Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 408, 2012 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ МОСТОВ ГАУССОВСКИХ ДИФФУЗИЙ

Диффузионные процессы и уравнения для переходных вероятностей были рассмотрены А. Н. Колмогоровым [1]. Вывод уравнения для преобразования Лапласа распределения неотрицательного интегрального функционала от процесса броуновского движения принадлежит М. Кацу [2], а для диффузионных процессов Е. Б. Дынкину [3].

§1. Гауссовская диффузия

Пусть $W(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс броуновского движения. Рассмотрим гауссовский процесс

$$X(t) := A(t) + B(t) \int_0^t b(v)\, dW(v), \qquad t \geqslant 0,$$

где $A(t), B(t)$ – дифференцируемые функции, $b(t)$ – непрерывная функция, $b(0) = 1$, и $B(t) > 0$, $t \geqslant 0$.

Процесс $X(t)$, $t \geqslant 0$, имеет среднее $A(t)$ и ковариацию

$$\mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = B(s)B(t) \int_0^s b^2(v)\, dv, \quad 0 \leqslant s \leqslant t,$$

и может быть представлен в виде

$$X(t) = A(t) + B(t)\widetilde{W}\biggl(\int_0^t b^2(v)\, dv\biggr),$$

где $\widetilde{W}$ – некоторый процесс броуновского движения, $\widetilde{W}(0) = 0$.

Ключевые слова: мост гауссовской диффузии, распределение, интегральный функционал.

Настоящая работа поддержана грантом НШ 1216.2012.1 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Стохастический дифференциал процесса X имеет вид

$$\begin{aligned} dX(t) &= A'(t)\,dt + \int_0^t b(v)\,dW(v)\,B'(t)\,dt + B(t)b(t)\,dW(t) \\ &= \left\{ \frac{B'(t)}{B(t)}\big(X(t) - A(t)\big) + A'(t) \right\} dt + B(t)b(t)\,dW(t). \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Следовательно, процесс X является гауссовской диффузией с начальным значением $x = A(0)$, с коэффициентом диффузии $\sigma(t,z) = B(t)b(t)$ и с коэффициентом сноса

$$\mu(t,z) = \frac{B'(t)}{B(t)}\big(z - A(t)\big) + A'(t).$$

Гауссовская диффузия X будет однородной, если

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A'(t)}{A(t)} = -\theta, \qquad B(t)b(t) = \sigma,$$

где $\gamma \in \mathbf{R}$ и $\sigma > 0$ – некоторые константы. Очевидно, что при этом

$$A(t) = xe^{-\theta t}, \quad B(t) = \sigma e^{-\theta t}, \quad b(t) = e^{\theta t}.$$

Такой процесс называется *процессом Орнштейна–Уленбека.* Обозначим его $U(t)$, $t \geqslant 0$.

Мостом из x в z случайного процесса $X(s)$, $s \in [0,t]$, с начальным значением $X(0) = x$ называется такой процесс $X_{x,t,z}(s)$, $s \in [0,t]$, конечномерные распределения которого совпадают с условными конечномерными распределениями процесса X при условии $X(t) = z$, т.е. для любых $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(X_{x,t,z}(t_1) < x_1,\, X_{x,t,z}(t_2) < x_2,\, \ldots, X_{x,t,z}(t_n) < x_n) \\ &\qquad = \mathbf{P}(X(t_1) < x_1,\, X(t_2) < x_2,\, \ldots, X(t_n) < x_n | X(t) = z). \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Для гауссовских процессов мост может быть явно выражен через исходный процесс. Справедлив следующий известный результат.

Предложение 1.1. *При любом фиксированном значении t для моста гауссовского процесса X справедливо представление*

$$X_{x,t,z}(s) = X(s) - \frac{\mathrm{Cov}(X(s), X(t))}{\mathrm{Cov}(X(t), X(t))}(X(t) - z), \quad s \in [0,t]. \qquad (1.3)$$

Приведем вывод этого утверждения лишь для гауссовской диффузии, используя подход, предложенный в монографии [4] для броуновского моста.

В этом случае определение моста $X_{x,t,z}(s)$, $s \in [0,t]$, эквивалентно тому, что для любого ограниченного непрерывного функционала $\wp(\cdot)$ на пространстве непрерывных функций $C[0,t]$ справедливо равенство

$$\mathbf{E}\wp(X_{x,t,z}(s), 0 \leqslant s \leqslant t) = \mathbf{E}_x\{\wp(X(s), 0 \leqslant s \leqslant t)|X(t) = z\}. \tag{1.4}$$

Обозначим

$$r(s) := B(s)\int_0^s b^2(v)\,dv.$$

Положим

$$X_{x,t,z}(s) := X(s) - \frac{r(s)}{r(t)}(X(t) - z), \quad s \in [0,t], \tag{1.5}$$

и докажем, что этот процесс является мостом гауссовской диффузии X, т.е., что для него выполняется (1.4).

Важным свойством является то, что процесс $X_{x,t,z}(s)$, $s \in [0,t]$, не зависит от величины $X(t)$. Это утверждение верно, поскольку для любого $s \in [0,t]$

$$\mathrm{Cov}(X_{x,t,z}(s), X(t)) = \mathrm{Cov}(X(s), X(t)) - \tfrac{\mathrm{Cov}(X(s),X(t))}{\mathrm{Cov}(X(t),X(t))}\mathrm{Cov}(X(t), X(t)) = 0,$$

т.е. величина $X(t)$ некоррелирована с каждой из величин $X_{x,t,z}(s)$, и все величины являются гауссовскими. В силу независимости процесса $X_{x,t,z}(s)$, $s \in [0,t]$, от величины $X(t)$ и непрерывности функционала $\wp$, имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\wp(X_{x,t,z}(s), 0 \leqslant s \leqslant t) &= \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{\mathbf{E}\{\wp(X_{x,t,z}(s), 0 \leqslant s \leqslant t)\mathbb{1}_{[z,z+\delta)}(X(t))\}}{\mathbf{P}(X(t) \in [z, z+\delta))} \\
&= \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{\mathbf{E}\Big\{\wp\Big(X(s) + \dfrac{r(s)}{r(t)}(X(t) - z), 0 \leqslant s \leqslant t\Big)\mathbb{1}_{[z,z+\delta)}(X(t))\Big\}}{\mathbf{P}(X(t) \in [z, z+\delta))} \\
&= \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{\mathbf{E}\Big\{\wp\Big(X(s), 0 \leqslant s \leqslant t\Big)\mathbb{1}_{[z,z+\delta)}(X(t))\Big\}}{\mathbf{P}(X(t) \in [z, z+\delta))} \\
&= \mathbf{E}\{\wp(X(s), 0 \leqslant s \leqslant t)|X(t) = z\}.
\end{aligned}$$

Это доказывает (1.4).

§2. Распределение интегральных функционалов

Рассмотрим метод вычисления распределения интегрального функционала $\int_0^t f(X_{x,t,z}(s))\,ds$ от моста гауссовской диффузии. Наш подход основан на вычислении преобразования Лапласа распределения интегрального функционала, то есть на вычислении функции

$$h(t,z) := \mathbf{E}\exp\Big(-\gamma\int_0^t f(v, X_{x,t,z}(v))\,dv\Big), \quad \gamma>0. \tag{2.1}$$

Предположим, что $f(t,x) = f_+(t,x) + f_0(t,x)$, $x \in \mathbf{R}$, где $f_+ \geqslant 0$, а функция f_0 ограничена. Пусть $f(t,x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, для производных которой справедливы оценки $\Big|\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\Big| \leqslant C(1+|x|^m)$ и $\Big|\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x)\Big| \leqslant C(1+|x|^m)$ при некоторых $C>0$, $m\geqslant 0$.

Теорема 2.1. *Пусть f удовлетворяет приведенным выше условиям. Тогда функция $h(t,z)$ является единственным решением задачи*

$$\frac{\partial}{\partial t}h(t,z) = \frac{1}{2}B^2(t)b^2(t)\frac{\partial^2}{\partial z^2}h(t,z) + \Big((A(t)-z)\frac{r'(t)}{r(t)} - A'(t)\Big)\frac{\partial}{\partial z}h(t,z)$$
$$-\gamma f(t,z)h(t,z), \quad (t,z)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}, \tag{2.3}$$
$$h(0,z) = 1. \tag{2.4}$$

Замечание 2.1. Для процесса Орнштейна–Уленбека уравнение (2.3) принимает следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial t}h(t,z) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}h(t,z)$$
$$+\frac{\theta\big(x - z\,\mathrm{ch}(\gamma t)\big)}{\mathrm{sh}(\gamma t)}\frac{\partial}{\partial z}h(t,z) - \gamma f(t,z)h(t,z). \tag{2.5}$$

Доказательство теоремы 2.1. Начальное условие (2.4) легко проверяется посредством предельного перехода под знаком математического ожидания в (2.1) при $t\downarrow 0$.

Обозначим

$$V(t,y,z) := \exp\bigg(-\int_0^t f\Big(v, X(v) - \frac{r(v)}{r(t)}(y-z)\Big)\,dv\bigg). \tag{2.6}$$

Ясно, что $h(t,z)=\mathbf{E}V(t,X(t),z)$. Для производной

$$\frac{\partial}{\partial y}V(t,y,z)=\exp\biggl(-\int\limits_0^t f\Bigl(v,X(v)-\frac{r(v)}{r(t)}(y-z)\Bigr)\,dv\biggr)$$
$$\times\int\limits_0^t \frac{r(v)}{r(t)}\frac{\partial}{\partial x}f\Bigl(v,X(v)-\frac{r(v)}{r(t)}(y-z)\Bigr)\,dv \tag{2.7}$$

справедлива оценка

$$\mathbf{E}\biggl(\frac{\partial}{\partial y}V(t,X(t),z)\biggr)^2$$
$$\leqslant C^2e^{C_1t}\mathbf{E}\biggl(\int\limits_0^t\frac{r(v)}{r(t)}\Bigl(1+\Bigl|X(v)-\frac{r(v)}{r(t)}(X(t)-z)\Bigr|^m\Bigr)dv\biggr)^2$$
$$\leqslant C_{m,z}(t), \tag{2.8}$$

где $C_{m,z}(t)$, $t\geqslant 0$, – непрерывная функция. Аналогичная оценка справедлива и для второй производной.

Заметим, что переменные y и z входят в V антисимметричным образом, поэтому $\dfrac{\partial}{\partial y}V=-\dfrac{\partial}{\partial z}V$, а $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}V=\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}V$. Тогда легко убедиться посредством дифференцирования правой части (2.6) по z дважды под знаком математического ожидания, что производные $\dfrac{\partial}{\partial z}h(t,z)$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}h(t,z)$ существуют и

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}h(t,z)&=-\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial y}V(t,X(t),z),\\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}h(t,z)&=\mathbf{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}V(t,X(t),z).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Вычислим стохастический дифференциал $dV(t,X(t),z)$ по формуле Ито.

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}V(t,y,z)=-\gamma f(t,X(t)-y+z)V(t,x,z)-\frac{(y-z)r'(t)}{r(t)}\frac{\partial}{\partial y}V(t,y,z),$$

поскольку переменная t входит в правую часть (2.6) как верхний предел интегрирования и через дробь $\dfrac{x-z}{r(t)}$ внутри интеграла.

Тогда, применяя формулу Ито, получаем

$$dV(t,X(t),z)=-\gamma f(t,z)V(t,X(t),z)\,dt-\frac{(X(t)-z)r'(t)}{r(t)}\frac{\partial}{\partial y}V(t,X(t),z)dt$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}V(t,X(t),z)\,dX(t)+\frac{1}{2}B^2(t)b^2(t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}V(t,X(t),z)\,dt.$$

В интегральном варианте это имеет вид

$$V(t,X(t),z)-1=-\gamma f(t,z)\int_0^t V(s,X(s),z)\,ds$$

$$+\int_0^t\left(\frac{(z-X(s))r'(s)}{r(s)}+\frac{B'(s)}{B(s)}\big(X(s)-A(s)\big)+A'(s)\right)\frac{\partial}{\partial y}V(s,X(s),z)\,ds$$

$$+\int_0^t B^2(s)b^2(s)\frac{\partial}{\partial y}V(s,X(s),z)\,dW(s)$$

$$+\int_0^t \frac{1}{2}B^2(s)b^2(s)\frac{\partial^2}{\partial y^2}V(s,X(s),z)\,ds. \tag{2.10}$$

В силу независимости при каждом фиксированном s величины $X(s)$ от процесса $X(v)-\dfrac{r(v)}{r(z)}(X(s)-z)=X_{x,s,z}(v)$, $v\in[0,s]$, (см. рассуждения после формулы (1.5)), имеем, что $X(s)$ при каждом s не зависит от семейства величин $\dfrac{\partial}{\partial y}V(s,X(s),z)$, $z\in\mathbf{R}$, которые, согласно (2.7), полностью определяется по траекториям процесса $X_{x,s,z}(v)$, $v\in[0,s]$. В силу оценки (2.8), математическое ожидание стохастического интеграла в (2.10) равно нулю. Поэтому, вычисляя от обеих частей (2.10) математическое ожидание и используя очевидный факт $\mathbf{E}X(s)=A(s)$, получаем

$$\mathbf{E}V(t,X(t),z)-1=-\gamma f(t,z)\int_0^t \mathbf{E}V(s,X(s),z)\,ds$$
$$+\int_0^t\Big(\frac{(z-A(s))r'(s)}{r(s)}+A'(s)\Big)\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial y}V(s,X(s),z)\,ds$$
$$+\int_0^t \frac{1}{2}B^2(s)b^2(s)\mathbf{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}V(s,X(s),z)\,ds.$$

Отсюда и из (2.9) следует, что функция $h(t,z)$ является решением задачи (2.3), (2.4). Теорема доказана. $\square$

Задачу (2.3), (2.4) можно переписать в другом виде, если вместо функции $h(t,z)$ рассмотреть функцию

$$g(t,z):=\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_0^t f(s,X(s))\,ds\Big)\mathbb{1}_{(-\infty,z)}(X(t))\Big\}.$$

В силу (1.4), справедливо следующее равенство

$$g(t,z)=h(t,z)\frac{d}{dz}\mathbf{P}\big(X(t)<z\big). \tag{2.11}$$

Поскольку случайная величина $X(t)$ является гауссовской со средним $A(t)$ и дисперсией $D(t)=B(t)r(t)$, то

$$g(t,z)=h(t,z)\frac{1}{\sqrt{2\pi D(t)}}\exp\Big(-\frac{(z-A(t))^2}{2D(t)}\Big). \tag{2.12}$$

Делая в задаче (2.3), (2.4) замену функции h на g, мы придем к следующему результату.

Теорема 2.2. *В условиях теоремы* 2.1 *функция* $g(t,z)$ *является решением задачи*

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t,z)=\frac{1}{2}B^2(t)b^2(t)\frac{\partial^2}{\partial z^2}g(t,z)-\frac{\partial}{\partial z}\big(\mu(t,z)g(t,z)\big)$$
$$-f(t,z)g(t,z),\quad (t,z)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}, \tag{2.13}$$

$$g(0,z)=\delta_x(z), \tag{2.14}$$

где $\delta_x(z)$ – дельта-функция Дирака.

Замечание 2.2. Уравнение (2.13) является аналогом прямого уравнения Колмогорова при наличии интегрального функционала. Действительно, в уравнении (2.13) стоит оператор, сопряженный к оператору диффузии X.

Замечание 2.3. Для процесса Орнштейна–Уленбека уравнение (2.13) принимает следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t,z) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}g(t,z) + \theta z\frac{\partial}{\partial z}g(t,z) - (\gamma f(t,z) - \theta)g(t,z). \tag{2.15}$$

Доказательство теоремы 2.2. Обозначим

$$\varphi(t,z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t)}}\exp\Big(-\frac{(z-A(t))^2}{2D(t)}\Big).$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}g = \varphi\frac{\partial}{\partial t}h + g\Big(-\frac{D'(t)}{2D(t)} + \frac{(z-A(t))A'(t)}{D(t)} + \frac{(z-A(t))^2D'(t)}{2D^2(t)}\Big),$$
$$\frac{\partial}{\partial z}g = \varphi\frac{\partial}{\partial z}h - g\frac{(z-A(t))}{D(t)},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}g = \varphi\frac{\partial^2}{\partial z^2}h - \frac{2(z-A(t))}{D(t)}\frac{\partial}{\partial z}g - \Big(\frac{(z-A(t))^2}{D^2(t)} + \frac{1}{D(t)}\Big)g.$$

Выражая отсюда производные $\frac{\partial}{\partial t}h$, $\frac{\partial}{\partial z}h$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}h$ и подставляя их в уравнение (2.3), получаем уравнение (2.13). Теорема доказана. □

§3. Интеграл от квадрата процесса Орнштейна–Уленбека

Рассмотрим функционал

$$\int_0^t U^2_{x,t,z}(v))\,dv,$$

где $U_{x,t,z}(s)$, $s \in [0,t]$, – мост процесса Орнштейна–Уленбека. Нас интересует преобразование Лапласа распределения этого функционала, т.е. функция $h(t,z)$, $(t,z) \in (0,\infty)\times\mathbf{R}$, которая является единственным решением уравнения (2.5) при $f(t,z) = z^2$ с граничным условием $h(0,z) = 1$. Даже для такой простой функции f решение имеет очень сложный вид. Оно содержится в справочнике [5]. Метод вычисления таких выражений основан на использовании преобразования Лапласа по переменной t. Мы приведем решение и затем проверим, что оно удовлетворяет указанной задаче. Функция $h(t,z)$ имеет следующее выражение

$$h(t,z)=\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\gamma\int\limits_0^t U^2(v))\,dv\Big)\Big|U(t)=z\Big\}$$

$$=\frac{\sqrt{\widetilde\gamma\,\mathrm{sh}(t\theta)}}{\sqrt{\mathrm{sh}(t\widetilde\gamma\theta)}}\exp\Big(\theta\frac{(x^2+z^2)\,\mathrm{ch}(t\theta)-2xz}{2\sigma^2\,\mathrm{sh}(t\theta)}-\widetilde\gamma\theta\frac{(x^2+z^2)\,\mathrm{ch}(t\widetilde\gamma\theta)-2xz}{2\sigma^2\,\mathrm{sh}(t\widetilde\gamma\theta)}\Big),$$

где $\widetilde\gamma=\sqrt{1+2\gamma\sigma^2/\theta^2}$.

Несложно убедиться, что $h(t,z)\to 0$ при $t\downarrow 0$. Далее преобразуем уравнение (2.5) к более простому уравнению (2.15). Для этого сделаем замену (2.11). Заметим, что переходная плотность процесса Орнштейна–Уленбека имеет вид

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}\big(U(t)<z\big)=\frac{\sqrt{\theta}}{(\pi\sigma^2(1-e^{-2\theta t}))^{1/2}}\exp\Big(-\frac{\theta(z-xe^{-\theta t})^2}{\sigma^2(1-e^{-2\theta t})}\Big)$$

$$=\frac{\sqrt{\theta}e^{t\theta/2+(x^2-z^2)\theta/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi\,\mathrm{sh}(t\theta)}}\exp\Big(-\theta\frac{(x^2+z^2)\,\mathrm{ch}(t\theta)-2xz}{2\sigma^2\,\mathrm{sh}(t\theta)}\Big).$$

Согласно теореме 2.2, функция $g(t,z)$ является решением уравнения (2.15) при $f(t,z)=z^2$. Теперь преобразуем это уравнение с помощью замены

$$g(t,z)=q(t,z)\exp\Big(\frac{\theta t}{2}+\frac{\theta(x^2-z^2)}{2\sigma^2}\Big).$$

Несложно убедиться, что функция q удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}q(t,z)=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}q(t,z)-\Big(\gamma+\frac{\theta^2}{2\sigma^2}\Big)z^2q(t,z),\qquad (t,z)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}.\quad (3.2)$$

После сделанных преобразований исходная функция $h(t,z)$ превратилась в функцию

$$q(t,z)=\frac{\sqrt{\widetilde\gamma\theta}}{\sigma\sqrt{2\pi\,\mathrm{sh}(t\widetilde\gamma\theta)}}\exp\Big(-\widetilde\gamma\theta\frac{(x^2+z^2)\,\mathrm{ch}(t\widetilde\gamma\theta)-2xz}{2\sigma^2\,\mathrm{sh}(t\widetilde\gamma\theta)}\Big).$$

В результате нам осталось проверить, что эта функция удовлетворяет уравнению (3.2). Это несложно сделать с помощью непосредственного дифференцирования. Аналогичные выражения для преобразований Лапласа интегралов от квадратов бесселевских процессов были получены в работе [6].

Литература

1. А. Н. Колмогоров, *Об аналитических методах в теории вероятностей.* — Успехи матем. наук **5** (1938), 5–41.
2. M. Kac, *On some connections between probability theory and differential and integral equations.* — Proc. Second Berkley Symp. Math. Stat. Probab. (1951), 189–215.
3. Е. Б. Дынкин, *Функционалы от траекторий марковских случайных процессов.* — Докл. АН СССР **104** (1955), 691–694.
4. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Наука, М., 1977.
5. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae.* Second edition, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2002.
6. J. W. Pitman, M. Yor, *A decomposition of Bessel bridges.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **59** (1982), 425–457.

Borodin A. N. Distributions of integral functionals of bridges of Gaussian diffusions.

The paper deals with an original approach to derivation of parabolic equation for the Laplace transform of the distributions of integral functional of bridge of Gaussian diffusion.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191023
и С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28,
Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 5 октября 2012 г.