имеем тогда

$$M_n = M_{[\,0,\,n]}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

и для $l,m,n \in \mathbb{Z}$

$$M_{[\,l,n]} = M_{[\,m,n]} M_{[\,l,m]}.$$

Таким образом, матричнозначная функция $[m,\,n] \mapsto M_{[\,m,\,n]}$ *контравариантна* в очевидном смысле, в то время как функция $[m,\,n] \mapsto M_{[\,m,\,n]}^{-1}$ *ковариантна*. Наш выбор объясняется общепринятым соглашением, по которому матрицы действуют на векторы–столбцы слева.

Пусть для всех $m,n \in \mathbb{Z}$ $T_{[\,m,\,n\,]}$ и T_n – автоморфизмы торов, определяемые матрицами $M_{[m,\,n]}$ и M_n, соответственно. Назовём точку $x \in \mathbb{T}^2$ *исключительной*, если соотношение $T_{[\,m,\,n\,]}\,x = x$ выполняется для некоторого интервала $[m,\,n] \neq \varnothing$. Пусть $(G_n)_{n \geqslant 1}$ – последовательность измеримых подмножеств тора $\mathbb{T}^2$, стягивающаяся к неисключительной точке $x \in \mathbb{T}^2$ и удовлетворяющая некоторым условиям регулярности [4], которые мы для экономии места здесь не будем обсуждать. Заметим, однако, что, например, последовательность эллипсов или параллелограммов с ограниченной геометрией и центрами в упомянутой точке удовлетворяет этому условию; вероятно, простейший выбор даётся последовательностью параллелограммов с центрами в x и сторонами, идущими вдоль устойчивого и неустойчивого направлений; ограниченность геометрии означает здесь, что отношение длин сторон заключено между двумя положительными постоянными, общими для всех параллелограммов данной последовательности. Обозначим через f_N индикатор множества G_N и через $\mathbf{P}$ нормированную меру Хаара на $\mathbb{T}^2$. Пусть $(s(n))_{n\geqslant 1}$ – такая последовательность натуральных чисел, что $s(n) \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Теорема. *Пусть при некотором* $\lambda > 0$, *выполняется соотношение*

$$2\,s(n)\,\mathbf{P}\,(G_n) \underset{n\to\infty}{\to} \lambda.$$

Тогда последовательность

$$\sum_{k=-s(n)+1}^{s(n)-1} f_n \circ T_k$$

сходится по распределению к закону Пуассона с параметром λ.

Замечание 2. Если вместо последовательности $(T_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ взять последовательность степеней $(T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ одного гиперболического автоморфизма T, то аналогичная предельная теорема утверждает, что $\sum\limits_{k=0}^{s(n)-1} f_n \circ T^k$ сходится по распределению к закону Пуассона с параметром λ в предположении, что $s(n)\,\mathbf{P}(G_n) \underset{n\to\infty}{\to} \lambda$. Подобное заключение содержится в работе Б. Пицкеля [2] и может быть также выведено, в частности, из последующих результатов М. Хираты [5], М. Денкера [6], Н. Хайдна [7, 8], М. Хираты, С. Бенуа, С. Вайенти [9], Д. Долгопята [10], М. Денкера, М. Гордина и А. Шаровой [4]. В ситуации, рассматриваемой в данной работе, некоторые гиперболические автоморфизмы тора $\mathbb{T}^2$ возникают из периодических последовательностей $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. В самом деле, определим A_n соотношением (1.2) и положим $M = A_p \cdots A_1$, где $p \in \mathbb{N}_+$ – период последовательности $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Тогда изучение последовательности $(T_n)_{n\geqslant 1}$ может быть сведено к случаю степеней одного автоморфизма T_M.

Замечание 3. Если, как в предыдущем замечании, $T_n = T_M^n$, $n \in \mathbb{Z}$, то исключительные точки – это в точности *периодические точки* автоморфизма T_M. В общем случае множество исключительных точек не более чем счётно.

Метод доказательства основан на подходе, применённом в [4], дополненном некоторыми новыми элементами. Метод работы [4] (где рассматривались гиперболические автоморфизмы торов произвольной размерности) состоит в использовании *устойчивого* и *неустойчивого* слоений автоморфизма, чтобы построить их пересечение, так называемое *гомоклиническое отношение эквивалентности*, и связанные с этим пересечением *гомоклинические преобразования*. Как было замечено в [11], гомоклинические структуры создают подходящую обстановку для применения *метода Ч. Стейна* доказательства предельных теорем. На основе этого подхода в [11] был доказан некоторый вариант центральной предельной теоремы (ЦПТ) для гиперболических автоморфизмов торов (там же можно найти обсуждение вопроса и ссылки на предшествующие работы, включая основополагающую работу Стейна). Подход Стейна был развит далее Л. Х. Ю. Ченом [12] и другими исследователями [13, 14], чтобы доказать существование пуассоновского предела в различных вероятностных и комбинаторных задачах. Позже в [4] было показано, как метод Чена–Стейна в сочетании с гомоклиническими структурами может быть использован, чтобы доказать предельную теорему Пуассона для гиперболических автоморфизмов торов. В настоящей работе мы существенно обобщаем ту часть основного результата из [4], которая относится к двумерному случаю и касается автоморфизмов специального вида. Последнее ограничение связано с использованием нами цепных дробей для упрощения изложения и не является принципиальным.

Предлагаемая работа организована следующим образом. Чтобы проиллюстрировать наш подход в более простой ситуации и заложить основу для последующего изложения, мы даём в разделе 2 очерк доказательства основного результата работы [4], ограничиваясь при этом автоморфизмами тора $\mathbb{T}^2$. Наше внимание здесь концентрируется вокруг тех элементов доказательства из [4], в которых появляются основные использованные там идеи и связанные с ними структуры (гомоклинические объекты, спектральная щель гомоклинического оператора Лапласа, гомоклиническое перемешивание и его связь с распределением целочисленных точек). Рутинные элементы доказательства опущены; при необходимости они могут быть найдены в [4] или восстановлены читателем самостоятельно.

В разделе 3 указываются изменения, которые нужно сделать в материале раздела 2, чтобы охватить основную ситуацию, рассматриваемую в работе. В частности, мы детально объясняем конструкции и свойства объектов, которые замещают в более сложной ситуации, связанной с непрерывными дробями, структуры стандартной гиперболической динамики. В разделе 4 собраны некоторые заключительные замечания и кратко обсуждаются история вопроса и возможные темы дальнейших исследований.

§2. Случай степеней гиперболического автоморфизма тора $\mathbb{T}^2$: набросок доказательства

Каждой гиперболической матрице $A \in \mathrm{Mat}^{\pm 1}(2,\mathbb{Z})$, действующей на векторы–столбцы умножением слева, соответствует линейный оператор $\tilde{T}_A$ в $\mathbb{R}^2$, имеющий два одномерных собственных подпространства; одно из них, *неустойчивое*, растягивается оператором $\tilde{T}_A$, в то время как другое, *устойчивое*, этот оператор сжимает. Оператор $\tilde{T}_A$ отображает $\mathbb{Z}^2$ на себя; следовательно, он определяет автоморфизм $T = T_A$ двумерного тора $\mathbb{T}^2$. Напомним некоторые простые факты о гиперболических автоморфизмах торов, которые могут быть найдены в [11]. Каноническое отображение накрытия $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$ взаимно однозначно отображает неустойчивое и устойчивое одномерные подпространства оператора $\tilde{T}_A$ на *неустойчивую* инвариантную одномерную подгруппу Γ_u автоморфизма T и *устойчивую* инвариантную одномерную подгруппу Γ_s автоморфизма T, соответственно. Каждая из этих двух подгрупп плотна в $\mathbb{T}^2$ и порождает слоение, образованное классами смежности по данной подгруппе. *Гомоклиническая группа* Γ автоморфизма T определяется соотношением $\Gamma = \Gamma_u \cap \Gamma_s$. Она является счётной T–инвариантной плотной подгруппой тора $\mathbb{T}^2$. Подгруппа Γ может быть также описана соотношением

$$\gamma \in \Gamma \Leftrightarrow T^n\gamma \underset{|n|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(заметим, что тор $\mathbb{T}^2$ имеет стандартную структуру компактной абелевой группы; на $\mathbb{T}^2$ имеется и риманова метрика, приходящая из накрывающего $\mathbb{T}^2$ пространства $\mathbb{R}^2$; она индуцирует геодезическое расстояние, обозначаемое в работе через ρ).

Как абстрактная группа, Γ является свободной абелевой группой ранга 2. Ей соответствует *гомоклиническое отношение эквивалентности* на $\mathbb{T}^2$ ($x, y \in \mathbb{T}^2$ гомоклинически эквивалентны, если $x - y \in \Gamma$), а её элементам соответствуют *гомоклинические преобразования*

$(S_\gamma)_{\gamma\in G}$

$$S_\gamma : \mathbb{T}^2 \ni x \mapsto x+\gamma, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Гомоклинические преобразования могут быть использованы, чтобы реализовать форму *спаривания* (или *каплинга*) – вероятностной концепции локализованного во времени возмущения случайной последовательности. Именно, пусть $f \in L_2$. Рассмотрим стационарные последовательности

$$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad (X'_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

заданные соотношениями

$$X_n = f\circ T^n, \quad X'_n = f\circ T^n \circ S_\gamma, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Тогда

$$X_n - X'_n \underset{|n|\ \to\infty}{\longrightarrow} 0$$

по норме пространства L_2.

Доказательство предельной теоремы Пуассона в [4] основывается на следующем общем утверждении из [12].

Предложение 1. *Пусть $\lambda > 0$ и $(X_n)_{n\geqslant 1}$ – последовательность случайных величин, принимающих значения в $\mathbb{Z}_+$. Для того, чтобы последовательность $(X_n)_{n\geqslant 1}$ сходилась по распределению к закону Пуассона с параметром λ, необходимо и достаточно, чтобы для любой ограниченной функции $\varphi : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ было выполнено соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\big(\mathbf{E}X_n\varphi(X_n) - \lambda\mathbf{E}\varphi(X_n+1)\big) = 0. \tag{2.1}$$

Доказательство сходимости к распределению Пуассона. Как показано в [4], наша задача, вследствие предложения 1, сводится к проверке выполнения для произвольной ограниченной функции $\psi : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ соотношения Чена–Стейна

$$\mathbf{E}\sum_{i=0}^{s(n)-1}\left(\mathbf{1}_{T^{-i}G_n}\psi\left(\dot W_n^{(i)}\right) - \mathbf{P}(G_n)\mathbf{E}\psi\left(\dot W_n^{(i)}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

где

$$\dot W_n^{(i)} = \sum_{j\,:\,0\leqslant j\leqslant s(n)-1,\, j\neq i} \mathbf{1}_{T^{-j}G_n}$$

– так называемая 1-*проколотая сумма.* Положив

$$f_n^{(i)} = f_n\circ T^i \,(= \mathbf{1}_{T^{-i}G_n})$$

и опустив элементарные вычисления, мы можем переписать подлежащее доказательству соотношение в виде

$$\sum_{i=0}^{s(n)-1} \Big(\mathbf{E} f_n^{(i)} \psi(\dot{W}_n^{(i)}) - \mathbf{E} f_n^{(i)} \mathbf{E} \psi(\dot{W}_n^{(i)})\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Последнее соотношение – это некое утверждение об асимптотической (при $n \to \infty$) *декорреляции* между каждой из функций $f_n^{(i)}$ и суммой остальных функций $f_n^{(j)}$, $j \neq i$. На следующем этапе мы уменьшим корреляции, увеличив размеры “проколов” и оценим погрешность, вызванную этим увеличением. Положим

$$\dot{W}_n^{(i,m)} = \sum_{\substack{j:\, 0 \leqslant j \leqslant s(n)-1,\\ m \leqslant |i-j|}} f_n^j, \tag{2.2}$$

так что $\dot{W}_n^{(i)} = \dot{W}_n^{(i,1)}$.

Пусть $(m(n))_{n\geqslant 1}$ – (медленно) возрастающая последовательность положительных целых чисел, определяющих размер “проколов”. Требования к этой последовательности будут уточнены в конце следующего подраздела работы.

Разобьём подлежащее оцениванию выражение на два слагаемых:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{s(n)-1} \Big(\mathbf{E} f_n^{(i)} \psi(\dot{W}_n^{(i)}) - \mathbf{E} f_n^{(i)} \mathbf{E} \psi(\dot{W}_n^{(i)})\Big)\\
= \ &\sum_{i=0}^{s(n)-1} \mathbf{E}\big((f_n^{(i)} - \mathbf{E} f_n^{(i)}) \psi(\dot{W}_n^{(i)})\big)\\
= \ &\sum_{i=0}^{s(n)-1} \mathbf{E}\big((f_n^{(i)} - \mathbf{E} f_n^{(i)}) \psi(\dot{W}_n^{(i,m(n))})\big)\\
+ \ &\sum_{i=0}^{s(n)-1} \mathbf{E}\big((f_n^{(i)} - \mathbf{E} f_n^{(i)})(\psi(\dot{W}_n^{(i)}) - \psi(\dot{W}_n^{(i,m(n))}))\big)\\
= \ &\sum\nolimits_n^{\mathrm{punc}} + \sum\nolimits_n^{\mathrm{err}},
\end{aligned}$$

где

$$\sum\nolimits_n^{\mathrm{punc}} = \sum_{i=0}^{s(n)-1} \mathbf{E}\big((f_n^{(i)} - \mathbf{E} f_n^{(i)})\psi(\dot W_n^{(i,m(n))})\big) \tag{2.3}$$

– $s(n)$-*проколотая сумма*, а

$$\sum\nolimits_n^{\mathrm{err}} = \sum_{i=0}^{s(n)-1} \mathbf{E}\big((f_n^{(i)} - \mathbf{E} f_n^{(i)})(\psi(\dot W_n^{(i)}) - \psi(\dot W_n^{(i,m(n))}))\big) \tag{2.4}$$

– *погрешность*.

2.1. Оценивание сумм $\sum_n^{\mathrm{punc}}$. Для каждого $g \in \mathbb{T}^d$ обозначим через H_g унитарный оператор, сдвигающий аргумент функции $f \in L_2 = L_2(\mathbb{T}^2, \mathbf{P})$ на элемент g: $(H_g f)(\cdot) = f(g + \cdot)$. Такой оператор будем называть *оператором трансляции* (на $g \in \mathbb{T}^2$). Пусть I и U – это, соответственно, единичный оператор в L_2 и унитарный оператор, порождённый автоморфизмом $T : Uf = f \circ T$. Мы имеем $U^n H_g U^{-n} \to I$ при $|n| \to \infty$ (в сильной операторной топологии) тогда и только тогда, когда $g \in \Gamma$ (отметим, что $U^n H_g U^{-n} = H_{T^n g}$). Операторы вида H_γ с $\gamma \in \Gamma$ мы будем называть *операторами гомоклинических трансляций*. Зафиксируем некоторую пару γ_1, γ_2 образующих группы Γ. Для каждых $p \in \mathbb{Z}$ и $l \in \{1, 2\}$ положим $H_{p,l} = H_{\gamma_{p,l}}$, где $\gamma_{p,l} = T^p \gamma_l$, так что $U^n H_{p,l} U^{-n} = H_{p+n,l}$ для каждого $n \in \mathbb{Z}$. Теперь мы полагаем

$$\Delta = \sum_{l=1}^{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (I - H^*_{p\,,\,l})(I - H_{p\,,\,l}). \tag{2.5}$$

Оператор Δ, называемый *гомоклиническим оператором Лапласа*, был введён в [11] для применения при доказательстве ЦПТ методом Стейна. Приведённое выше выражение определяет неограниченный допускающий замыкание симметрический оператор, коммутирующий с U. Как показано в [11], существует такая постоянная $c > 0$, что для любой функции f из некоторого плотного в $L_2^0 = L_2 \ominus \mathbb{C}$ подпространства выполнено неравенство

$$(\Delta f, f) \geqslant c\|f\|_2^2. \tag{2.6}$$

В силу этого неравенства у ограничения $\Delta|_{L_2^0}$ существует ограниченный правый обратный оператор Δ^{-1} и мы можем написать

$$f - \mathbf{E} f = \Delta(\Delta^{-1}(f - \mathbf{E} f))$$

с ограниченным оператором Δ^{-1}. Далее, для оператора Δ выполняется формула Грина с аналогом энергетической формы:

$$(\Delta g, h) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{l=1}^{2} ((I - H_{p,l})g, (I - H_{p,l})h)_2.$$

Положим $\widehat{f}_n^{(i)} = f_n^{(i)} - \mathbf{E} f_n^{(i)}$. Используя ограниченность Δ^{-1} в L_2^0, применяя формулу Грина и опуская промежуточные шаги (их можно найти в [4]), мы получаем, что

$$\begin{aligned} &|\mathbf{E}(\widehat{f}_n^{(i)} \psi(\dot{W}_n^{(i,m(n))}))| \\ &\qquad = |(\widehat{f}_n^{(i)}, \psi(\dot{W}_n^{(i,m(n))}))| = \left|(\Delta\Delta^{-1} \widehat{f}_n^{(i)} \psi(\dot{W}_n^{(i,m(n))}))\right| \\ &\qquad \leqslant \frac{2}{c} M \sum_{l=1}^{2} \sum_{|q| \geqslant m(n)} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \|(I - H_{p+q,l}) f_n\|_2 \|(I - H_{p,l}) f_n\|_2, \end{aligned}$$

где $M = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \psi(k)$.

Мы достигли пункта, где нам понадобятся некоторые свойства равномерной по n регулярности множеств (G_n). Точные условия, накладываемые на эти множества, могут быть найдены в [4]. Как было отмечено выше, многие последовательности множеств (такие как гомотетичные параллелограммы или эллипсы ограниченной геометрии) удовлетворяют этим требованиям. Кроме того, ситуация значительно упрощается в двумерном случае – единственном, который нас в этой работе интересует. Далее, отметим, что гомоклинические трансляции сходятся к нулю под действием степеней автоморфизма T_A экспоненциально быстро. Это обстоятельство вместе с некоторыми верхними границами для модулей непрерывности в пространстве L_2 индикаторов (f_n) множеств (G_n) (здесь играет роль упоминавшаяся выше регулярность этих множеств) влечёт оценку

$$\|(I - H_{p,l}) f_n\|_2 = \mathbf{P}^{1/2}((G_n \setminus (G_n + T^p \gamma_l)) \cup ((G_n + T^p \gamma_l) \setminus G_n))$$

$$\leqslant K^{1/2} \rho^{\alpha/2}(T^p \gamma_l, 0) \mathbf{P}^{\beta/2}(G_n) \leqslant K^{1/2} A^{\alpha/2} \mathrm{e}^{-(\alpha\kappa p)/2} \mathbf{P}^{\beta/2}(G_n)$$

с некоторыми положительными постоянными $K, A, \alpha, \beta, \kappa$. Выберем последовательность $(m(n))_{n \geqslant 1}$ такой, чтобы при $n \in \mathbb{Z}_+$ выполнялось неравенство $m(n) \geqslant [\sigma \log s(n)] + 1$ (здесь σ – некоторая постоянная, удовлетворяющая неравенству $\sigma > 2(1-\beta)(\alpha\kappa)^{-1}$) и, кроме того, при

$n \to \infty$ имело место соотношение соотношение $m(n) = O(s^{1/2}(n))$. Тогда, как показано в предложении 3.2 работы [4] с использованием полученной верхней границы, $m(n)$-проколотые суммы $\sum_n^{\mathrm{punc}}$ сходятся к 0 при $n \to \infty$.

2.2. Отступление о параллелограммах. Понятие параллелограмма играет важную роль в настоящей работе. Мы будем рассматривать параллелограммы, лежащие в $\mathbb{R}^2$ и на торе $\mathbb{T}^2$. В той части работы, которая посвящена последовательности степеней одного гиперболического автоморфизма тора $\mathbb{T}^2$, мы имеем дело только с параллелограммами, стороны которых – это отрезки, идущие вдоль устойчивого и неустойчивого направлений. Пространство $\mathbb{R}^2$ является прямым произведением своих устойчивого и неустойчивого одномерных подпространств. Нас, однако, в первую очередь интересуют ассоциированные с ними слоения, что отражается на понимании взаимотношений между параллелограммом и его сторонами. Если параллелограмм в $\mathbb{R}^2$ понимается нами как вполне определённая геометрическая фигура, лежащая в $\mathbb{R}^2$, то, скажем, его устойчивая *сторона* – это отрезок одного из устойчивых одномерных слоёв; эта же сторона может быть представлена отрезком любого другого устойчивого слоя; любой из этих отрезков получается из любого другого такого отрезка параллельным переносом вдоль неустойчивого направления. Так же, естественно, понимается и неустойчивая сторона параллелограмма. Параллелограмм является произведением своих сторон в том смысле, что он является пересечением насыщений (любых представителей) своих сторон относительно дополнительных слоений.

Можно, однако, для параллелограмма в $\mathbb{R}^2$ определить его стороны как отрезки его границы, заключённые между его вершинами. Такие его *геометрические стороны* будут представителями классов отрезков определённых выше с точностью до параллельного переноса вдоль дополнительного направления. При любом понимании сторон формула $R = [R_s, R_u]$ выражает то обстоятельство, что R – это параллелограмм, сторонами которого являются отрезки R_s и R_u.

Для параллелограммов, возникающих при рассмотрении последовательностей автоморфизмов торов, задаваемых цепными дробями, из контекста всегда будет ясно, какая пара слоений должна быть взята за основу в том или ином конкретном случае.

Перейдём к параллелограммам на торе $\mathbb{T}^2$. Назовём лежащий в $\mathbb{R}^2$ параллелограмм *малым*, если у него не найдётся двух различных внутренних точек, получающихся одна из другой сдвигом на вектор из $\mathbb{Z}^2$. *Параллелограммом* на торе $\mathbb{T}^2$ мы будем называть образ некоторого малого параллелограмма в $\mathbb{R}^2$ относительно канонического накрывающего отображения; под его *сторонами* будут пониматься образы геометрических сторон относительно накрывающего отображения; формула $R = [R_s, R_u]$ может употребляться и на торе для выражения связей между параллелограммом и его сторонами.

2.3. Оценивание сумм $\sum_n^{\mathrm{err}}$ и завершение доказательства теоремы. Можно показать [4], что, оценивая сверху суммы $\sum_n^{\mathrm{err}}$, достаточно сделать это для выражения

$$\sum_{i=0}^{s(n)-1} \sum_{j\,:\,1 \leqslant |\,i-j\,| \leqslant m(n)} \mathbf{E}(f_n^{(i)} f_n^{(j)}). \tag{2.7}$$

Заметим, что мы можем, увеличивая рассматриваемые множества, вписать каждое множество G_n в параллелограмм $R = [R_s, R_u]$ со сторонами R_s, R_u, идущими по устойчивому и неустойчивому направлениям, соответственно. Ниже приведено ключевое для оценивания (2.7) утверждение из [4], адаптированное к двумерной ситуации.

Предложение 2. *Пусть $R = [R_s, R_u] \subseteq \mathbb{T}^2$ – параллелограмм. Тогда для любых $l > 0$, $s, m \in \mathbb{Z}_+$*

$$\sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j\,:\,l < |\,i-j\,| \leqslant m} \mathbf{P}(T^i(R) \cap T^j(R)) \leqslant Cs\mathbf{P}(R)\bigl(q^{-l} + m\bigl(\mathbf{P}^{1/2}(R)\bigr)\bigr)^2,$$

где $q > 1$ – наибольший из модулей собственных чисел матрицы A, а C – абсолютная постоянная.

Мы очертим ниже основную идею доказательства, отсылая интересующегося читателя к [4]. Так как нам нужен только двумерный случай, некоторые моменты доказательства из [4] существенно упрощаются. Действительно, геометрия “сторон” (которые для $\mathbb{T}^2$ являются обычными одномерными интервалами) тривиальна, в то время как в старших размерностях имеется проблема, связанная с возможной неравномерностью сжатия (растяжения).

Достаточно найти оценку сверху для $\mathbf{P}(T^{-k}(R)\cap T^{k}(R))$ при больших k. Заметим, что $T^{-k}(R)$ является *u-коротким* (коротким в u-направлении) и *s-длинным*, в то время как $T^{k}(R)$ является *u-длинным* и *s-коротким*. Таким образом, эти два множества выглядят почти как длинные интервалы устойчивого (соответственно, неустойчивого) слоя соответствующего слоения. Следовательно, их пересечение состоит из некоторого числа параллелограммов экспоненциально малого относительно k размера; большая их часть имеет стандартную форму и выглядит как $T^{-k}R_u\times T^kR_s$. Мера множества $\mathbf{P}(T^{-k}(R)\cap T^{k}(R))$ приблизительно равняется $\mathbf{P}(T^{-k}R_u\times T^kR_s)\times \operatorname{card}(T^{-k}R_s\cap T^kR_u)$. Целочисленный множитель $\operatorname{card}(T^{-k}R_s\cap T^kR_u)$ равняется числу (гомоклинических) точек, образующих пересечение длинного неустойчивого и длинного устойчивого интервалов. Если рассмотреть универсальное накрытие $\mathbb{R}^2$ тора $\mathbb{T}^2$, то можно отождествить это число с числом точек целочисленной решётки, оказавшихся в экспоненциально быстро (при $k\to\infty$) растущем параллелограмме в $\mathbb{R}^2$, стороны которого идут вдоль неустойчивого и устойчивого направлений и равны отрезкам $T^{-k}R_s$ и T^kR_u. Верхняя оценка для числа точек решётки, находящихся внутри описанного только что параллелограмма, его площадью с дополнительными корректирующими слагаемыми, учитывающими граничные эффекты, является одним из ингредиентов, использованных в доказательстве предложения 2. Другой ингредиент – это верхняя оценка длин $T^{-k}R_u$ и T^kR_s. Экспоненциальное (по k) убывание этих длин определяется модулями сжимающих (то есть с модулем <1) собственных чисел матриц A^k и A^{-k}. Экспоненциально зависящие от k множители в оценках для $\operatorname{card}(T^{-k}R_s\cap T^kR_u)$ и $\mathbf{P}(T^{-k}(R)\cap T^{k}(R))$ в результирующей формуле сокращаются, чем и завершается доказательство предложения 2.

Теперь, чтобы доказать, что двойная сумма в (2.4) стремится к 0 при $n\to\infty$, мы делаем l зависящим от n таким образом, что, во-первых, $l(n)\to\infty$, и, во-вторых, $T^i(R_n)\cap T^j(R_n)=\varnothing$, если $|i-j|\leqslant l(n)$. Это возможно в виду *апериодичности* точки, к которой стягивается последовательность (G_n). Тогда по предложению 2 мы получаем, что

$$\mathbf{E}(f_n^{(i)}f_n^{(j)})=\sum_{i=0}^{s(n)-1}\sum_{j\,:\,1\leqslant|i-j|\leqslant m(n)}\mathbf{P}(T^i(G_n)\cap T^j(G_n))$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{i=0}^{s(n)=1} \sum_{j\,:\,1\leqslant|i-j|\leqslant m(n)} \mathbf{P}(T^i(R_n)\cap T^j(R_n)) \\
&\leqslant Cs(n)\mathbf{P}(R_n)\bigl(q^{-l(n)}+m(n)\mathbf{P}^{1/2}(R_n)\bigr) \\
&\leqslant C's(n)\mathbf{P}(G_n)\bigl(q^{-l(n)}+m(n)\mathbf{P}^{1/2}(G_n)\bigr) \\
&= O\bigl(q^{-l(n)})+m(n)s^{-1/2}(n)\bigr)=o(1) \quad n\to\infty.
\end{aligned}
$$

Следовательно, сумма в (2.4) стремится к нулю. Вместе с заключением, сделанным в предыдущем подразделе, это завершает доказательство предельной теоремы Пуассона для степеней одного гиперболического автоморфизма тора $\mathbb{T}^2$. □

Замечание 4. Рассуждение, использованное в [4] при доказательстве предложения 2, тесно связано с оценкой скорости перемешивания посредством подсчёта числа элементов орбиты группы скольжений в растущей области универсального накрытия. Эта тема восходит к диссертации Г. А. Маргулиса (1970), см. также [15, 16]. По-видимому, связь с гомоклиническими структурами возникает в [4] впервые.

§3. Переход к случаю автоморфизмов, задаваемых цепными дробями

3.1. Построение эквивариантных устойчивых, неустойчивых и гомоклинических подгрупп. Мы обращаемся к случаю автоморфизмов $\mathbb{T}^2$, задаваемых цепными дробями. В отличие от ситуации, рассмотренной в предыдущем разделе, теперь, вообще говоря, мы не располагаем *инвариантным устойчивым* (или *инвариантным неустойчивым*) слоением на торе. Однако вместо этого, как будет сейчас объяснено, может быть построена *эквивариантная устойчивая последовательность*. В этом разделе мы используем те же обозначения, что и раньше, для целочисленных обратимых 2×2 матриц и соответствующих автоморфизмов торов.

При каждом $k\geqslant 1$ матрица

$$
M_k=A_k\cdots A_1=M_k(\alpha_+)=\begin{pmatrix} p_{k-1}(\alpha_+) & q_{k-1}(\alpha_+) \\ p_k(\alpha_+) & q_k(\alpha_+)\end{pmatrix} \tag{3.1}
$$

имеет *неустойчивое* (т. е. с модулем >1) собственное число

$$
\lambda_u^{(k)}=\frac{p_{k-1}+q_k}{2}+\sqrt{\frac{(p_{k-1}+q_k)^2}{4}-(-1)^k}\sim(p_{k-1}+q_k)
$$

и *устойчивое* (т. е. с модулем < 1) собственное число

$$\lambda_s^{(k)} = \frac{p_{k-1}+q_k}{2} - \sqrt{\frac{(p_{k-1}+q_k)^2}{4} - (-1)^k} \sim \frac{(-1)^k}{p_{k-1}+q_k}\,.$$

Мы рассматриваем 2×2 матрицы как линейные операторы в R^2, действующие на векторы-столбцы $(x_1, x_2)^\perp$ слева (здесь и далее верхний индекс $\perp$ обозначает транспонирование прямоугольной матрицы). Собственные направления $x_2 : x_1$, соответствующие собственным числам $\lambda_u^{(k)}$ и $\lambda_s^{(k)}$ матрицы M_k, задаются отношениями

$$r_{u,+}^{(k)} = q_{k-1} : (\lambda_u^{(k)} - p_{k-1}) \sim q_{k-1} : q_k$$

и

$$r_{s,+}^{(k)} = p_k : \left(\frac{(-1)^k}{p_{k-1}+q_k} - q_k\right) \sim -p_k : q_k,$$

соответственно. Эти два направления ведут себя по-разному, когда $k \to \infty$: собственное подпространство числа $\lambda_u^{(k)}$ эволюционирует без определённой системы, в то время как собственное подпространство числа $\lambda_s^{(k)}$ экспоненциально быстро сходится к предельному направлению $-\alpha_+ : 1$, где

$$\alpha_+ = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots}}}.$$

Последний факт непосредственно следует из следующих классических неравенств [3] для $p_k/q_k = p_k(\alpha_+)/q_k(\alpha_+)$ и $q_k = q_k(\alpha_+)$:

$$\left|\frac{p_k}{q_k} - \alpha_+\right| \leqslant \frac{1}{q_k q_{k+1}} \quad \text{и} \quad q_k \geqslant 2^{\frac{k-1}{2}}.$$

Таким образом, направление $-\alpha_+ : 1$ выделяет одномерную *асимптотически устойчивую подгруппу* $\Gamma_{s,0}$ тора $\mathbb{T}^2$ и ассоциированное слоение. Далее, отправляясь, при фиксированном $n \in \mathbb{Z}$, от последовательности матриц $(M_{k+n}M_n^{-1})_{k\geqslant 1} = (A_{k+n}\cdots A_{n+1})_{k\geqslant 1}$ вместо последовательности матриц $(M_k)_{k\geqslant 1} = (A_k \cdots A_1)_{k\geqslant 1}$, мы получаем одномерную *асимптотически устойчивую подгруппу* $\Gamma_{s,n}$. При этом подгруппа $\Gamma_{s,n}$ соответствует направлению $-\alpha_+(n) : 1$, где $\alpha_+(n) = [a_n, a_{n+1}, \dots]$. Последовательность $(\Gamma_{s,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ подгрупп тора $\mathbb{T}^2$, вместе со связывающими эти подгруппы отображениями, обладает следующими свойствами эквивариантности и сжатия:

i$_s$) $\Gamma_{s,n} = M_n(\Gamma_{s,0}) \quad (n \in \mathbb{Z})$;

ii$_s$) $M_{k+n}M_n^{-1}$ отображает $\Gamma_{s,n}$ на $\Gamma_{s,k+n}$ с экспоненциально быстро растущим при $k \to \infty$ (равномерно относительно $n \in \mathbb{Z}$) сжатием.

Как отмечалось выше, в рассматриваемой нами нестационарной ситуации *устойчивая эквивариантная последовательность* $(\Gamma_{s,n})_{n \geqslant 0}$ подгрупп является заменой *устойчивой инвариантной подгруппы* Γ_s в случае степеней одного автоморфизма.

Подобным же образом мы строим *неустойчивую эквивариантную последовательность* $(\Gamma_{u,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ одномерных подгрупп. Сначала мы получим одномерную *асимптотически неустойчивую подгруппу* $\Gamma_{s,0}$ тора $\mathbb{T}^2$. Рассмотрим, для каждого $k \geqslant 1$, неустойчивое собственное направление матрицы

$$A_0 \cdots A_{-k+1} = (A_{-k+1} \cdots A_0)^{\perp} = \begin{pmatrix} p_{k-1}(1/\alpha_-) & p_k(1/\alpha_-) \\ q_{k-1}(1/\alpha_-) & q_k(1/\alpha_-) \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Мы пользуемся здесь тем, что

$$1/\alpha_- = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_{-1} + \cfrac{1}{\cdots}}}.$$

Сравнивая самую правую матрицу в (3.2) с такой же матрицей в (3.1) и замечая, что при переходе от одной из этих матриц к другой элементы p_k и q_{k-1} меняются ролями, мы видим, что неустойчивое направление матрицы $A_0 \cdots A_{-k+1}$ асимптотически эквивалентно отношению $p_k(1/\alpha_-) : q_k(1/\alpha_-)$, которое экспоненциально быстро сходится к $1 : \alpha_-$. Таким образом, мы построили одномерную *асимптотически неустойчивую подгруппу* $\Gamma_{u,0}$.

Замечание 5. Отметим, что одномерные подгруппы $\Gamma_{s,0}$ и $\Gamma_{u,0}$ с направлениями $-\alpha_+ : 1$ и $1 : \alpha_-$ *трансверсальны*, так как оба числа α_+ и α_- положительны.

Чтобы завершить построение неустойчивой ковариантной последовательности подгрупп тора $\mathbb{T}^2$, мы фиксируем число $n \in \mathbb{Z}$ и рассматриваем для $k \geqslant 1$ матрицы $A_n \cdots A_{n-k+1} = M_n M_{n-k}^{-1}$. Повторяя рассуждения, которые были использованы в устойчивом случае, мы строим одномерную *асимптотически неустойчивую подгруппу* $\Gamma_{u,n}$. Как и прежде, для последовательности $(\Gamma_{u,\,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ одномерных *асимптотически неустойчивых подгрупп* тора $\mathbb{T}^2$ и связывающих эти подгруппы отображений выполняются следующие свойства эквивалентности и растяжения (последнее свойство формулируется как свойство сжатия обратных отображений):

i$_u$) $\quad \Gamma_{u,\,n} = M_n(\Gamma_{u,\,0}) \quad (n \in \mathbb{Z})$;

ii$_u$) $\quad M_{n-k}M_n^{-1}\left(= (A_n \cdots A_{n-k+1})^{-1}\right)$ отображает $\Gamma_{u,\,n}$ на $\Gamma_{u,\,n-k}$ с экспоненциально быстрым (равномерно по $n \in \mathbb{Z}$) сжатием при $k \to \infty$.

Прочие объекты (такие как гомоклинические преобразования) также могут быть построены в рассматриваемой ситуации, но становятся зависимыми от n. Например, n—ая гомоклиническая группа Γ_n определяется как

$$\Gamma_n = \{x \in \mathbb{T}^2 : A_{n+k} \cdots A_{n+1} x \underset{k\to\infty}{\to} 0,$$

$$(A_n \cdots A_{n-k+1})^{-1} x \underset{k\to\infty}{\to} 0\}.$$

3.2. Последовательность гомоклинических операторов Лапласа с общей спектральной щелью и оценка для “проколотых сумм” $\sum_n^{\mathrm{punc}}$. В предыдущем подразделе мы построили последовательность гомоклинических подгрупп $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Она *эквивариантна* в том же смысле, что и подгруппы $(\Gamma_{s,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ и $(\Gamma_{u,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ (см. свойства i$_s$ и i$_u$ в предыдущем подразделе). Для любых $m, n \in \mathbb{Z}$ мы имеем канонический изоморфизм $M_n M_m^{-1} : \Gamma_m \to \Gamma_n$. Это позволяет нам выбрать образующие групп Γ_n совместимым с этими изоморфизмами образом. При таком выборе определение (2.5) гомоклинического оператора Лапласа при каждом $n \in \mathbb{Z}$ может быть применено к группе Γ_n с её выбранными образующими; это даёт нам последовательность $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ гомоклинических операторов Лапласа. Изоморфизмы $M_n M_m^{-1}$ между группами Γ_m и Γ_n являются ограничениями на эти подгруппы автоморфизмов торов, определённых теми же самыми матрицами. Композиции этих автоморфизмов с функциями из пространства $L_2(\mathbb{T}^2, \mathbf{P})$ определяют в этом пространстве унитарные операторы. Эти операторы устанавливают унитарные эквивалентности между операторами Δ_n и Δ_m, а отсюда следует, что спектры всех операторов $\Delta_n, n \in \mathbb{Z}$, имеют одну и ту же положительную нижнюю границу (“спектральную щель”), которую, согласно (2.6), имеет Δ_0. Обратившись теперь к доказательству теоремы, мы полагаем $f_n^{(i)} = f_n \circ T_i\, (i \in \mathbb{Z})$ и приходим к задаче оценивания сверху выражения

$$\sum_{i=-s(n)+1}^{s(n)-1} \mathbf{E}\big((f_n^{(i)} - \mathbf{E} f_n^{(i)})\psi(\dot W_n^{(i,m(n))})\big),$$

где мы положили

$$\dot W_n^{(i,m)} = \sum_{\substack{j\,:\,-s(n)+1 \leqslant j \leqslant s(n)-1,\\ m \leqslant |i-j|}} f_n^{(j)}.$$

Вследствие только что установленных свойств операторов $\Delta_n, n \in \mathbb{Z}$, доказательство оценки протекает дальше так же, как и в подразделе 2.1.

3.3. Другие изменения, необходимые в случае автоморфизмов, задаваемых цепными дробями. Мы будем рассматривать на торе $\mathbb{T}^2$ параллелограммы (в смысле подраздела 2.2), имеющие форму $R = [R_s, R_u] \subset \mathbb{T}^2$. Здесь R_s и R_u – стороны, которые являются интервалами, содержащимися в некоторых классах смежности асимптотически устойчивой и асимптотически неустойчивой одномерных подгрупп $\Gamma_{s,0}$ и $\Gamma_{u,0}$, построенных в подразделе 3.1. Мы будем также рассматривать образы $T_n(R) = [T_n(R_s), T_n(R_u)]$ такого параллелограмма R относительно автоморфизмов T_n при $n \in \mathbb{Z}$; стороны $T_n(R_s)$ и $T_n(R_u)$ параллелограмма $T_n(R)$ лежат в смежных классах групп $\Gamma_{s,n}$ и $\Gamma_{u,n}$, соответственно. Нам придётся также поднимать такие параллелограммы или их стороны (как изометрические копии) в универсальное накрытие $\mathbb{R}^2$ тора $\mathbb{T}^2$. Тот или иной выбор таких копий в накрытии приводит к одним и тем же геометрическим свойствам связанных с ними объектов и не влияет на наши оценки (более подробно эта проблема обсуждается в подразделе 2.2 и в [4]). Чтобы учесть влияние увеличения “проколов” в суммах, нам будет нужна верхняя оценка суммы

$$\sum_{i=-s(n)+1}^{s(n)-1} \ \sum_{j\,:\,1 \leqslant |\,i-j\,| \leqslant m(n)} \mathbf{E}\,(f_n^{(i)} f_n^{(j)}),$$

которую даёт следующее

Предложение 3. *Пусть $R=[R_s,R_u]\subseteq\mathbb{T}^2$ – параллелограмм. Тогда для любых $l\in\mathbb{N}$, $s,m\in\mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=-s+1}^{s-1}\sum_{j\,:\,l<|\,i-j\,|\leqslant m}\mathbf{P}\left(T_i(R)\cap T_j(R)\right)\leqslant C(2s+1)\mathbf{P}(R)\bigl(q^{-l}+m\bigl(\mathbf{P}^{1/2}(R)\bigr)\bigr)^2,$$

где $C>0$ и $q>1$ – некоторые абсолютные постоянные.

Основной шаг в доказательстве предложения 3 – это оценивание сверху величины $\mathbf{P}(T_{-k}(R)\cap T_k(R))$ при больших k. Общая схема доказательства здесь та же, что была изложена в наброске доказательства предложения 2. Однако сейчас мы имеем дело с отрезками слоёв (асимптотически) устойчивого или неустойчивого слоений, которые образуют эквивариантные последовательности и снабжены целочисленными индексами. Помимо свойства эквивариантности и сохранения меры $\mathbf{P}$ автоморфизмами $(T_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ нам здесь понадобится свойство равномерного экспоненциально быстрого сжатия вдоль соответствующих слоений. Как и прежде, мера $\mathbf{P}(T_{-k}(R)\cap T_k(R))$ приблизительно равна

$$\mathbf{P}(T_{-k}R_u\times T_kR_s)\times\operatorname{card}(T_{-k}R_s\cap T_kR_u). \tag{3.3}$$

Теперь мы повторяем шаги, описанные в подразделе 2.3. Заслуживает упоминания следующий момент. После применения аппроксимации числа точек решётки площадью мы приходим к необходимости оценить сверху число

$$\operatorname{length}(T_{-k}R_u)\operatorname{length}(T_kR_u)\operatorname{length}(T_kR_s)\operatorname{length}(T_{-k}R_s),$$

где символом $\operatorname{length}(\cdot)$ обозначены длины отрезков относительно стандартной римановой метрики на $\mathbb{T}^2$.

Мы будем делать это, оценивая по отдельности произведения

$$\operatorname{length}(T_{-k}R_u)\operatorname{length}(T_{-k}R_s)\quad\text{и}\quad\operatorname{length}(T_kR_s)\operatorname{length}(T_kR_u).$$

В обоих случаях нужная оценка является следствием свойства сохранения площади линейным оператором в $\mathbb{R}^2$ с матрицей $M_{\pm k}$.

Оставшаяся часть доказательства повторяет рассуждения из [4].

§4. Заключительные замечания и благодарность

Представленный в настоящей работе результат является примером некоего более общего явления, связанного с предельным поведением последовательности элементов группы, которая действует, скажем, на вероятностном пространстве (как $\mathrm{Mat}^{\pm1}(2,\mathbb{Z})$ действует на торе $\mathbb{T}^2$).

Не предполагается, что эта последовательность образует подгруппу; по этой причине её “действие” не является *действием группы* в обычном смысле. Тем не менее эта последовательность может иметь какие-то примечательные асимптотические свойства в двух различных аспектах: во-первых, как последовательность элементов группы вне какой-либо связи с действием группы на пространстве с мерой (в нашей работе предельное поведение проявляется в сходимости соответствующих цепных дробей), и во-вторых, как последовательность сохраняющих меру преобразований. Выявление возможных связей между двумя этими аспектами является, на наш взгляд, заслуживающей внимания проблемой.

Ниже описывается некоторый класс примеров таких ситуаций, который был описан одному из авторов (М. Г.) Йенсом Марклофом. Он указал также на возможность установления в этой ситуации вероятностных предельных теорем и на имеющиеся связи с работами В. И. Бахтина [17]. Если для действия решётки $\mathrm{SL}\,(d,\mathbb{Z})$ на симметрическом пространстве $X = \mathrm{SL}\,(d,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(d,\mathbb{R})$ выбрана некоторая фундаментальная область, трансляциями которой замощено X, то всякая геодезическая в X, переходя из одной копии фундаментальной области в другую, определяет некоторый элемент решётки $\mathrm{SL}(d,\mathbb{Z})$. Так как в то же время $\mathrm{SL}(d,\mathbb{Z})$ действует естественным образом на торе $\mathbb{T}^d$, геодезическая определяет двустороннюю последовательность автоморфизмов тора, которые могут изучаться с различных точек зрения.

Отметим, что геодезические неявно присутствуют в нашей работе: они появятся, если мы проинтерпретируем вещественные числа, к которым сходятся цепные дроби, как координаты концов геодезической на верхней полуплоскости, снабжённой римановой метрикой постоянной отрицательной кривизны. При этом верхняя полуплоскость рассматривается с обычной комплексной структурой; вещественные 2×2 матрицы действуют на верхней полуплоскости дробно-линейными изометрическими преобразованиями; вещественная прямая, пополненная точкой ∞, играет роль границы верхней полуплоскости. С точностью до некоторых подробностей, которые мы опускаем в этом кратком комментарии, целочисленные матрицы, которые мы строили по двум различным вещественным числам, представляют собой аппроксимации элементов фиксирующей эти два числа однопараметрической группы гиперболических изометрий верхней полуплоскости. Использование цепных дробей позволяет осуществить упомянутую аппроксимацию с помощью элементарной и явной процедуры. В связи с изложенным возникает ряд открытых вопросов:

• Как далеко можно продвинуться, обобщая изложенное на более высокие размерности и ранги?

• Какие классы негиперболических автоморфизмов могут быть включены в рассмотрение?

• Какие ещё вероятностные утверждения могут быть доказаны в ситуации, подобной рассмотренной нами?

• Мы имеем дело в данной работе с некоторым классом нестационарных случайных процессов. Нельзя ли их включить в какую-то общую вероятностную схему?

Авторы выражают свою благодарность Йенсу Марклофу (Jens Marklof, University of Bristol), который познакомил их с этой интересной темой, что в итоге привело к появлению настоящей работы.

Литература

1. R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms.* — Lect. Notes Math. **470**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1975).
2. B. Pitskel, *Poisson limit law for Markov chains.* — Ergodic Theory Dynamical Systems **11** (1991), 501–513.
3. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби.* 3-е изд., Физматгиз, Москва, 1960.
4. M. Denker, M. Gordin, A. Sharova, *A Poisson limit theorem for toral automorphisms.* — Illinois J. Math. **48**, No. 1 (2004), 1–20.
5. M. Hirata, *Poisson law for Axiom A diffeomorphisms.* — Ergodic Theory Dynamical Systems **13** (1993), 533–556.
6. M. Denker, *Remarks on weak limit laws for fractal sets.* — In: Fractal Geometry and Stochastics (Eds. Bandt, Graf, Zähle). Progress Probab. **37**, Birkhäuser 1995, pp. 167–178.
7. N. Haydn, *The distribution of the first return time for rational maps.* — J. Statist. Phys. **94** (1999), 1027–1036.
8. N. Haydn, *Statistical properties of equilibrium states for rational maps.* — Ergodic Theory Dynamical Systems **20** (2000), 1371–1390.
9. M. Hirata, S. Benoit, S. Vaienti, *Statistics of return times: a general framework and new applications.* — Commun. Math. Phys. **206** (1999), 33–55.
10. D. Dolgopyat, *Limit Theorems for Partially Hyperbolic Systems.* — Transactions Amer. Math. Soc. **356**, No. 4 (2003), 1637–1689.
11. M. I. Gordin, *Homoclinic approach to the central limit theorem for dynamical systems.* — Contemporary Math. **146** (1993), 149–192.
12. L. H. Y. Chen, *Poisson approximation for dependent trials.* — Ann. Probab. **3** (1975), 534–545.

13. R. Arratia, L. Goldstein, L. Gordon, *Poisson approximation and the Chen–Stein method.* — Statist. Sci. **5** (1990), 403–434.
14. A. D. Barbour, L. Holst, S. Janson, *Poisson Approximation.* Oxford Studies in Probability, Vol. 2. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1992.
15. G. A. Margulis, *On some aspects of the theory of Anosov systems.* With a survey by R. Sharp: *Periodic orbits of hyperbolic flows.* Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2004.
16. A. Eskin, C. McMullen, *Mixing, counting, and equidistribution in Lie groups.* — Duke Math. J. **71**, No. 1 (1993), 181–209.
17. В. И. Бахтин, *Случайные процессы, порождённые гиперболической последовательностью отображений.* I. — Изв. РАН. Сер. матем. **58**, No. 2 (1994), 40–72; II, Изв. РАН. Сер. матем. **58**, No. 3 (1994), 184–195.
18. Ch. Stein, *Approximate Computation of Expectations.* Institute of Mathematical Statistics Lect. Notes – Monograph Series, 7. Hayward, CA.: Institute of Mathematical Statistics, 1986.

Gordin M., Denker M. Poisson limit for two-dimensional toral automorphisms driven by continued fractions.

Generalizing powers of a single hyperbolic automorphism of the two-dimensional torus, we consider some class of sequences of such automorphisms. Technically such sequences are determined by means of continued fraction expansions of a pair of real numbers. As a substitute for the pair of foliations in the classical hyperbolic theory, every sequence of this class has a sequence of *asymptotically stable* and a sequence of *asymptotically unstable* foliations. We prove a kind of the Poisson limit theorem for such sequences extending a method used earlier by A. Sharova and the present authors to prove a Poisson limit theorem for powers of a single hyperbolic automorphisms of the torus. Possible generalizations are briefly discussed.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
и Санкт-Петербургский
государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: gordin@pdmi.ras.ru

Department of Mathematics,
McAllister Building,
Pennsylvania State University,
University Park, PA 16802, USA
E-mail: denker@math.psu.edu

Поступило 5 октября 2012 г.