Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 408, 2012 г.

А. М. Вершик, Н. В. Смородина

НЕСИНГУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ УСТОЙЧИВЫХ ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ

§1. Введение

Пусть $\alpha \in (0,2]$, $\xi^\alpha(t)$, $t \in [0,T]$ – симметричный α-устойчивый процесс Леви, то есть стохастически непрерывный, сепарабельный процесс с независимыми однородными приращениями, одномерные распределения которого являются симметричными устойчивыми с показателем α. В случае $\alpha \in (0,2)$ траектории процессов ξ^α с вероятностью единица принадлежат пространству Скорохода $\mathrm{D}[0,T]$ функций, непрерывных справа и имеющих предел слева в каждой точке. Случаю $\alpha = 2$ соответствует винеровский процесс, траектории которого с вероятностью 1 непрерывны.

В случае $\alpha \in (0,2)$ для описания симметричных устойчивых процессов удобно использовать следующую форму представления Леви–Хинчина [3,6]. Именно,

$$\xi^\alpha(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} x\mu(ds,dx). \tag{1}$$

В этом представлении $\mu(ds,dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,T]\times\mathbb{R}$ с интенсивностью вида $dt\Lambda_\alpha(dx)$, где мера Λ_α носит название меры Леви или спектральной меры процесса ξ^α. Известно, что мера Леви Λ_α симметричного устойчивого процесса имеет вид

$$\Lambda_\alpha(dx) = \frac{adx}{|x|^{1+\alpha}}, \quad a > 0. \tag{2}$$

Нам будет удобно расширить семейство ξ^α, добавив туда $\alpha = 0$. Случай $\alpha = 0$ будет соответствовать, процессу Леви с мерой Леви

$$\Lambda_0(dx) = \frac{adx}{|x|e^{|x|}}, \quad a > 0. \tag{3}$$

Ключевые слова: винеровская мера, гамма-мера, деформация групп симметрий.

Имеются причины, по которым естественно определить $\xi^0(t)$, именно таким образом, так как этот процесс тесно связан с так называемым устойчивым распределением порядка 0 (см. [10–12]).

Нас будут интересовать вопросы построения групп преобразований пространства траекторий, относительно которых симметричные устойчивые меры обладают свойством квазиинвариантности (или инвариантности). Данное свойство означает, что для каждого преобразования из этой группы, преобразованная мера абсолютно непрерывна относительно исходной (или, в случае инвариантности, совпадает с исходной).

Первым и наиболее известным результатом в этой области является теорема Камерона–Мартина (см. [15]). Именно, винеровский процесс, заданный на интервале $[0,T]$, обладает свойством квазиинвариантности относительно группы сдвигов на элементы пространства $W_2^1[0,T]$ с нулевым значением в нуле.

Утверждение теоремы Камерона–Мартина не обобщается непосредственно на случай скачкообразных процессов (то есть, когда $\alpha \in [0,2)$, так как легко показать, что преобразование сдвига на любую, отличную от тождественного нуля, функцию переводит меру, порожденную α-устойчивым процессом Леви, в ортогональную.

Первый результат об абсолютной непрерывности мер в пространстве $\mathrm{D}[0,T]$, порожденных скачкообразными процессами Леви, принадлежит А. В. Скороходу [4] (см. также [1, 2, 5, 9]).

В работе [16] были построены полугруппы несингулярных преобразований пространства $\mathrm{D}[0,T]$. Основная идея построения этих преобразований заключалась в том, что траектории скачкообразных процессов Леви однозначно определяются множеством своих скачков, и значит возможные несингулярные преобразования следует искать в классе преобразований скачков случайной функции.

В работах [10, 11] для меры, порожденной скачкообразным процессом с мерой Леви (3), была построена группа несингулярных преобразований. Каждое преобразование этой группы задается борелевской функцией $f:[0,T]\to\mathbb{R}$. Само преобразование устроено следующим образом. Если случайная функция имеет в точке t скачок величины x, то преобразованная функция имеет в момент времени t скачок величины

$$\mathrm{T}^0_{f(t)}x = xe^{f(t)}. \tag{4}$$

В [10, 11] показано, что образ меры, порожденной данным процессом Леви, под действием преобразования (4) абсолютно непрерывен относительно исходной меры если $f \in L_1[0,T]$ и сингулярен ей, если $f \notin L_1[0,T]$. Заметим еще, что данные преобразования образуют аддитивную группу относительно поточечного сложения функций.

Далее, в работе [7] для симметричных α-устойчивых процессов Леви, при $\alpha \in (0,2)$ (процессов Леви с мерой Леви (2)) была построена группа сохраняющих меру преобразований. Каждое преобразование этой группы задается борелевской функцией $f:[0,T]\to\mathbb{R}$, а само преобразование устроено аналогично преобразованию (4). Именно, если случайная функция имеет в точке t скачок величины x, то преобразованная функция имеет в момент времени t скачок величины

$$\mathrm{T}^{\alpha}_{f(t)}x = \frac{x}{(1+\alpha f(t)x^{\alpha})^{1/\alpha}}, \tag{5}$$

при этом в (5) функции $x^{\alpha},\ x^{1/\alpha}$ предполагаются продолженными на отрицательную полуось нечетным образом. В [7] было показано, что данные преобразования образуют группу (относительно поточечного сложения функций) и, более того, эта группа сохраняет меру, порожденную α-устойчивым процессом Леви.

Нетрудно показать, что если (при фиксированном x) мы устремим α к нулю в формуле (5), то мы получим (4), с точностью до смены знака у функции f. В этом смысле, преобразование (4) есть естественный предел преобразований (5).

Несколько сложнее проследить, что происходит с преобразованиями (5) при $\alpha\to 2$. С одной стороны преобразование (5) корректно определено при $\alpha=2$. Именно

$$\mathrm{T}^{2}_{f(t)}x = \frac{x}{(1+2f(t)x^{2}_{\mathrm{sgn}})^{1/2}_{\mathrm{sgn}}}, \tag{6}$$

где через $x^2_{\mathrm{sgn}},\ x^{1/2}_{\mathrm{sgn}}$ обозначены нечетные продолжения функций x^2, $x^{1/2}$ соответственно. С другой же стороны, случай $\alpha=2$ соответствует винеровскому процессу, траектории которого с вероятностью 1 непрерывны, то есть отсутствуют скачки, и по этой причине формула (6) не задает вообще никакого преобразования. Тем не менее, в настоящей работе мы покажем, что между преобразованиями (6) и теоремой Камерона–Мартина имеется естественная связь. Именно, преобразования сдвига являются пределами преобразований (6). Чтобы это показать, прежде всего построим винеровский процесс как слабый предел подходящей последовательности скачкообразных процессов.

Таким образом, итогом этой работы вместе с результатами работ [7, 10–12] является явное построение семейства коммутативных групп преобразований с квазиинвариантной мерой пространств траекторий симметричных устойчивых процессов (с параметром $\alpha \in [0,2]$). Эта деформация групп непрерывным образом соединяет мультипликативную группу, действующую на пространстве траекторий гамма-процесса (при $\alpha = 0$), с группой несингулярных сдвигов (группа Камерона–Мартина), действующих на траектории винеровского процесса ($\alpha = 2$). При $\alpha = 0$ группа состоит из линейных преобразований пространства траекторий, при $\alpha = 2$ – из несингулярных аффинных сдвигов, а параметру $\alpha \in (0,2)$ отвечают группы нелинейных преоразований, сопряженные с линейными группами.

§2. Аппроксимация винеровского процесса скачкообразными

Для скачкообразных процессов Леви, следуя [7], в качестве вероятностного пространства мы возьмем пространство конфигураций $\mathcal{X}(G)$ на множестве $G = [0,T] \times \overline{\mathbb{R}}$, где $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, а в качестве вероятностной меры – пуассоновскую меру с интенсивностью

$$\Pi(dt, dx) = dt\,\frac{adx}{|x|^{1+\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Это пространство фактически является распределением в пространстве реализаций пуассоновской случайной меры. Нам будет удобнее иметь дело не с пространством конфигураций, а с пространством $\mathcal{D}$ дискретных зарядов на интервале $[0,T]$. На этом пространстве естественным образом возникает вероятностная мера P^α, как образ пуассоновской меры на $\mathcal{X}(G)$ под действием следующего отображения. Конфигурации $X \in \mathcal{X}(G)$ вида

$$X = \bigcup_j (t_j, x_j), \quad (t_j, x_j) \in G$$

мы сопоставим дискретный заряд (траекторию точечного процесса)

$$\nu = \nu(X) = \sum_j x_j \delta_{t_j} \in \mathcal{D}.$$

Отметим, что при $\alpha \in [0,1)$ случайный заряд ν имеет с вероятностью единица конечную полную вариацию, при $\alpha \geqslant 1$ это уже не так.

Представление Леви–Хинчина (1) при $\alpha \in (0,2)$ в этих обозначениях выглядит следующим образом

$$\xi^\alpha(t) = (L_2) \lim_{\varepsilon \to 0} \nu^\alpha_{1,\varepsilon}[0,t] + \nu^\alpha_2[0,t], \tag{7}$$

где

$$\nu^\alpha_{1,\varepsilon} = \sum_{\substack{(t,x)\in X \\ \varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1}} x\delta_t, \quad \nu^\alpha_2 = \sum_{\substack{(t,x)\in X \\ |x|>1}} x\delta_t.$$

Далее, для каждого $\alpha \in (0,2)$, $f \in L_2[0,T]$ и для P^α-почти всех $\nu \in \mathcal{D}$ определен линейный функционал

$$\nu \mapsto \int_0^T f(t) d\nu(t).$$

Таким образом, мы можем определить преобразование Фурье меры P^α как

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(i\int_0^T f(t)d\nu(t)\right)\right] = \exp\left(\int_0^T dt \int_{\mathbb{R}} (e^{if(t)x} - 1)\frac{a dx}{|x|^{1+\alpha}}\right)$$

$$= \exp\left(\int_0^T |f(t)|^\alpha dt \int_{\mathbb{R}} (e^{ix} - 1)\frac{a dx}{|x|^{1+\alpha}}\right). \tag{8}$$

Наша задача сейчас состоит в том, чтобы получить винеровскую меру как слабый предел мер, порожденных процессами, определенными на пространстве $\mathcal{D}$. Это можно сделать различными способами. Простейший способ – это положить в (8)

$$a = \frac{-1}{\Gamma(\frac{-\alpha}{2})}$$

и устремить $\alpha \uparrow 2$. Покажем, что в этом случае мера, порожденная процессом ξ^α, будет слабо (в пространстве Скорохода) сходиться к винеровской мере. Для того, чтобы доказать сходимость преобразований Фурье, проще всего заметить, что интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{ix} - 1)\frac{a dx}{|x|^{1+\alpha}}$$

в правой части (8) есть значение обобщенной функции

$$a|x|^{-1-\alpha} = \frac{-|x|^{-1-\alpha}}{\Gamma(\frac{-\alpha}{2})} \tag{9}$$

на функции e^{ix}. Известно ([14, с. 86]), что

$$\lim_{\alpha\to 2-0} \frac{-|x|^{-1-\alpha}}{\Gamma(\frac{-\alpha}{2})} = \frac{\delta^{(2)}}{2},$$

и, значит, предел правой части (8) есть

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T |f(t)|^2 dt\right), \tag{10}$$

что совпадает с преобразованием Фурье винеровской меры.

Из сходимости преобразований Фурье немедленно вытекает сходимость конечномерных распределений, а относительная компактность легко следует из теоремы 15.6 [13].

Другой способ получить винеровскую меру (который и будет для нас основным) следующий. Воспользуемся тем, что мера P^α корректно определена при всех $\alpha > 0$. Именно, рассмотрим на пространстве конфигураций $\mathcal{X}(G)$ пуассоновскую меру $\mathcal{P}^2$ с интенсивностью

$$\Pi(dt, dx) = dt\,\frac{dx}{|x|^3}, \tag{11}$$

и отвечающую ей меру P^2 на пространстве $\mathcal{D}$ (параметр a выберем равным 1).

Выберем еще два числа $0 < a < b$, полагая

$$a = \frac{1}{2(\sqrt{e}-1)}, \quad b = \frac{\sqrt{e}}{2(\sqrt{e}-1)}.$$

Тогда

$$b - a = \frac{1}{2}, \quad \log\frac{b}{a} = \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Далее, на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}(G), \mathcal{P}^2)$ для каждого $\varepsilon > 0$ определим случайный (конечный) заряд ν_ε на $[0, T]$ (случайный элемент $\mathcal{D}$), полагая

$$\nu_\varepsilon(X) = \sum_{(t,x)\in X} x\delta_t \cdot \mathbf{1}_{[\varepsilon a, \varepsilon b]}(|x|).$$

Покажем, что при $\varepsilon \to 0$ семейство случайных процессов

$$\eta_\varepsilon(t) = \nu_\varepsilon[0,t], \quad t \in [0,T], \tag{13}$$

слабо сходится (в пространстве Скорохода) к винеровскому процессу. Для этого, как и выше, сначала мы покажем сходимость соответствующих преобразований Фурье.

Для $f \in L_2[0,T]$ имеем

$$\mathbf{E}\Big[\exp\big(i\int\limits_0^T f(t)d\nu_\varepsilon(t)\big)\Big]$$

$$= \exp\Big(\int\limits_0^T dt \int\limits_{\varepsilon a \leqslant |x| \leqslant \varepsilon b} (e^{if(t)x} - 1)\frac{dx}{|x|^3}\Big) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_0^T f^2(t)dt\Big). \tag{14}$$

Последнее соотношение следует из того, что для произвольной дважды непрерывно дифференцируемой ограниченной функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в силу (12) мы имеем

$$\int\limits_{\varepsilon a \leqslant |x| \leqslant \varepsilon b} (g(x) - g(0))\frac{dx}{|x|^3} = \int\limits_{\varepsilon a \leqslant |x| \leqslant \varepsilon b} (g(x) - g(0) - xg'(0))\frac{dx}{|x|^3}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon a \leqslant |x| \leqslant \varepsilon b} g^{(2)}(\theta x)\frac{dx}{|x|} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} g^{(2)}(0)\log\frac{b}{a} = \frac{g^{(2)}(0)}{2},$$

где $\theta \in (0,1)$.

Из (14) вытекает сходимость конечномерных распределений, а относительная компактность следует из теоремы 15.6 [13].

§3. Сдвиги, как предельный случай преобразований скачков

Для $\alpha > 0$ обозначим через T_t^α, $t \in \mathbb{R}$, преобразование расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}}$, которое задается формулой

$$\mathrm{T}_t^\alpha x = \frac{x}{(1 + \alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}},$$

Напомним, что в последней формуле мы предполагаем функции x^α, $x^{1/\alpha}$ продолженными на отрицательную полуось нечетным образом, поэтому при $\alpha = 2$ мы будем использовать другие обозначения $x^2_{\rm sgn}$, $x^{1/2}_{\rm sgn}$. Таким образом,

$$\mathrm{T}^2_t x = \frac{x}{(1+2tx^2_{\rm sgn})^{1/2}_{\rm sgn}}.$$

Важно отметить, что при всех $\alpha > 0$, преобразование T^α_t есть суперпозиция трех преобразований

$$\mathrm{T}^\alpha_t(x) = U^{-1}_\alpha(U_\alpha(x)+t), \tag{15}$$

именно, преобразования $U_\alpha(x) = (\alpha x^\alpha)^{-1}$, переводящего меру Λ_α в меру Лебега (с точностью до постоянного множителя), преобразования сдвига на t и обратного преобразования U^{-1}_α, переводящего меру Лебега в меру Λ_α. Отсюда немедленно следует, что во-первых семейство преобразований T^α_t образует группу, то есть для любых t, s выполнено

$$\mathrm{T}^\alpha_{t+s} = \mathrm{T}^\alpha_t \circ \mathrm{T}^\alpha_s, \tag{16}$$

а во-вторых – эта группа является группой сохраняющих меру Λ_α преобразований, то есть для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\Lambda_\alpha(\mathrm{T}^\alpha_t)^{-1} = \Lambda_\alpha. \tag{17}$$

С использованием группы T^α_t для всех $\alpha > 0$ в работе [7] была построена группа сохраняющих меру P^α преобразований пространства дискретных зарядов $\mathcal{D}$. Именно, для произвольной борелевской функции $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ определялось преобразование $\Phi^\alpha_f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ при помощи формулы

$$\Phi^\alpha_f\left(\sum_{(t,x)\in X} x\delta_t\right) = \sum_{(t,x)\in X} \mathrm{T}^\alpha_{f(t)} x\delta_t. \tag{18}$$

Из (16) и (17) вытекает, что для всех $\alpha > 0$ (в частности и для $\alpha = 2$) семейство Φ^α_f образует аддитивную группу относительно поточечного сложения функций, именно для любых борелевских функций f, g выполнено

$$\Phi_{f+g} = \Phi_f \circ \Phi_g,$$

и эта группа является группой сохраняющих меру P^α преобразований.

Далее, в работе [7] для $\alpha \in (0,2)$ с использованием представления Леви–Хинчина (7) строилась, порожденная группой Φ^α_f, группа

Ψ_f^α преобразований траекторий симметричных устойчивых процессов. Чтобы описать эту группу, обозначим через $\Xi : \mathcal{D} \to \mathrm{D}[0,T]$ отображение, сопоставляющее (по формуле (7)) дискретному заряду соответствующую траекторию случайного процесса. Отметим очевидный факт, что это отображение инъективно: различные дискретные заряды порождают различные траектории процесса, так как соответствие между зарядами и траекториями имеет простой смысл. Именно, если у дискретного заряда в точке t была нагрузка величины x, то соответствующая траектория имеет в момент t скачок величины x. Положим $\Psi_f^\alpha = \Xi \circ \Phi_f^\alpha \circ \Xi^{-1}$. Как легко видеть, отображение Ψ_f^α есть преобразование скачков случайной функции. Именно, если у самой функции в точке t был скачок величины x, то у преобразованной функции в точке t имеется скачок величины $T_{f(t)}^\alpha x$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha = 2$. В этом случае определена группа Ψ_f^2 преобразований $\mathcal{D}$, сохраняющая меру P^2, но она не порождает никакого преобразования пространства Скорохода, так как в этом случае не существует предела в правой части (7) и, соответственно, процесс ξ^α не определен при $\alpha = 2$. Основная идея дальнейшего состоит в том, что в качестве процесса, скачки которого мы предполагаем преобразовывать, мы используем процесс η_ε, заданный формулой (13), который, как мы уже показали, слабо сходится к винеровскому процессу.

Для функции $f \in L_2[0,T]$ обозначим через f_ε функцию вида

$$f_\varepsilon(t) = f(t) \cdot \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{4b^2\varepsilon}]}(|f(x)|) + \frac{1}{4b^2\varepsilon}\mathrm{sgn}(f(t)) \cdot \mathbf{1}_{(\frac{1}{4b^2\varepsilon},\infty)}(|f(x)|) \qquad (19)$$

(напомним, что число b задается (12)). Ясно, что $(L_2)\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} f_\varepsilon = f$, и для ограниченных функций f функция f_ε совпадает с f для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

По аналогии с (18) на каждый конечный заряд ν_ε подействуем преобразованием $\Phi^2_{f_\varepsilon \varepsilon^{-1}}$ (заметим, что в отличие от (18) вместо f_ε мы используем $f_\varepsilon \varepsilon^{-1}$, это необходимая перенормировка) Именно, для конечного заряда ν_ε вида

$$\nu_\varepsilon(X) = \sum_{(t,x)\in X} x\delta_t \cdot \mathbf{1}_{[\varepsilon a,\varepsilon b]}(|x|).$$

построим преобразованный конечный заряд

$$\Phi^2_{f_\varepsilon \varepsilon^{-1}} \nu_\varepsilon = \Phi^2_{f_\varepsilon \varepsilon^{-1}} \Bigg(\sum_{(t,x)\in X} x\delta_t \cdot \mathbf{1}_{[\varepsilon a, \varepsilon b]}(|x|) \Bigg) = \sum_{(t,x)\in X} \mathrm{T}^2_{f_\varepsilon(t)\varepsilon^{-1}} x\delta_t \cdot \mathbf{1}_{[\varepsilon a, \varepsilon b]}(|x|). \tag{20}$$

Далее, как и выше, используя преобразованный конечный заряд $\Phi^2_{f_\varepsilon \varepsilon^{-1}} \nu_\varepsilon$, построим преобразованную траекторию $\Psi^2_{f_\varepsilon \varepsilon^{-1}} \eta_\varepsilon$ процесса η_ε, полагая

$$(\Psi^2_{f_\varepsilon \varepsilon^{-1}} \eta_\varepsilon)(t) = (\Phi^2_{f_\varepsilon \varepsilon^{-1}} \nu_\varepsilon)[0, t]. \tag{21}$$

Соответствующее преобразование снова имеет смысл преобразования скачков случайной функции. Именно, если функция η_ε имеет в точке t скачок величины x то преобразованная функция $\Psi^2_{f_\varepsilon \varepsilon^{-1}} \eta_\varepsilon$ имеет в точке t скачок величины $\mathrm{T}^2_{f_\varepsilon(t)\varepsilon^{-1}} x$.

Следующим шагом мы покажем, что при малых ε преобразование $\Psi^2_{f_\varepsilon \varepsilon^{-1}}$ мало отличается от сдвига функции η_ε на функцию $-F$, где

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds.$$

Последнее утверждение означает, что в качестве предельных преобразований мы получаем множество всех несингулярных сдвигов винеровской меры (напомним, что f была произвольной функцией из $L_2[0, T]$).

Обозначим через $\Delta_f(t)$ разность между преобразованной функцией и исходной

$$\Delta_f(t) = (\Psi^2_{f_\varepsilon \varepsilon^{-1}} \eta_\varepsilon)(t) - \eta_\varepsilon(t).$$

Теорема 1. *При* $\varepsilon \to 0$

$$\sup_{t\in[0,T]} |\Delta_f(t) + F(t)| \to 0 \tag{22}$$

по вероятности.

Доказательство. Покажем сначала, что сходимость $|\Delta_f(t)+F(t)| \to 0$ имеет место для любого фиксированного $t \in [0, T]$.

В силу (6), (13) и (20) имеем

$$\Delta_f(t) = \sum_{\substack{0\leqslant s\leqslant t\\ a\varepsilon\leqslant|x|\leqslant b\varepsilon}} \left(\left(1+2\frac{f_\varepsilon(s)}{\varepsilon}x^2_{\mathrm{sgn}}\right)^{-1/2}_{\mathrm{sgn}} - 1\right)x$$

$$= -\sum_{\substack{0\leqslant s\leqslant t\\ a\varepsilon\leqslant|x|\leqslant b\varepsilon}} x\frac{f_\varepsilon(s)}{\varepsilon}x^2_{\mathrm{sgn}} + r_\varepsilon(t) = \frac{-1}{\varepsilon}\sum_{\substack{0\leqslant s\leqslant t\\ a\varepsilon\leqslant|x|\leqslant b\varepsilon}} f_\varepsilon(s)|x|^3 + r_\varepsilon(t). \qquad (23)$$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию первого слагаемого в правой части (23). Имеем

$$\mathbf{E}\left(\frac{-1}{\varepsilon}\sum_{\substack{0\leqslant s\leqslant t\\ a\varepsilon\leqslant|x|\leqslant b\varepsilon}} f_\varepsilon(s)|x|^3\right) = \frac{-1}{\varepsilon}\int\limits_0^t f_\varepsilon(s)ds \int\limits_{a\varepsilon\leqslant|x|\leqslant b\varepsilon} |x|^3\frac{dx}{|x|^3}$$

$$= \frac{-2}{\varepsilon}\int\limits_0^t f_\varepsilon(s)ds\cdot\varepsilon(b-a) = -\int\limits_0^t f_\varepsilon(s)ds \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -F(t).$$

Далее,

$$\mathbf{D}\left(\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{0\leqslant s\leqslant t\\ a\varepsilon\leqslant|x|\leqslant b\varepsilon}} f_\varepsilon(s)|x|^3\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t f^2_\varepsilon(s)ds \int\limits_{a\varepsilon\leqslant|x|\leqslant b\varepsilon} |x|^6\frac{dx}{|x|^3} = O(\varepsilon^2).$$

Оценим теперь $\mathbf{E}(r_\varepsilon(t))^2$. Заметим сначала, что в силу (19) при $a\varepsilon\leqslant |x|\leqslant b\varepsilon$ мы имеем

$$2\frac{|f_\varepsilon(s)|}{\varepsilon}x^2 \leqslant \frac{1}{2}. \qquad (24)$$

Воспользуемся теперь тем, что при $|y|\leqslant \frac{1}{2}$ справедливо неравенство $|(1+y)^{-1/2}-1+\frac{y}{2}|\leqslant Cy^2$. (Всюду далее через C будем обозначать константы, одна и та же буква C может обозначать разные константы). Используя (24), получим оценку

$$\mathbf{E}(r_\varepsilon(t))^2 \leqslant \frac{C}{\varepsilon^4}\int\limits_0^T (f_\varepsilon(t))^4\,dt \int\limits_{a\varepsilon\leqslant|x|\leqslant b\varepsilon} |x|^{10}\frac{dx}{|x|^3} = C\varepsilon^4\int\limits_0^T (f_\varepsilon(t))^4 dt.$$

Заметим теперь, что в силу (19) для всех $t \in [0,T]$ справедливо неравенство $|f_\varepsilon(t)\varepsilon| \leqslant \frac{1}{4b^2}$ и, таким образом, мы получаем

$$\mathbf{E}(r_\varepsilon(t))^2 \leqslant C\varepsilon^2 \int\limits_0^T (f_\varepsilon(t))^2 dt \leqslant C\varepsilon^2.$$

Для доказательства (22) заметим, что процесс $\Delta_f(t) - \mathbf{E}\Delta_f(t)$ является мартингалом. Выберем $\delta > 0$ и по нему найдем $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ выполнялось неравенство

$$\sup_{t\in[0,T]} |\mathbf{E}\Delta_f(t) + F(t)| < \frac{\delta}{2}.$$

В силу неравенства Колмогорова, мы имеем

$$\mathbf{P}\Bigl(\sup_{t\in[0,T]} |\Delta_f(t) + F(t)| > \delta\Bigr) \leqslant \mathbf{P}\Bigl(\sup_{t\in[0,T]} |\Delta_f(t) - \mathbf{E}\Delta_f(t)| > \frac{\delta}{2}\Bigr)$$

$$\leqslant \frac{4}{\delta^2}\mathbf{E}\bigl(\Delta_f(T) - \mathbf{E}\Delta_f(T)\bigr)^2.$$

Как мы уже показали, последнее выражение стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. □

Литература

1. Y. Takahashi, *Absolute continuity of Poisson random fields.* — Publ. Res. Inst. Math. Sci. **26** (1990), 629–649.
2. J. Kerstan, K. Mattes, J. Mecke, *Infinite Divisible Point Processes.* Akademie-Verlag, Berlin, 1978.
3. W. Linde. *Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces.* Teubner, Leipzig, 1983.
4. А. В. Скороход, *О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам.* I. — Теория вероятн. и ее примен. **II** (1957), 629–649.
5. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов.* Изд-во Киевского ун-та, 1961.
6. А. В. Скороход, *Стохастические процессы с независимыми приращениями.* Наука, Москва, 1986.
7. Н. В. Смородина, *Инвариантные и квазиинвариантные преобразования мер, отвечающих устойчивым процессам с независимыми приращениями* Зап. научн. семин. ПОМИ **339** (2006), 135–150.
8. J. F. C. Kingman, *Poisson Processes.* Oxford, 1993.
9. I. M. Gel'fand, M. I. Graev, A. M. Vershik, *Representations of the group of diffeomorphisms.* — Russ. Math. Surv. **30** (1975), 3–50.

10. N. Tsilevich, A. Vershik, M. Yor, *An infinite-dimensional analogue of the Lebesgue measure and distinguished properties of the gamma process.* — J. Funct. Anal. **185**, No. 1 (2001), 274–296.
11. A. Vershik, N. Tsilevich, *Quasi-invariance of the gamma process and multiplicative properties of the Poisson–Dirichlet measures.* — C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **329** (1999), 163–168.
12. А. М. Вершик, *Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве?* — Труды МИАН **259** (2007), 256–281.
13. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Наука, Москва, 1977.
14. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* Физматгиз, Москва, 1958.
15. Х.-С. Го, *Сходимость вероятностных мер.* Мир, Москва, 1977.
16. М. А. Лифшиц, *Метод расслоений для процессов с независимыми приращениями.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **130** (1983), 109–121.

Vershik A. M., Smorodina N. V. Nonsingular transformations of the symmetric Lévy processes.

In this paper we consider the group of transformations of the space of trajectories of the symmetric α-stable Lévy laws with constant of stability $\alpha \in [0;2)$. For $\alpha = 0$ the true analog of the stable Lévy process (so called 0-stable process) is the γ-process, whose measure is quasi-invariant under the action of the group of multiplicators $\mathcal{M} \equiv \{M_a : a \geqslant 0; \lg a \in L^1\}$ — the action of M_a on trajectories $\omega(.)$ is $(M_a\omega)(t) = a(t)\omega(t)$. For each $\alpha < 2$ an appropriate conjugacy takes the group $\mathcal{M}$ to a group $\mathcal{M}_\alpha$ of non-linear transformations of the trajectories and the law of the corresponding stable process is quasi-invariant under those groups. We prove that when $\alpha = 2$, the appropriate changing of the coordinates reduces the group of symmetries to the Cameron–Martin group of nonsingular translations of the trajectories of Wiener process.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Поступило 8 октября 2012 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: smorodin@ns2691.spb.edu