Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 408, 2012 г.

Н. В. Алексеев, Ф. Гётце, А. Н. Тихомиров

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ СТЕПЕНИ СЛУЧАЙНОЙ МАТРИЦЫ

§1. Введение

Пусть $X_{ij}, i,j \geqslant 1$ – независимые (возможно комплексные) случайные величины с $\mathbf{E}\,X_{ij} = 0$ and $\mathbf{E}\,|X_{ij}|^2 = 1$, и $\mathbf{X}$ – $n \times n$ матрица, элементы которой $[\mathbf{X}]_{ij} = X_{ij}$ для всех $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Обозначим через $s_1^{(m)} \geqslant \ldots \geqslant s_n^{(m)}$ сингулярные числа матрицы $\mathbf{W}_{\mathbf{X}} := n^{-\frac{m}{2}}\mathbf{X}^m$ и определим эмпирическую функцию распределения их квадратов, положив

$$\mathcal{F}_{\mathbf{X}}^{(m)}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{I}\{(s_k^{(m)})^2 \leqslant x\},$$

где $\mathbb{I}\{B\}$ означает индикатор события B. Мы будем исследовать сходимость математического ожидания эмпирической функции распределения $F_{\mathbf{X}}^{(m)}(x) = \mathbf{E}\,\mathcal{F}_{\mathbf{X}}^{(m)}(x)$ к функции распределения $G^{(m)}(x)$, определенной своими моментами

$$\alpha_k(m) := \int_{\mathbb{R}} x^k\,d\,G^{(m)}(x) = \frac{1}{mk+1}\binom{km+k}{k} = FC(m,k).$$

Последовательность $\alpha_k(m)$ состоит из так называемых чисел Фусса–Каталана $FC(m,k)$. Эта последовательность определяет функцию распределения с преобразованием Стилтьеса $s^{(m)}(z)$, удовлетворяющим уравнению

$$1 + zs^{(m)}(z) + (-1)^{m+1}z^m(s^{(m)}(z))^{m+1} = 0. \tag{1.1}$$

Ключевые слова: числа Фусса–Каталана, случайные матрицы, сингулярные числа, степени случайных матриц.

Работа поддержана грантами РФФИ 11-01-00310-а, 11-01-12104-офи-м, Программой УрО РАН, Проект 12-П-1-1013, SFB 701 Университета Билефельда и Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ, дог. 11.G34.31.0026.

Мы рассмотрим расстояние Колмогорова между функциями распределения $F_{\mathbf{X}}^{(m)}(x)$ и $G^{(m)}(x)$,

$$\Delta_n^{(m)} := \sup_x |F_{\mathbf{X}}^{(m)}(x) - G^{(m)}(x)|.$$

Основной результат настоящей заметки представляет следующая

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathbf{E}\,X_{jk} = 0$, $\mathbf{E}\,|X_{jk}|^2 = 1$ *и*

$$\begin{aligned}\mathbf{cov}(\operatorname{Re} X_{jk}, \operatorname{Im} X_{jk}) &:= \begin{bmatrix} \mathbf{E}\operatorname{Re}^2 X_{jk} & \mathbf{E}\operatorname{Re} X_{jk} \operatorname{Im} X_{jk} \\ \mathbf{E}\operatorname{Re} X_{jk} \operatorname{Im} X_{jk} & \mathbf{E}\operatorname{Im}^2 X_{jk} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Предположим, что для любого $\tau > 0$

$$L_n(\tau) := \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{E}\,|X_{jk}|^2 I\{|X_{jk}| > \tau\sqrt{n}\} \to 0, \quad \text{когда} \quad n \to \infty. \tag{1.3}$$

Тогда для любого фиксированного $m \geqslant 2$ *имеет место соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |F_{\mathbf{X}}^{(m)}(x) - G^{(m)}(x)| = 0.$$

Следствие 1.1. *Пусть* X_{jk} *независимы и одинаково распределены для всех* $1 \leqslant j, k \leqslant n$. *Пусть также*

$$\mathbf{E}\,X_{jk} = 0, \quad \mathbf{E}\,|X_{jk}|^2 = 1. \tag{1.4}$$

Тогда для любого фиксированного $m \geqslant 2$

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n^{(m)} = 0.$$

В 2001 г. в работе [1] Оравец (Oravecz) изучал распределение так называемых R-диагональных элементов, введенных Войкулеску (Voiculescu), и показал, что распределение m-ой степени этих элементов имеет моменты, равные числам Фусса–Каталана $FC(m,k)$ для $k = 1, 2, \ldots$. Числа Фусса–Каталана удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению

$$FC(m,k) = \sum_{k_0+\cdots+k_m=k-1} \prod_{\nu=0}^{m} FC(m, k_\nu), \tag{1.5}$$

из которого нетрудно вывести соотношение (1.1). Распределения с преобразованием Стилтьеса, удовлетворяющем уравнению (1.1), принадлежат к классу свободных распределений Бесселя, которые описаны в работе Т. Баника (T. Banica) и других [2]. Это распределение изучалось также в работе Шпайхера и Минго (Speicher, Mingo) [3]. Используя методы теории свободной вероятности, результат теоремы 1.1 можно получить для случайных матриц, элементы которых имеют все моменты (см. [2] и [3]).

Теорема 1.1 была сформулирована авторами впервые в [4] при дополнительном условии конечности четвертых моментов. В работе [5] при этих условиях было приведено доказательство теоремы 1.1 методом моментов. В настоящей заметке ослаблены условия на моменты случайных величин. Доказательство теоремы 1.1 мы представляем, используя преобразование Стилтьеса. Этот метод позволяет нам получать также оценки скорости сходимости к предельному распределению.

Мы будем исследовать преобразование Стилтьеса $s_n^{(m)}(z)$ распределения $F_{\mathbf{X}}^{(m)}(x)$ и покажем, что $s_n^{(m)}(z)$ удовлетворяет уравнению

$$1 + zs_n^{(m)}(z) + (-1)^{m+1}z^m(s_n^{(m)}(z))^{m+1} = \delta_n(z),$$

где функция $\delta_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда непосредственно следует, что $s_n^{(m)}(z)$ сходится к $s^{(m)}(z)$ равномерно на любом компактном подмножестве $\mathcal{K}$ верхней комплексной полуплоскости $\mathcal{C}^+$. Последнее эквивалентно слабой сходимости функции распределения $F_n^{(m)}(x)$ к функции распределения $F^{(m)}(x)$. В дальнейшем мы договоримся опускать верхний индекс m в обозначениях.

§2. Вспомогательные результаты

В этом параграфе мы опишем симметризацию одностороннего распределения и приведем специальное представление для симметризованного распределения квадратов сингулярных чисел матрицы $\mathbf{W}$. Далее, мы модифицируем матрицу $\mathbf{X}$, заменив ее элементы соответствующими усеченными величинами. Мы покажем, что такая замена не меняет предельного распределения.

2.1. Симметризация. Мы используем следующую симметризацию односторонних распределений. Пусть ξ^2 – неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Определим $\widetilde{\xi} := \varepsilon\xi$, где ε

– бернуллиевская случайная величина с $\Pr\{\varepsilon = \pm 1\} = 1/2$, не зависящая от ξ . Пусть $\widetilde{F}(x)$ обозначает функцию распределения случайной величины $\widetilde{\xi}$. Она удовлетворяет очевидному равенству

$$\widetilde{F}(x) = 1/2(1 + \operatorname{sgn}\{x\}\, F(x^2)). \tag{2.1}$$

Мы применим симметризацию к распределению квадратов сингулярных чисел матрицы $\mathbf{W}$. Пусть $\widetilde{F}_n(x)$, $\widetilde{\mathcal{F}}_n(x)$ и $\widetilde{G}(x)$ обозначают, соответственно, симметризации функций распределения $F_n(x)$, $\mathcal{F}_n(x)$ и $G(x)$. Очевидно, что $\widetilde{F}_n(x) = \mathbf{E}\,\widetilde{\mathcal{F}}_n(x)$. Далее, введем в рассмотрение следующие матрицы

$$\mathbf{H_X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{X}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U_X} = \begin{bmatrix} \mathbf{W_X} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{W}^*_{\mathbf{X}} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{V_X} = \mathbf{U_X J}.$$

Заметим, что

$$\mathbf{U_X} = \mathbf{H}^m_{\mathbf{X}}.$$

Здесь и далее $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$ обозначает эрмитово сопряженную к матрице $\mathbf{A}$ (транспонированную и комплексно сопряженную) и $\mathbf{I}_k$ обозначает единичную матрицу порядка k. Иногда мы будем опускать нижний индекс в обозначении единичной матрицы. Заметим, что $\mathbf{V_X}$ – эрмитова матрица. Собственными значениями матрицы $\mathbf{V_X}$ являются числа $-s_1, \ldots, -s_n, s_n, \ldots, s_1$. Заметим также, что симметризация эмпирической функции распределения квадратов сингулярных чисел матрицы $\mathbf{W_X}$ – это эмпирическая функция распределения собственных чисел матрицы $\mathbf{V_X}$. В силу соотношения (2.1), мы имеем

$$\Delta_n = 2 \sup_x |\widetilde{F}_{\mathbf{X}}(x) - \widetilde{G}(x)|. \tag{2.2}$$

Равенство (2.2) позволяет нам в дальнейшем для доказательства сходимости математического ожидания эмпирической функции распределения квадратов сингулярных чисел матрицы $\mathbf{W_X}$ к функции распределения $G(x)$ доказывать сходимость математического ожидания функции распределения собственных чисел матрицы $\mathbf{V_X}$ к функции распределения $\widetilde{G}(x)$. Для описания преобразования Стилтьеса функции распределения функции распределения $\widetilde{G}(x)$ мы можем получить уравнение, аналогичное уравнению (1.1). Из равенства (2.1) нетрудно получить соотношение между преобразованиями Стилтьеса симметризованной и односторонней функции распределения. Пусть $s(z)$ обозначает преобразование Стилтьеса случайной величины ξ^2 и пусть $\widetilde{s}(z)$ обозначает преобразование Стилтьеса случайной величины $\widetilde{\xi}$. Тогда

$$\widetilde{s}(z) = zs(z^2). \tag{2.3}$$

Применяя это соотношение к преобразованиям Стилтьеса $s(z)$ и $\widetilde{s}(z)$ функций распределения $G(x)$ и $\widetilde{G}(x)$, соответственно, из уравнения (1.1), мы получим

$$1 + z\widetilde{s}(z) + (-1)^{m+1} z^{m-1} (\widetilde{s}(z))^{m+1} = 0. \tag{2.4}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только симметризованную функцию распределения $\widetilde{F}_{\mathbf{X}}(x)$. Мы будем опускать символ “ $\sim$ ” в обозначениях функций распределения $\widetilde{F}_{\mathbf{X}}(x)$ ($\widetilde{G}(x)$) и их преобразований Стилтьеса $\widetilde{s}_n(z)$ ($\widetilde{s}(z)$).

Условимся символом C (с индексом или без него) обозначать общие абсолютные положительные постоянные (необязательно принимающие одно и то же значение в разных местах). Символом $C(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ будем обозначать константы, зависящие от указанных в скобках аргументов. Для любой матрицы $\mathbf{A}$ через $\|\mathbf{A}\|_2$ мы будем обозначать норму Гильберта–Шмидта матрицы $\mathbf{A}$, а символ $\|\mathbf{A}\|$ будет обозначать операторную норму матрицы $\mathbf{A}$ (максимальное сингулярное число).

2.2. Усечение. В этом параграфе мы покажем, что задачу исследования предельной функции распределения собственных чисел матрицы $\mathbf{V}$ можно свести к той же задаче, но для матриц, элементы которых ограниченны константой, зависящей от n. Чтобы выбрать уровень усечения случайных величин, мы воспользуемся простым и хорошо известным фактом из математического анализа: если последовательность невозрастающих функций $f_n(\tau)$, определенных для $\tau > 0$, стремится к 0 для любого фиксированного $\tau > 0$, когда n стремится к бесконечности, то найдется такая последовательность $\tau_n > 0$, что $\lim_n \tau_n = 0$ и $\lim_n f_n(\tau_n) = 0$. В силу условия (1.4), $\tau^{-q} L_n(\tau) \to 0$ для любого $\tau > 0$ и любого фиксированного $q \geqslant 0$. Кроме того, для любого $q \geqslant 0$ функция $\tau^{-q} L_n(\tau)$ не возрастает по τ при фиксированном n. В силу сказанного выше мы можем выбрать последовательность $\tau_n > 0$,

$n = 1, 2 \ldots$, такую, что

$$\tau_n \to 0 \quad \text{и} \quad L_n(\tau) \leqslant C\tau_n^4 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2.5}$$

Мы будем называть матрицу $\widehat{\mathbf{X}} = (\widehat{X}_{ij})$ усечением матрицы $\mathbf{X}$, если ее элементы определяются равенствами

$$\widehat{X}_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & \text{если } |X_{ij}| < \tau_n\sqrt{n} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}. \tag{2.6}$$

Пусть $\widehat{s}_1 \geqslant \ldots \geqslant \widehat{s}_n$ – сингулярные числа матрицы $\mathbf{W}_{\widehat{\mathbf{X}}} := n^{-\frac{m}{2}}\widehat{\mathbf{X}}^m$. Определим эмпирическую функцию распределения собственных чисел матрицы $\mathbf{V}_{\widehat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{W}_{\widehat{\mathbf{X}}} \\ \mathbf{W}_{\widehat{\mathbf{X}}}^* & \mathbf{O} \end{bmatrix}$ равенством

$$\mathcal{F}_{\widehat{\mathbf{X}}}(x) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\mathbb{I}\{\widehat{s}_k \leqslant x\} + \mathbb{I}\{-\widehat{s}_k \leqslant x\}\Big).$$

Далее, пусть $F_{\widehat{\mathbf{X}}}(x) = \mathbf{E}\,\mathcal{F}_{\widehat{\mathbf{X}}}(x)$. Мы применим ранговое неравенство (см. [6], теорема A.44, неравенство (A.6.2), с. 503)

$$\sup_x |F_{\widehat{\mathbf{X}}}(x) - F_{\mathbf{X}}(x)| \leqslant \mathbf{E}\,\frac{\operatorname{rank}(\mathbf{V}_{\mathbf{X}} - \mathbf{V}_{\widehat{\mathbf{X}}})}{n}. \tag{2.7}$$

Очевидно, что

$$\operatorname{rank}(\mathbf{V}_{\mathbf{X}} - \mathbf{V}_{\widehat{\mathbf{X}}}) \leqslant \operatorname{rank}(\mathbf{W}_{\mathbf{X}} - \mathbf{W}_{\widehat{\mathbf{X}}}) \leqslant m \operatorname{rank}(\mathbf{X} - \widehat{\mathbf{X}}). \tag{2.8}$$

Используя тот факт, что ранг матрицы не больше числа ненулевых элементов, мы придем к неравенству

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\,\operatorname{rank}(\mathbf{V}_{\mathbf{X}} - \mathbf{V}_{\widehat{\mathbf{X}}}) &\leqslant \sum_{j,k=1}^{n} \Pr\{|X_{jk}| \geqslant \tau_n n^{\frac{1}{2}}\} \\ &\leqslant \frac{1}{n\tau_n^2}\sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{E}\,|X_{jk}|^2 I\{|X_{jk}| > \tau_n\sqrt{n}\} = \frac{nL_n(\tau_n)}{\tau_n^2} \leqslant Cn\tau_n^2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Сравнивая неравенства (2.7) и (2.9), мы получаем

$$\sup_x |F_{\widehat{\mathbf{X}}}(x) - F_{\mathbf{X}}(x)| \leqslant C\tau_n^2 \tag{2.10}$$

Если обозначить через $s_n(z)$ и $\widehat{s}_n(z)$ преобразования Стилтьеса функций распределения $F_{\mathbf{X}}(x)$ и $F_{\widehat{\mathbf{X}}}(x)$, соответственно, то из неравенства (2.10) мы получаем

$$|s_n(z) - \widehat{s}_n(z)| \leqslant Cv^{-1}\tau_n^2. \tag{2.11}$$

Введем теперь в рассмотрение матрицы $\mathbf{X}^{(c)} := \widehat{\mathbf{X}} - \mathbf{E}\,\widehat{\mathbf{X}}$ и $\mathbf{W}_{\mathbf{X}^{(c)}} = n^{-\frac{m}{2}}\mathbf{X}^{(c)m}$ and $\mathbf{V}_{\mathbf{X}^{(c)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{W}_{\mathbf{X}^{(c)}} \\ \mathbf{W}_{\mathbf{X}^{(c)}}{}^{*} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$. Пусть $\mathcal{F}_n^{(c)}$ – эмпирическая функция распределения собственных чисел и $F_n^{(c)}(x) = \mathbf{E}\,\mathcal{F}_{\mathbf{X}^{(c)}}(x)$. Пусть $s_n^{(c)}(z)$ обозначает преобразование Стилтьеса функции $F_{\mathbf{X}^{(c)}}(x)$. Введем резольвентные матрицы

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}^{(c)}} = (\mathbf{V}_{\mathbf{X}^{(c)}} - z\mathbf{I})^{-1}, \qquad \text{and} \qquad \mathbf{R}_{\widehat{\mathbf{X}}} = (\mathbf{V}_{\widehat{\mathbf{X}}} - z\mathbf{I})^{-1} \tag{2.12}$$

для $z = u + iv$ с $v > 0$. Во введенных обозначениях справедливы равенства

$$\widehat{s}_n(z) = \frac{1}{2n}\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{R}_{\widehat{\mathbf{X}}} \quad \text{and} \quad s_n^{(c)}(z) = \frac{1}{2n}\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{R}_{\mathbf{X}^{(c)}}. \tag{2.13}$$

Применяя резольвентное равенство

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} - z\mathbf{I})^{-1} = (\mathbf{A} - z\mathbf{I})^{-1} - (\mathbf{A} - z\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{A} + \mathbf{B} - z\mathbf{I})^{-1}, \tag{2.14}$$

мы получим

$$\begin{aligned} |\widehat{s}_n(z) - s_n^{(c)}(z)| &\leqslant \frac{1}{2n}\mathbf{E}\,|\mathrm{Tr}\,\mathbf{R}_{\mathbf{X}^{(c)}}(\mathbf{V}_{\mathbf{X}^{(c)}} - \mathbf{V}_{\widehat{\mathbf{X}}})\mathbf{R}_{\widehat{\mathbf{X}}}| \\ &= \frac{1}{2n}\mathbf{E}\,|\mathrm{Tr}\,\mathbf{R}_{\mathbf{X}^{(c)}}(\mathbf{U}_{\mathbf{X}^{(c)}} - \mathbf{U}_{\widehat{\mathbf{X}}})\mathbf{J}\mathbf{R}_{\widehat{\mathbf{X}}}|. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Далее,

$$\mathbf{U}_{\mathbf{X}^{(c)}} - \mathbf{U}_{\widehat{\mathbf{X}}} = \mathbf{H}^m_{\mathbf{X}^{(c)}} - \mathbf{H}^m_{\widehat{\mathbf{X}}} = \sum_{\nu=0}^{m-1} \mathbf{H}^{\nu}_{\mathbf{X}^{(c)}}(\mathbf{H}_{\mathbf{X}^{(c)}} - \mathbf{H}_{\widehat{\mathbf{X}}})\mathbf{H}^{m-1-\nu}_{\widehat{\mathbf{X}}}. \tag{2.16}$$

Применяя очевидное соотношение

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\,\mathbf{R}_{\widehat{\mathbf{X}}}\mathbf{H}^{\nu}_{\mathbf{X}^{(c)}}(\mathbf{H}_{\mathbf{X}^{(c)}} - \mathbf{H}_{\widehat{\mathbf{X}}})\mathbf{H}^{m-1-\nu}_{\widehat{\mathbf{X}}}\mathbf{J}\mathbf{R}_{\mathbf{X}^{(c)}} \\ &\quad = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{H}_{\widehat{\mathbf{X}}} - \mathbf{H}_{\mathbf{X}^{(c)}})\mathbf{H}^{m-1-\nu}_{\widehat{\mathbf{X}}}\mathbf{J}\mathbf{R}_{\mathbf{X}^{(c)}}\mathbf{R}_{\widehat{\mathbf{X}}}\mathbf{H}^{\nu}_{\mathbf{X}^{(c)}} \end{aligned}$$

и неравенство Гёльдера, мы придем к неравенству

$$\begin{aligned} &|\widehat{s}_n(z) - s_n^{(c)}(z)| \\ &\quad \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{\nu=0}^{m-1-\nu} \mathbf{E}^{\,\frac{1}{2}}\|\mathbf{V}_{\widehat{\mathbf{X}}} - \mathbf{V}_{\mathbf{X}^{(c)}}\|_2^2\mathbf{E}^{\,\frac{1}{2}}\|\mathbf{R}_{\mathbf{X}^{(c)}}\mathbf{R}_{\widehat{\mathbf{X}}}\mathbf{H}^{m-1-\nu}_{\widehat{\mathbf{X}}}\mathbf{H}^{\nu}_{\mathbf{X}^{(c)}}\|_2^2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Очевидно, что для резольвентных матриц

$$\max\{\|\mathbf{R}_{\mathbf{X}^{(c)}}\|,\, \|\mathbf{R}_{\widehat{\mathbf{X}}}\|\} \leqslant v^{-1}. \tag{2.18}$$

Отсюда следует, что

$$|\widehat{s}_n(z)-s_n^{(c)}(z)| \leqslant \frac{1}{2v^2\sqrt{n}}\sum_{\nu=0}^{m-1}\mathbf{E}^{\frac12}\|\mathbf{H}_{\widehat{\mathbf{X}}}-\mathbf{H}_{\mathbf{X}^{(c)}}\|_2\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{E}^{\frac12}\|\mathbf{H}_{\widehat{\mathbf{X}}}^{m-1-\nu}\mathbf{H}_{\mathbf{X}^{(c)}}^{\nu}\|_2^2. \tag{2.19}$$

По определению матриц $\mathbf{H}_{\widehat{\mathbf{X}}}$ и $\mathbf{H}_{\mathbf{X}^{(c)}}$, мы имеем

$$\|\mathbf{H}_{\widehat{\mathbf{X}}}-\mathbf{H}_{\mathbf{X}^{(c)}}\|_2^2 = 2n^{-1}\|\widehat{\mathbf{X}}-\mathbf{X}^{(c)}\|_2^2 = 2n^{-1}\|\mathbf{E}\,\widehat{\mathbf{X}}\|_2^2. \tag{2.20}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}\|\mathbf{E}\,\widehat{\mathbf{X}}\|_2^2 &= \sum_{j,k=1}^{n}|\mathbf{E}\,X_{jk}\mathbb{I}\{|X_{jk}|>\tau_n\sqrt{n}\}|^2\\ &\leqslant \frac{1}{n\tau_n^2}\sum_{j,k=1}^{n}(\mathbf{E}\,|X_{jk}|^2\mathbb{I}\{|X_{jk}|>\tau_n\sqrt{n}\})^2 \leqslant \frac{nL_n(\tau_n)}{\tau_n^2} \leqslant Cn\tau_n^2.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Применяя лемму 5.1, мы получим

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{E}^{\frac12}\|\mathbf{H}_{\widehat{\mathbf{X}}}^{m-1-\nu}\mathbf{H}_{\mathbf{X}^{(c)}}^{\nu}\|_2^2 \leqslant C. \tag{2.22}$$

Следовательно,

$$|\widehat{s}_n(z)-s_n^{(c)}(z)| \leqslant \frac{C\tau_n}{v^2}. \tag{2.23}$$

Неравенства (2.11) и (2.23) влекут следующее утверждение.

Лемма 2.1. *В условиях теоремы* 1.1

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x|F_{\mathbf{X}}-G(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_x|\mathbf{E}\,F_{\mathbf{X}^{(c)}}-G(x)|.$$

Замечание 2.1. В силу леммы 2.1, в дальнейшем мы можем считать, что

$$\mathbf{E}\,X_{jk}=0, \quad \mathbf{E}\,|X_{jk}|^2=\sigma_{jk}^2\leqslant 1, \quad \text{and} \quad |X_{jk}|\leqslant\tau_n\sqrt{n}, \tag{2.24}$$

для некоторой последовательности чисел $\tau_n>0$, такой, что $\lim_n\tau_n=0$, $L_n(\tau_n)\leqslant C\tau_n^4$. Более того, выполнено неравенство

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j,k=1}^{n}(1-\sigma_{jk}^2)\leqslant L_n(\tau_n). \tag{2.25}$$

§3. Универсальность распределения сингулярных чисел

Под универсальностью распределения сингулярных чисел матрицы $\mathbf{W}_{\mathbf{X}}$ (или собственных чисел матрицы $\mathbf{V}_{\mathbf{X}}$) мы понимаем независимость предельного распределения от распределений элементов матрицы $\mathbf{X}$ в классе случайных величин, удовлетворяющих условиям (2.24). Мы покажем, что для любой матрицы $\mathbf{X}$, элементы которой удовлетворяют условиям (2.24), предельное распределение сингулярных чисел матрицы $\mathbf{W}_{\mathbf{X}}$ будет таким же как для матрицы $\mathbf{W}_{\mathbf{Y}}$, где $\mathbf{Y} = (Y_{jk})_{j,k=1}^n$, элементы которой – независимые гауссовские величины с такими же первыми и вторыми моментами, как и у X_{jk}-х и независимые от последних. Итак, пусть Y_{jk} -независимые гауссовские случайные величины с $\mathbf{E}\,Y_{jk}=0$, $\mathbf{E}\,|Y_{jk}|^2=\sigma_{jk}^2$ и в комплексном случае матрицы ковариаций вещественной и мнимой части такие же, как у X_{jk}, т. е.

$$\mathbf{cov}(\operatorname{Re}Y_{jk}, \operatorname{Im}Y_{jk}) = \mathbf{cov}(\operatorname{Re}X_{jk}, \operatorname{Im}X_{jk}). \tag{3.1}$$

Введем для любого $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ матрицы

$$\mathbf{Z}(\varphi) = \mathbf{X}\cos\varphi + \mathbf{Y}\sin\varphi. \tag{3.2}$$

Заметим, что для любого $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\mathbf{cov}(\operatorname{Re}Z_{jk}(\varphi), \operatorname{Im}Z_{jk}(\varphi)) = \mathbf{cov}(\operatorname{Re}X_{jk}, \operatorname{Im}X_{jk}). \tag{3.3}$$

Кроме того, $\mathbf{Z}(0)=\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}(\frac{\pi}{2})=\mathbf{Y}$. Далее положим $\mathbf{W}(\varphi)=\mathbf{W}_{\mathbf{Z}(\varphi)}$, $\mathbf{H}(\varphi)=\mathbf{H}_{\mathbf{Z}(\varphi)}$, $\mathbf{V}(\varphi)=\mathbf{V}_{\mathbf{Z}(\varphi)}$ и $\mathbf{R}(\varphi)=\mathbf{R}_{\mathbf{Z}(\varphi)}(z)$. Соответственно, функции распределения собственных чисел матриц $\mathbf{V}(\varphi)$ определим равенствами

$$\mathcal{F}_n(x,\varphi) = \mathcal{F}_{\mathbf{Z}(\varphi)}(x), \quad F_n(x,\varphi) = F_{\mathbf{Z}(\varphi)}(x). \tag{3.4}$$

Преобразование Стилтьеса функции распределения $F_n(x,\varphi)$ обозначим $s_n(z,\varphi)$. Преобразование Стилтьеса функции распределения $F_{\mathbf{Y}}(x)$ обозначается символом $S_n(z)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} F_n(x,0) &= F_{\mathbf{X}}(x), \quad F_n(x,\frac{\pi}{2}) = F_{\mathbf{Y}}(x), \\ s_n(z,0) &= s_n(z), \quad s_n(z,\frac{\pi}{2}) = S_n(z). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Мы докажем следующую лемму.

Лемма 3.1. *В условиях теоремы* 1.1 *справедливо соотношение*

$$\lim_n \sup_x |F_{\mathbf{X}}(x) - G(x)| = \lim_n \sup_x |F_{\mathbf{Y}}(x) - G(x)| \tag{3.6}$$

Доказательство. Нам достаточно доказать, что

$$\lim_n |s_n(z) - S_n(z)| = 0 \tag{3.7}$$

равномерно по $z = u + iv$ в любой компактной области верхней комплексной полуплоскости $\mathbb{C}^+$. Применяя формулу Ньютона–Лейбница, мы запишем представление

$$S_n(z) - s_n(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial s_n(z,\varphi)}{\partial \varphi} d\varphi. \tag{3.8}$$

Мы будем оценивать функцию $\Psi_n(z,\varphi) = \frac{\partial s_n(z,\varphi)}{\partial\varphi}$ равномерно по $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Обозначим $\xi_{jk} = \operatorname{Re} Z_{jk}(\varphi)$ и $\eta_{jk} = \operatorname{Im} Z_{jk}(\varphi)$. В этих обозначениях мы имеем

$$\begin{aligned}\Psi_n(z,\varphi) &= \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial s_n(z,\varphi)}{\partial \xi_{jk}} \frac{\partial \xi_{jk}}{\partial \varphi} + i \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial s_n(z,\varphi)}{\partial \eta_{jk}} \frac{\partial \eta_{jk}}{\partial \varphi} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j,k=1}^n \mathbf{E} \operatorname{Tr} \frac{\partial \mathbf{R}(z,\varphi)}{\partial \xi_{jk}} \frac{\partial \xi_{jk}}{\partial \varphi} + \frac{i}{2n} \sum_{j,k=1}^n \mathbf{E} \operatorname{Tr} \frac{\partial \mathbf{R}(z,\varphi)}{\partial \eta_{jk}} \frac{\partial \eta_{jk}}{\partial \varphi}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Введем в рассмотрение единичные вектора $\mathbf{e}_j = (0,\ldots,0,1,0\ldots0) \in \mathbb{R}^{2n}$, j-ая координата которых равна 1, а остальные 0. Мы можем записать равенство

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{R}(z,\varphi)}{\partial \xi_{jk}} = -\mathbf{R}(z,\varphi) \frac{\partial \mathbf{V}(\varphi)}{\partial \xi_{jk}} \mathbf{R}(z,\varphi) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{q=0}^{m-1} \mathbf{R}(z,\varphi) \mathbf{H}^q(\varphi)(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+n}^T + \mathbf{e}_{k+n} \mathbf{e}_j^T) \mathbf{H}^{m-1-q}(\varphi) \mathbf{J} \mathbf{R}(z,\varphi), \\ &\frac{\partial \mathbf{R}(z,\varphi)}{\partial \eta_{jk}} = -\mathbf{R}(z,\varphi) \frac{\partial \mathbf{V}(\varphi)}{\partial \eta_{jk}} \mathbf{R}(z,\varphi) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{q=0}^{m-1} \mathbf{R}(z,\varphi) \mathbf{H}^q(\varphi)(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+n}^T + \mathbf{e}_{k+n} \mathbf{e}_j^T) \mathbf{H}^{m-1-q}(\varphi) \mathbf{J} \mathbf{R}(z,\varphi)\end{aligned} \tag{3.10}$$

для $j,k = 1,\ldots,n$.

Для сокращения записи в дальнейшем условимся писать $\mathbf{R}$ вместо $\mathbf{R}(z,\varphi)$ и $\mathbf{H}$ вместо $\mathbf{H}(\varphi)$, а также $\mathbf{V}$ вместо $\mathbf{V}(\varphi)$, опуская аргумент φ в обозначениях. Заметим, что

$$\begin{aligned}\widehat{\xi}_{jk} &:= \frac{\partial \xi_{jk}}{\partial\varphi} = -\mathrm{Re}\, X_{jk}\cos\varphi + \mathrm{Re}\, Y_{jk}\sin\varphi,\\ \widehat{\eta}_{jk} &:= \frac{\partial \eta_{jk}}{\partial\varphi} = -\mathrm{Im}\, X_{jk}\cos\varphi + \mathrm{Im}\, Y_{jk}\sin\varphi.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Подставляя (3.10) и (3.11) в (3.9), мы получим

$$\Psi(z,\varphi) = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{q=0}^{m-1}\sum_{j,k=1}^{n}(1+\delta_{jk})\mathbf{E}\,(\widehat{\xi}_{jk} + \widehat{i}\eta_{jk})[\mathbf{H}^q\mathbf{J}\mathbf{R}^2\mathbf{H}^{m-1-q}]_{j,k+n}. \tag{3.12}$$

Пусть матрицы $\mathbf{H}^{(jk)}$, $\mathbf{V}^{(jk)}$ и $\mathbf{R}^{(jk)}$ получены, соответственно, из $\mathbf{H}$, $\mathbf{V}^{(jk)}$ и $\mathbf{R}$ путем замены входящей в их определение величины $Z_{jk}(\varphi)$ нулем.

Обозначим $\mathbf{\Delta}^{(jk)} := \mathbf{e}_j\mathbf{e}_k^T + \mathbf{e}_{k+n}\mathbf{e}_{j+n}^T$. Справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{H}^{(jk)} + \frac{1}{\sqrt{n}}Z_{jk}\mathbf{\Delta}^{(jk)},\\ \mathbf{H}^q &= (\mathbf{H}^{(jk)})^q + \frac{1}{\sqrt{n}}Z_{jk}(\varphi)\mathbf{Q}_{0,q}^{(jk)}\\ &= (\mathbf{H}^{(jk)})^q + \frac{1}{\sqrt{n}}Z_{jk}(\varphi)\mathbf{Q}_{1,q}^{(jk)} + \frac{1}{n}Z_{jk}^2(\varphi)\mathbf{Q}_{2,q}^{(jk)}, \quad q=1,\dots m,\end{aligned} \tag{3.13}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{0,q}^{(jk)} &= \sum_{\nu=0}^{m-1}\mathbf{H}^\nu\mathbf{\Delta}^{(jk)}(\mathbf{H}^{(jk)})^{m-1-\nu},\\ \mathbf{Q}_{1,q}^{(jk)} &= \sum_{\nu=0}^{m-1}(\mathbf{H}^{(jk)})^\nu\mathbf{\Delta}^{(jk)}(\mathbf{H}^{(jk)})^{m-1-\nu},\\ \mathbf{Q}_{2,q}^{(jk)} &= \sum_{\nu=0}^{q-1}\sum_{\mu=0}^{\nu}\mathbf{H}^\mu\mathbf{\Delta}^{(jk)}(\mathbf{H}^{(jk)})^{\nu-1-\mu}\mathbf{\Delta}^{(jk)}(\mathbf{H}^{(jk)})^{q-1-\nu}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \mathbf{R}^{(jk)} - \frac{1}{\sqrt{n}} Z_{jk}(\varphi)\mathbf{R}^{(jk)}\mathbf{B}_0^{(jk)}\mathbf{R} \\
&= \mathbf{R}^{(jk)} - \frac{1}{\sqrt{n}} Z_{jk}(\varphi)\mathbf{R}^{(jk)}\mathbf{B}_2^{(jk)}\mathbf{R}^{(jk)} + \frac{1}{n} Z_{jk}^2(\varphi)\mathbf{R}^{(jk)}\mathbf{B}_3^{(jk)}\mathbf{R}^{(jk)}\mathbf{B}_4^{(jk)}\mathbf{R},
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_0^{(jk)} &= \mathbf{Q}_{0,m}^{(jk}\mathbf{J}, \quad \mathbf{B}_1^{(jk)} = \mathbf{Q}_{1,m}^{(jk}\mathbf{J}, \\
\mathbf{B}_2^{(jk)} &= \mathbf{Q}_{2,m}^{(jk}\mathbf{J} + \mathbf{Q}_{0,m}^{(jk}\mathbf{R}^{(jk)}\mathbf{Q}_{0,m}^{(jk)}\mathbf{J}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Возводя в квадрат равенство (3.15), мы получим

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}^2 &= (\mathbf{R}^{(jk)})^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} Z_{jk}(\varphi)\mathbf{D}_0^{(jk)} \\
&= (\mathbf{R}^{(jk)})^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} Z_{jk}(\varphi)\mathbf{D}_1^{(jk)} + \frac{1}{n} Z_{jk}^2(\varphi)\mathbf{D}_2^{(jk)},
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}_0^{(jk)} &= \mathbf{R}^{(jk)}\mathbf{B}_0^{(jk)}\mathbf{R}^2 + \mathbf{R}\mathbf{R}^{(jk)}\mathbf{B}_0^{(jk)}\mathbf{R}, \\
\mathbf{D}_1^{(jk)} &= (\mathbf{R}^{(jk)})^2\mathbf{B}_0^{(jk)}\mathbf{R}^{(jk)} + \mathbf{R}^{(jk)}\mathbf{B}_0^{(jk)}(\mathbf{R}^{(jk)})^2, \\
\mathbf{D}_2^{(jk)} &= \mathbf{R}^{(jk)}\mathbf{B}_0^{(jk)}\mathbf{R}\mathbf{R}^{(jk)}\mathbf{B}_0^{(jk)}\mathbf{R} + (\mathbf{R}^{(jk)})^2\mathbf{B}_0^{(jk)}\mathbf{R}^{(jk)}\mathbf{B}_0^{(jk)}\mathbf{R} \\
&\quad + \mathbf{R}^{(jk)}\mathbf{B}_0^{(jk)}\mathbf{D}_0^{(jk)}.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Используя приведенные выше соотношения, мы можем представить матрицу $\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}^q\mathbf{J}\mathbf{R}^2\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}^{m-1-q}$ в виде

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}^q\mathbf{J}\mathbf{R}^2\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}^{m-1-q} &= \mathbf{H}_{\mathbf{Z}}^{(jk)}{}^q\mathbf{J}\mathbf{R}^{(jk)}{}^2\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}^{(jk)}{}^{m-1-q} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} Z_{jk}(\varphi)\mathbf{F}_{1,q}^{(jk)} + \frac{1}{n} Z_{jk}^2(\varphi)\mathbf{F}_{2,q}^{(jk)},
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

где матрицы $\mathbf{D}_{l,q}^{(jk)}$ для $l=1,2$ определяются равенствами

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{1,q}^{(jk)} &= \mathbf{Q}_{1,q}^{(jk)}\mathbf{J}(\mathbf{R}^{(jk)})^2(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}^{(jk)})^{m-q-1} \\ &\quad+(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}^{(jk)})^q\mathbf{J}\mathbf{R}^{(jk)}\mathbf{B}_1^{(jk)}\mathbf{R}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}^{(jk)})^{m-q-1}+(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}^{(jk)})^q\mathbf{J}(\mathbf{R}^{(jk)})^2\mathbf{Q}_{1,m-1-q}^{(jk)}, \\ \mathbf{F}_{2,q}^{(jk)} &= \mathbf{Q}_{2,q}^{(jk)}\mathbf{J}\mathbf{R}^2\mathbf{H}^{m-1-q}+\mathbf{H}^q\mathbf{J}\mathbf{D}_2^{(jk)}\mathbf{H}^{m-1-q}+\mathbf{H}^q\mathbf{J}\mathbf{R}^2\mathbf{Q}_{2,m-1-q}^{(jk)} \\ &\quad+\mathbf{Q}_{1,q}^{(jk)}\mathbf{J}\mathbf{D}_1^{(jk)}\mathbf{H}^{m-1-q}+\mathbf{Q}_{1,q}^{(jk)}\mathbf{J}\mathbf{R}^2\mathbf{Q}_{2,m-1-q}^{(jk)}+\mathbf{H}^q\mathbf{J}\mathbf{D}_1^{(jk)}\mathbf{Q}_{2,m-1-q}^{(jk)}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Представление (3.19) влечет

$$\Psi(z,\varphi) = A_1 + A_2 + A_3, \tag{3.21}$$

где

$$\begin{aligned}A_1&=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{q=0}^{m-1}\sum_{j,k=1}^{n}(2-\delta_{jk})\mathbf{E}\,(\widehat{\xi}_{jk}+i\widehat{\eta}_{jk})(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}^{(jk)})^q\mathbf{J}(\mathbf{R}^{(jk)})^2(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}^{(jk)})^{m-1-q}, \\ A_2&=\frac{1}{n^2}\sum_{q=0}^{m}\sum_{j,k=1}^{n}(2-\delta_{jk})\mathbf{E}\,(\widehat{\xi}_{jk}+i\widehat{\eta}_{jk})Z_{jk}(\varphi)[\mathbf{F}_{1,q}^{(jk)}]_{j,k+n}, \\ A_3&=\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\sum_{q=0}^{m}\sum_{j,k=1}^{n}(2-\delta_{jk})\mathbf{E}\,(\widehat{\xi}_{jk}+i\widehat{\eta}_{jk})Z_{jk}^2(\varphi)[\mathbf{F}_{2,q}^{(jk)}]_{j,k+n}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Заметим что случайные величины $\widehat{\xi}_{jk},\widehat{\eta}_{jk}$ и матрицы $\mathbf{H}^{(jk)}$, $\mathbf{R}^{(jk)}$ для $q=0,\dots,m-1$ независимы. Отсюда сразу следует, что

$$A_1 = 0. \tag{3.23}$$

Далее, заметим, что

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\,(\widehat{\xi}_{jk}+i\widehat{\eta}_{jk})Z_{jk}(\varphi) \\ &= \mathbf{E}\,[(-\operatorname{Re}X_{jk}\sin\varphi+\operatorname{Re}Y_{jk}\cos\varphi)+i(-\operatorname{Im}X_{jk}\sin\varphi+\operatorname{Im}Y_{jk}\cos\varphi)] \\ &\qquad\times[(\operatorname{Re}X_{jk}\cos\varphi+\operatorname{Re}Y_{jk}\sin\varphi)+i(\operatorname{Im}X_{jk}\cos\varphi+\operatorname{Im}Y_{jk}\sin\varphi)].\end{aligned} \tag{3.24}$$

Простые вычисления показывают, что

$$\mathbf{E}\,(\widehat{\xi}_{jk}+i\widehat{\eta}_{jk})Z_{jk}(\varphi) = 0. \tag{3.25}$$

Это равенство и независимость случайных величин $\widehat{\xi}_{jk}, \widehat{\eta}_{jk}$, Z_{jk} и матрицы $\mathbf{F}_{1,q}^{(jk)}$ влекут

$$A_2 = 0. \tag{3.26}$$

Далее, представим A_3 в виде

$$A_3 = T_1 + \ldots + T_6, \tag{3.27}$$

где

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \sum_{q=0}^{m} \sum_{j,k=1}^{n} (2-\delta_{jk}) \mathbf{E}\, (\widehat{\xi}_{jk} + i\widehat{\eta}_{jk}) Z_{jk}^2(\varphi) [\mathbf{Q}_{2,q}^{(jk)} \mathbf{J}\mathbf{R}^2 \mathbf{H}^{m-1-q}]_{j,k+n},\\
T_2 &= \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \sum_{q=0}^{m} \sum_{j,k=1}^{n} (2-\delta_{jk}) \mathbf{E}\, (\widehat{\xi}_{jk} + i\widehat{\eta}_{jk}) Z_{jk}^2(\varphi) [\mathbf{H}^q \mathbf{J}\mathbf{D}_2^{(jk)} \mathbf{H}^{m-1-q}]_{j,k+n},\\
T_3 &= \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \sum_{q=0}^{m} \sum_{j,k=1}^{n} (2-\delta_{jk}) \mathbf{E}\, (\widehat{\xi}_{jk} + i\widehat{\eta}_{jk}) Z_{jk}^2(\varphi)\\
&\quad\times \mathbf{E}\, (\widehat{\xi}_{jk} + i\widehat{\eta}_{jk}) Z_{jk}^2(\varphi) [\mathbf{H}^q \mathbf{J}\mathbf{R}^2 \mathbf{Q}_{2,m-1-q}^{(jk)}]_{j,k+n},\\
T_4 &= \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \sum_{q=0}^{m} \sum_{j,k=1}^{n} (2-\delta_{jk}) \mathbf{E}\, (\widehat{\xi}_{jk} + i\widehat{\eta}_{jk}) Z_{jk}^2(\varphi) [\mathbf{Q}_{1,q}^{(jk)} \mathbf{J}\mathbf{D}_1^{(jk)} \mathbf{H}^{m-1-q}]_{j,k+n},\\
T_5 &= \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \sum_{q=0}^{m} \sum_{j,k=1}^{n} (2-\delta_{jk}) \mathbf{E}\, (\widehat{\xi}_{jk} + i\widehat{\eta}_{jk}) Z_{jk}^2(\varphi) [\mathbf{Q}_{1,q}^{(jk)} \mathbf{J}\mathbf{R}^2 \mathbf{Q}_{2,m-1-q}^{(jk)}]_{j,k+n},\\
T_6 &= \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \sum_{q=0}^{m} \sum_{j,k=1}^{n} (2-\delta_{jk}) \mathbf{E}\, (\widehat{\xi}_{jk} + i\widehat{\eta}_{jk}) Z_{jk}^2(\varphi) [\mathbf{H}^q \mathbf{J}\mathbf{D}_1^{(jk)} \mathbf{Q}_{2,m-1-q}^{(jk)}]_{j,k+n}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Непосредственная оценка слагаемых $T_1, \ldots, T_6$ затруднена тем обстоятельством, что матрицы, входящие в определения этих величин, зависят от случайных величин Z_{jk} и, как следствие, от $\widehat{\xi}_{jk}$ и $\widehat{\eta}_{jk}$. Эта зависимость проявляется либо через матрицы $\mathbf{H}^{\nu}$, для $\nu = 1, \ldots, m$, либо через матрицу $\mathbf{R}$. Последнее обстоятельство не сильно затрудняет оценку, поскольку мы можем воспользоваться равномерной оценкой спектральной нормы резольвентной матрицы $\|\mathbf{R}\| \leqslant v^{-1}$. Что касается матриц $\mathbf{H}^\nu$, то мы можем воспользоваться следующими представлениями

$$\mathbf{H}^\nu = (\mathbf{H}^{(jk)})^\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu} \left(\frac{Z_{jk}}{\sqrt{n}}\right)^\mu \sum\nolimits^*_{m_1,\ldots,m_{\mu+1}} (\mathbf{H}^{(jk)})^{m_1} \boldsymbol{\Delta}^{(jk)} \ldots \boldsymbol{\Delta}^{(jk)} (\mathbf{H}^{(jk)})^{m_{\mu+1}}, \quad j \neq k, \tag{3.29}$$

где $\sum^*_{m_1,\ldots,m_{\mu+1}}$ означает суммирование по всем таким наборам $m_1,\ldots,m_{\mu+1}$, что $m_1 \geqslant 0, m_{\mu+1} \geqslant 0$, $m_i > 0$ для $i = 2,\ldots,\mu$ и $\sum_{i=1}^{\mu+1} m_i = \nu - \mu$. В случае $j = k$ справедливо следующее представление

$$\mathbf{H}^\nu = (\mathbf{H}^{(jj)})^\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu} \left(\frac{Z_{jj}}{\sqrt{n}}\right)^\mu \sum_{l=1}^{\mu} \sum\nolimits^*_{m_1,\ldots,m_{l+1}} (\mathbf{H}^{(jj)})^{m_1} \boldsymbol{\Delta}^{(jj)} \ldots \boldsymbol{\Delta}^{(jj)} (\mathbf{H}^{(jj)})^{m_{l+1}}, \tag{3.30}$$

где $\sum^*_{m_1,\ldots,m_{l+1}}$ означает уже суммирование по всем таким наборам $m_1,\ldots,m_{l+1}$, что $m_1 \geqslant 0, m_{\mu+1} \geqslant 0, m_i > 0$ для $i = 2,\ldots,l$ и $\sum_{i=1}^{\mu+1} m_i \leqslant \nu - \mu$.

Представления различны поскольку для $\mu \geqslant 2$

$$(\boldsymbol{\Delta}^{(jk)})^\mu = \begin{cases} \mathbf{O}, & \text{для } \ j \neq k, \\ \boldsymbol{\Delta}^{(jk)}, & \text{при } \ j = k. \end{cases} \tag{3.31}$$

Используя представления (3.29) и (3.30), мы можем получить оценки вида

$$\|\mathbf{H}^\nu \mathbf{e}_l\|_2 \leqslant \|(\mathbf{H}^{(jk)})^\nu \mathbf{e}_l\|_2 + \sum_{\mu=1}^{\nu} \left|\frac{Z_{jk}}{\sqrt{n}}\right|^\mu \sum\nolimits^* \prod_{s=1}^{\mu+1} \|(\mathbf{H}^{(jk)})^{m_s} \mathbf{e}_{l_s}\|_2, \tag{3.32}$$

где Σ^* означает суммирование по всем $m_1,\ldots,m_{\mu+1}$, что $m_1 \geqslant 0$, $m_{\mu+1} \geqslant 0$, $m_i > 0$ для $i = 2,\ldots,l$ и $\sum_{i=1}^{\mu+1} m_i \leqslant \nu - \mu$, и $l_1,\ldots,l_{mu+1}$, принимающим значения из множества индексов $\{j,k,j+n,k+n\}$. Неравенство (3.32) влечет

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\,|\widehat{\xi}_{jk}+i\widehat{\eta}_{jk}||Z_{jk}(\varphi)|^2|[\mathbf{Q}_{2,q}^{(jk)}\mathbf{J}\mathbf{R}^2\mathbf{H}^{m-1-q}]_{j,k+n}|\\&\leqslant \mathbf{E}\,|\widehat{\xi}_{jk}+i\widehat{\eta}_{jk}||Z_{jk}(\varphi)|^2|\mathbf{E}\,\|(\mathbf{H}^{(jk)})^{\nu}\mathbf{e}_l\|_2\\&+\sum_{\mu=1}^{\nu}\mathbf{E}\,|\widehat{\xi}_{jk}+i\widehat{\eta}_{jk}||Z_{jk}(\varphi)|^2\left|\frac{Z_{jk}}{\sqrt{n}}\right|^{\mu}\sum{}^{*}\mathbf{E}\prod_{s=1}^{\mu+1}\|(\mathbf{H}^{(jk)})^{m_s}\mathbf{e}_{l_s}\|_2.\end{aligned}\tag{3.33}$$

Далее заметим, что для $\nu=0,\dots,m$

$$\mathbf{E}\,|\widehat{\xi}_{jk}+i\widehat{\eta}_{jk}||Z_{jk}(\varphi)|^2|\left|\frac{Z_{jk}}{\sqrt{n}}\right|^{\mu}\leqslant C\tau_n\sqrt{n}.\tag{3.34}$$

Применяя неравенство Гёльдера, оценку спектральной нормы резольвентных матриц ($\max\{\|\mathbf{R}\|,\,\|\mathbf{R}^{(jk)}\|\}\leqslant v^{-1}$) и лемму 5.2, мы получим оценку

$$\mathbf{E}\,|\widehat{\xi}_{jk}+i\widehat{\eta}_{jk}||Z_{jk}(\varphi)|^2|[\mathbf{Q}_{2,q}^{(jk)}\mathbf{J}\mathbf{R}^2\mathbf{H}^{m-1-q}]_{j,k+n}|\leqslant C(m)\tau_n\sqrt{n}.\tag{3.35}$$

Аналогично мы получим оценки для всех слагаемых $T_1,\dots,,T_6$

$$T_i\leqslant C(m)\tau_n,\quad i=1,\dots,6.\tag{3.36}$$

Последние неравенства влекут

$$A_3\leqslant C(m)\tau_n.\tag{3.37}$$

Заметим, что неравенство 4.15 имеет место равномерно по $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Соотношения (4.13), (4.14) и (4.15), в свою очередь, влекут, что равномерно по $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_n(z,\varphi)=0.\tag{3.38}$$

Принимая во внимание (3.8), мы получим, что

$$s_n(z)-S_n(z)\to 0\tag{3.39}$$

равномерно в любом компактном множестве верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$. Что и доказывает лемму 3.1. □

Заметим, что пока мы рассматриваем гауссовские величины, у которых

$$\mathbf{E}\,|Y_{jk}|^2=\sigma_{jk}^2=\mathbf{E}\,|X_{jk}|^2\mathbb{I}\{|X_{jk}|>\tau_n\sqrt{n}\}-|\mathbf{E}\,X_{jk}\mathbb{I}\{|X_{jk}|>\tau_n\sqrt{n}\}|^2.\tag{3.40}$$

Введем в рассмотрение величины $Y'_{jk} = \sigma_{jk}^{-1} Y_{jk}$. Пусть $\mathbf{Y}' = (Y'_{jk})$. Обозначим преобразования Стилтьеса спектральных функций распределения $F_{\mathbf{Y}}(x)$ и $F_{\mathbf{Y}'}(x)$ матриц $\mathbf{V_Y}$ и $\mathbf{V_{Y'}}$ соответственно $s_n(z)$ и $s_n^{(r)}(z)$. Аналогично неравенству (2.19)мы получим

$$|s_n(z) - s_n^{(r)}(z)| \leqslant Cv^{-2} n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{E}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{H_Y} - \mathbf{H_{Y'}}\|_2^2. \tag{3.41}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\|\mathbf{H_Y}-\mathbf{H_{Y'}}\|_2^2 &\leqslant 2n^{-\frac{1}{2}}\mathbf{E}\,\|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}'\|_2 \leqslant C\Big(\sum_{j,k=1}^{n}(1-\sigma_{jk}^{-1})^2\sigma_{jk}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant C\Big(\sum_{j,k=1}^{n}\mathbf{E}\,|X_{jk}|^2\mathbb{I}\{|X_{jk}|\leqslant \tau_n\sqrt{n}\}\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant CnL_n^{\frac{1}{2}}(\tau_n) \leqslant Cn\tau_n^2.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Отсюда следует, что

$$|s_n(z) - s_n^{(r)}(z)| \leqslant Cv^{-2}\tau_n. \tag{3.43}$$

Следовательно, в дальнейшем мы можем рассматривать одинаково распределенные независимые гауссовские величины с

$$\mathbf{E}\,Y_{jk} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\,|Y_{jk}|^2 = 1.$$

§4. Преобразование Стилтьеса для гауссовских матриц

В этом параграфе мы будем предполагать, что случайные величины Y_{jk} – гауссовские, независимые и имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию $\mathbf{E}\,|Y_{jk}|^2 = 1$. Пусть теперь $\mathbf{H}$ и $\mathbf{J}$ определены равенствами

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Y}^* \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Пусть $\mathbf{V} := \mathbf{H}^m\mathbf{J}$, и пусть $\mathbf{R}(z)$ означает резольвентную матрицу матрицы

$$\mathbf{R} := \mathbf{R}(z) := (\mathbf{V} - z\mathbf{I})^{-1}.$$

В этом параграфе мы покажем, что преобразование Стилтьеса $s_n(z)$ математического ожидания эмпирической спектральной функции распределения $F_n(x)$ матрицы $\mathbf{V}$ удовлетворяет уравнению

$$1 + zs_n(z) + (-1)^{m+1}z^{m-1}s_n^{m+1}(z) = \delta_n(z), \tag{4.2}$$

где $\delta_n(z)$ означает некоторую остаточную функцию, такую, что $\delta_n(z) \to 0$ равномерно по $z = u + iv$ для $v \geqslant \delta > 0$, когда $n \to \infty$.

Мы начнем с очевидного равенства

$$1 + zs_n(z) = \frac{1}{2n}\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{VR}. \tag{4.3}$$

Согласно определению матриц $\mathbf{V}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{J}$ мы можем записать

$$1 + zs_n(z) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}\sum_{j,k=1}^{n}\mathbf{E}\,Y_{jk}\left([\mathbf{H}^{m-1}\mathbf{JR}]_{kj} + [\mathbf{H}^{m-1}\mathbf{JR}]_{j+n,k+n}\right). \tag{4.4}$$

Для упрощения вычислений будем считать, что случайные величины вещественны. Мы будем использовать хорошо известное равенство для гауссовской величины с $\mathbf{E}\,\xi = 0$ и $\mathbf{E}\,\xi^2 = \sigma^2$.

$$\mathbf{E}\,\xi f(\xi) = \sigma^2\mathbf{E}\,f'(\xi), \tag{4.5}$$

которое справедливо для любой функции $f(x)$, такой, что обе стороны равенства определены. В дальнейшем символом $\varepsilon_n(z)$ мы будем обозначать функции, такие, что $|\varepsilon_n(z)| \leqslant C\tau_n^a v^{-b}$, для некоторых положительных постоянных a, b, and C. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n}$ как и ранее обозначают ортонормированный базис $\mathbb{R}^{2n}$. Сначала мы заметим, что

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial Y_{jk}} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k^T + \mathbf{e}_{k+n}\mathbf{e}_{j+n}^T). \tag{4.6}$$

Отсюда несложно получить, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{H}^{m-1}\mathbf{JR}}{\partial Y_{jk}} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{q=0}^{m-2}\mathbf{H}^q(\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k^T + \mathbf{e}_{k+n}\mathbf{e}_{j+n}^T)\mathbf{H}^{m-2-q}\mathbf{JR} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{q=0}^{m-1}\mathbf{H}^{m-1}\mathbf{JRH}^q(\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k^T + \mathbf{e}_{k+n}\mathbf{e}_{j+n}^T)\mathbf{H}^{m-1-q}\mathbf{JR}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Равенства (4.4), (4.5) и (4.7) вместе влекут

$$1 + zs_n(z) = A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + C_1 + C_2 + D_1 + D_2, \tag{4.8}$$

где

$$A_1 := \sum_{q=0}^{m-2}\frac{1}{2n^2}\sum_{j,k=1}^{n}\mathbf{E}\,\mathbf{H}_{kj}^q[\mathbf{H}^{m-2-q}\mathbf{JR}]_{kj},$$

$$A_2 = \sum_{q=0}^{m-2} \frac{1}{2n^2} \sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{E}\,\mathbf{H}^q_{k,k+n}[\mathbf{H}^{m-2-q}\mathbf{JR}]_{j+n,j},$$

$$B_1 := -\sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{2n^2} \sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{E}\,[\mathbf{H}^{m-1}\mathbf{JRH}^q]_{k,j}[\mathbf{H}^{m-1-q}\mathbf{JR}]_{k,j},$$

$$B_2 = -\sum_{q=0}^{m-1} \sum_{k,j=1}^{n} \sigma^2_{jk}\mathbf{E}\,[\mathbf{H}^{m-1}\mathbf{JRH}^{m-1-q}]_{k,k+n}[\mathbf{H}^{m-1-q}\mathbf{JR}]_{j+n,j},$$

$$C_1 = \sum_{q=0}^{m-2} \frac{1}{2n^2} \sum_{k,j=1}^{n} \sigma^2_{jk}\mathbf{E}\,\mathbf{H}^q_{j+n,k+n}[\mathbf{H}^{m-1-q}\mathbf{JR}]_{j+n,k+n},$$

$$C_2 := \sum_{q=0}^{m-2} \frac{1}{2n^2}\mathbf{E} \sum_{j,k=1}^{n} \sigma^2_{jk}\mathbf{H}^q_{j+n,j}[\mathbf{H}^{m-2-q}\mathbf{JR}]_{k,k+n},$$

$$D_1 := -\sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{2n^2}\mathbf{E} \sum_{j,k=1}^{n} \sigma^2_{jk}[\mathbf{H}^{m-1}\mathbf{JRH}^q]_{j+n,k+n}[\mathbf{H}^{m-1-q}\mathbf{JR}]_{j+n,k+n},$$

$$D_2 = -\sum_{q=0}^{m-1} \sum_{k,j=1}^{n} \sigma^2_{jk}\mathbf{E}\,[\mathbf{H}^{m-1}\mathbf{JRH}^{m-1-q}]_{j+n,j}[\mathbf{H}^{m-1-q}\mathbf{JR}]_{k,k+n}.$$

Лемма 4.1. *В условиях теоремы* 1.1 *существует постоянная* $C > 0$, *что*

$$\max\{|A_1|,\, |B_1|\, |C_1|,\, |D_1|\} \leqslant \frac{C}{nv}. \tag{4.9}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить неравенство Гёльдера и воспользоваться леммой 5.1. □

Лемма 4.2. *В условиях теоремы* 1.1 *справедливы равенства*

$$A_2 = C_2 = 0. \tag{4.10}$$

Доказательство. Утверждение немедленно следует из равенства $\mathbf{H}^q_{j,j+n} = 0$. □

Чтобы исследовать асимптотическое поведение B_2 and D_2 мы введем обозначения:

$$f_{\alpha,\beta} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,[\mathbf{H}^{\alpha}\mathbf{JRH}^{\beta}]_{j,j+n}, \quad g_{\alpha,\beta} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,[\mathbf{H}^{\alpha}\mathbf{JRH}^{\beta}]_{j+n,j},$$

$$t_{\alpha} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,[\mathbf{H}^{\alpha}\mathbf{JR}]_{jj}, \quad u_{\alpha} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,[\mathbf{H}^{\alpha}\mathbf{JR}]_{j+n,j+n}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 4.3. *В условиях теоремы* 1.1 *существует постоянная* $C > 0$, *такая, что*

$$|B_2 + \sum_{q=0}^{m-1} f_{m-1,q}g_{m-1-q,0}| \leqslant \frac{C}{nv^4},$$

$$|D_2 + \sum_{q=0}^{m-1} g_{m-1,q}f_{m-1-q,0}| \leqslant \frac{C}{nv^4}. \tag{4.11}$$

Доказательство. Рассмотрим первое из вышеуказанных неравенств. Применяя неравенство Гёльдера, мы получим

$$\begin{aligned}|B_2 &+ \sum_{q=0}^{m-1} f_{m-1,q}g_{m-1-q,0}| \\ &\leqslant \sum_{q=0}^{m-1}\mathbf{E}^{\,\frac12}|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}([\mathbf{H}^{m-1}\mathbf{JRH}^{q}]_{j,j+n} - \mathbf{E}\sum_{j=1}^{n}[\mathbf{H}^{m-1}\mathbf{JRH}^{q}]_{j,j+n})|^2 \\ &\qquad \times \mathbf{E}^{\,\frac12}|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}([\mathbf{H}^{m-1-q}\mathbf{JR}]_{j+n,j} - \mathbf{E}\,[\mathbf{H}^{m-1-q}\mathbf{JR}]_{j+n,j})|^2.\end{aligned}$$

Для завершения доказательства первого из требуемых неравенств достаточно воспользоваться леммами 5.3 и 5.4. Доказательство второго неравенства совершено аналогично. Таким образом лемма доказана. □

Заметим, что

$$f_{00} = g_{00} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,\mathbf{R}_{jj} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,\mathbf{R}_{j+n,j+n} = s_n(z). \tag{4.12}$$

Применяя лемму 4.3 и равенство (4.12), мы можем записать

$$B_2 + D_2 = -\frac{1}{2}s_n(z)(f_{m-1,m-1} + g_{m-1,m-1}) \\ - \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{m-2}(f_{m-1,q}g_{m-1-q,0} + g_{m-1,q}f_{m-1-q,0}) + \varepsilon_n(z). \tag{4.13}$$

Рассмотрим теперь поведение коэффициентов $f_{\alpha,\beta}$, $g_{\alpha,\beta}$, t_α and u_α, для $\alpha,\beta = 0,\dots,m-1$. Используя равенство (4.5) и лемму 5.4, мы получим следующее соотношение для $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$f_{\alpha,\beta} = -\sum_{q=0}^{m-1} f_{\alpha-1,q}t_{m-1+\beta-q} + f_{\alpha-1,\beta-1} + \varepsilon_n(z). \tag{4.14}$$

Легко видеть, что для $q \geqslant m$ выполнены следующие соотношения

$$t_q = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[\mathbf{H}^q]_{j+n,j+n} + z\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[\mathbf{H}^{q-m}\mathbf{R}]_{j+n,j+n} = \delta_q + zf_{q-m,0} + \varepsilon_n(z), \tag{4.15}$$

где $\delta_0 = 1$ and $\delta_q = 0$ for $q > 0$. Используя (4.15), мы можем переписать (4.14) в следующей форме

$$f_{\alpha,\beta} = -z\sum_{q=0}^{\beta-1} f_{\alpha-1,q}f_{\beta-1-q,0} - \sum_{q=\beta}^{m-1} f_{\alpha-1,q}u_{m-1+\beta-q} + \varepsilon_n(z). \tag{4.16}$$

Для $\beta = 0$ мы получим

$$f_{\alpha,0} = -\sum_{q=0}^{m-1} f_{\alpha-1,q}u_{m-1-q} + \varepsilon_n(z). \tag{4.17}$$

Аналогично мы получим равенства

$$g_{\alpha,\beta} = -z\sum_{q=0}^{\beta-1} g_{\alpha-1,q}g_{\beta-1-q,0} - \sum_{q=\alpha}^{m-1} g_{\alpha-1,q}t_{m-1+\beta-q} + \varepsilon_n(z) \tag{4.18}$$

и

$$g_{\alpha,0} = -\sum_{q=0}^{m-1} g_{\alpha-1,q}t_{m-1-q} + \varepsilon_n(z). \tag{4.19}$$

Вновь применяя равенство (4.5) и лемму 5.4, мы получим соотношение для u_α и t_α при $\alpha = 0, \ldots, m-1$:

$$u_\alpha = -f_{\alpha-1,m-1}g_{0,0} - \sum_{q=0}^{m-2} f_{\alpha-1,q}g_{m-1-q,0} + \varepsilon_n(z), \tag{4.20}$$

и

$$t_\alpha = -g_{\alpha-1,m-1}f_{0,0} - \sum_{q=0}^{m-2} g_{\alpha-1,q}f_{m-1-q,0} + \varepsilon_n(z). \tag{4.21}$$

Обозначим $\mathbf{F}$ (соответственно $\mathbf{G}$) $m-1 \times m-1$ матрицу с элементами $F_{p,q} = f_{p-1,q-1}$ (соответственно $\mathbf{G}_{p,q} = g_{p-1,q-1}$), $p, q = 1 \ldots, m$. Let $\mathbf{t}$ (соответственно $\mathbf{u}$) обозначим вектор столбец $(t_1, \ldots, t_{m-1})^T$ (соответственно $(u_1, \ldots, u_{m-1})^T$). Пусть

$$\mathbf{f}_\alpha = (f_{\alpha,0}, , \ldots, f_{\alpha,\alpha-1}, 0, f_{\alpha,\alpha+1}, \ldots, f_{\alpha,m-1})^T$$

и

$$\mathbf{g}_\alpha = (g_{\alpha,0}, \ldots, g_{\alpha,\alpha-1}, 0, g_{\alpha,\alpha+1}, \ldots, g_{\alpha,m-1})^T$$

для $\alpha = 0, \ldots, m-2$. Введем в рассмотрение матрицы

$$\mathbf{M}_u = \begin{pmatrix} -u_0 & -u_1 & \ldots & -u_{m-3} & -u_{m-2} & 0 \\ -zf_{0,0} & -u_0 & \ldots & -u_{m-4} & 0 & -u_{m-2} \\ & & & \ldots & & \\ 0 & -zf_{m-2,0} & -zf_{m-3,0} & \ldots & -zf_{0,0} & -u_0 \end{pmatrix}$$

и

$$\mathbf{M}_t = \begin{pmatrix} -t_0 & -t_1 & \ldots & -t_{m-3} & -t_{m-2} & 0 \\ -zg_{0,0} & -t_0 & \ldots & -t_{m-4} & 0 & -t_{m-2} \\ & & & \ldots & & \\ 0 & -zg_{m-2,0} & -zg_{m-3,0} & \ldots & -zg_{0,0} & -t_0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0\,0 \ldots 0\,1 \\ 0\,0 \ldots 1\,0 \\ \ldots \\ 1\,0 \ldots 0\,0 \end{pmatrix}.$$

Мы введем также вектора

$$\mathbf{y}_\alpha = (-f_{0,\alpha-1}, \ldots, -f_{0,1}, 0, -zf_{0,1}, \ldots, -zf_{m-\alpha,0})^T$$

и

$$\mathbf{w}_\alpha = (-g_{0,\alpha-1}, \ldots, -g_{0,1}, 0, -zg_{0,1}, \ldots, -zg_{m-\alpha,0})^T.$$

Символом $\mathbf{r}_n$ мы будем обозначать величины, такие, что $\|\mathbf{r}_n(z)\| \leqslant \frac{C\tau_n}{v^4}$.
Используя введенные обозначения, мы можем переписать соотношения (4.18)–(4.21) $\alpha = 1, \ldots, m$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\alpha &= g_{\alpha-1,\alpha-1}\mathbf{w}_\alpha + \mathbf{M}_t\mathbf{L}\mathbf{g}_{\alpha-1} + \mathbf{r}_n(z), \\ \mathbf{f}_\alpha &= f_{\alpha-1,\alpha-1}\mathbf{y}_\alpha + \mathbf{M}_u\mathbf{L}\mathbf{f}_{\alpha-1} + \mathbf{r}_n(z), \end{aligned} \tag{4.22}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= -s_n(z)\mathbf{f}_{m-1} + \mathbf{F}\mathbf{L}\mathbf{f}_0 + \mathbf{r}_n(z), \\ \mathbf{u} &= -s_n(z)\mathbf{g}_{m-1} + \mathbf{G}\mathbf{L}\mathbf{g}_0 + \mathbf{r}_n(z). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Далее, мы можем представить соотношения (4.17) и (4.19) в виде

$$\mathbf{f}_0 = -u_0\mathbf{f}_{m-1} + \mathbf{F}\mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{r}_n(z), \quad \mathbf{g}_0 = -t_0\mathbf{g}_{m-1} + \mathbf{G}\mathbf{L}\mathbf{t} + \mathbf{r}_n(z). \tag{4.24}$$

Лемма 4.4. *В условиях теоремы* 1.1 *существует достаточно большая постоянная* $V_0 > 0$*, такая, что для любых* $v \geqslant V_0$ *справедливо неравенство*

$$\max\{\|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{t}\|, \|\mathbf{f}_\alpha\|, \|\mathbf{g}_\alpha\|\} \leqslant \frac{C\tau_n}{v^4}.$$

Доказательство. Заметим, что для $z = u + iv$ с $v > 0$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{w}_\alpha\| + \|\mathbf{y}_\alpha\| \leqslant C(\|\mathbf{f}_0\| + \|\mathbf{g}_0\|). \tag{4.25}$$

Далее, согласно лемме 5.2 и неравенству $\|\mathbf{R}\| \leqslant v^{-1}$, мы имеем

$$\max\{\|\mathbf{F}\|, \|\mathbf{G}\|\} \leqslant \frac{C(m)}{v}.$$

Легко проверить, что

$$\max\{|zf_{\alpha,\beta}|, |zg_{\alpha,\beta}|\} \leqslant C(m)\big(1 + \frac{1}{v}\big).$$

Последнее неравенство влечет

$$\max\{\|\mathbf{M}_u\|, \|\mathbf{M}_t\|\} \leqslant C(m)\big(1 + \frac{1}{v}\big).$$

Соотношения (4.23), (4.24) вместе влекут

$$\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{t}\| \leqslant \frac{C(m)}{v}(\|\mathbf{f}_{m-1}\| + \|\mathbf{g}_{m-1}\|) + \|\mathbf{r}_n(z)\|. \tag{4.26}$$

В свою очередь, из соотношения (4.22) следует, что

$$\|\mathbf{g}_{m-1}\|+\|\mathbf{f}_{m-1}\|\leqslant\frac{C(m)}{v}\sum_{q=1}^{m-1}(\|\mathbf{w}_q\|+\|\mathbf{y}_q\|)+C(\|\mathbf{g}_0\|+\|\mathbf{f}_0\|)+\|r_n(z)\|.$$

Применяя теперь неравенство (4.25), мы получим

$$\|\mathbf{g}_{m-1}\|+\|\mathbf{f}_{m-1}\|\leqslant C(m)(\|\mathbf{f}_0\|+\|\mathbf{g}_0\|)+\|r_n(z)\|. \tag{4.27}$$

Далее, соотношение (4.24) влечет

$$\|\mathbf{f}_0\|+\|\mathbf{g}_0\|\leqslant\frac{C(m)}{v}(\|\mathbf{g}_{m-1}\|+\|\mathbf{f}_{m-1}\|)+\frac{C}{v}(\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{t}\|)+\|r_n(z)\|. \tag{4.28}$$

Неравенства (4.26), (4.27), (4.28) вместе влекут

$$\|\mathbf{g}_{m-1}\|+\|\mathbf{f}_{m-1}\|\leqslant\frac{C(m)}{v}(\|\mathbf{g}_{m-1}\|+\|\mathbf{f}_{m-1}\|)+\|r_n(z)\|. \tag{4.29}$$

Выбирая v_0 так, что $\frac{C(m)}{v}\leqslant\frac{1}{4}$, мы получим

$$\|\mathbf{g}_{m-1}\|+\|\mathbf{f}_{m-1}\|\leqslant\frac{C(m)\tau_n}{v^4}. \tag{4.30}$$

Теперь из неравенства (4.26) следует, что

$$\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{t}\|\leqslant\frac{C(m)\tau_n}{v^4}.$$

Из соотношения (4.25) мы получим

$$\|\mathbf{w}_\alpha\|+\|\mathbf{y}_\alpha\|\leqslant\frac{C\tau_n}{v^4}.$$

Аналогично неравенству (4.30) мы получим

$$\|\mathbf{g}_\alpha\|+\|\mathbf{f}_\alpha\|\leqslant\frac{C\tau_n}{v^4}.$$

Таким образом, лемма доказана.

□

Лемма 4.5. *В условиях теоремы* 1.1 *справедливы равенства*

$$f_{\alpha,\alpha}=-zs(z)f_{\alpha-1,\alpha-1}+\varepsilon_n(z). \tag{4.31}$$

и

$$g_{\alpha,\alpha}=-zs(z)g_{\alpha-1,\alpha-1}+\varepsilon_n(z). \tag{4.32}$$

Доказательство. Мы рассмотрим доказательство только первого равенства, поскольку доказательство второго идентично. В силу (4.16), мы можем записать

$$f_{\alpha,\alpha}=-zf_{0,0}f_{\alpha-1,\alpha-1}-z\sum_{q=0}^{\alpha-2}f_{\alpha-1,q}f_{\alpha-1-q,0}-\sum_{q=\alpha}^{m-1}f_{\alpha-1,q}u_{m-1+\beta-q}+\varepsilon_n(z). \tag{4.33}$$

Из этого равенства следует, что

$$f_{\alpha,\alpha}=-zs(z)f_{\alpha-1,\alpha-1}+\theta|z|\,\|\mathbf{f}_{\alpha-1}\|\,\|\mathbf{f}_0\|+\varepsilon_n(z). \tag{4.34}$$

Применяя лемму 4.4 мы получим требуемое. Таким образом, лемма доказана. □

Равенство (4.13) и лемма 4.5 влекут

$$\begin{aligned}1+zs_n(z)&=-s(z)(f_{m-1,m-1}+g_{m-1,m-1})+\varepsilon_n(z)\\&=(-1)^m z^{m-1}s_n^{m+1}(z)+\varepsilon_n(z).\end{aligned} \tag{4.35}$$

Мы перепишем последнее равенство в виде

$$1+zs_n(z)+(-1)^{m-1}z^{m-1}s_n^{m+1}(z)=\varepsilon_n(z). \tag{4.36}$$

Преобразование Стилтьеса $s(z)$ функции распределения $G(x)$ удовлетворяет уравнению

$$1+zs(z)+(-1)^{m-1}z^{m-1}s^{m+1}(z)=0. \tag{4.37}$$

Последние два соотношения вместе влекут, что для $v\geqslant V_0$

$$|s_n(z)-s(z)|\leqslant\frac{|\varepsilon_n(z)|}{|z+(-z)^{m-1}\sum_{q=0}^m s^q(z)s_n^{m-q}(z)|}. \tag{4.38}$$

Заметим, что

$$\max\{|zs(z)|,\,|zs_n(z)|\}\leqslant C(1+\frac{1}{v}) \tag{4.39}$$

и

$$\max\{|s_n(z)|,\,|s(z)|\}\leqslant\frac{1}{v}. \tag{4.40}$$

Используя эти неравенства, мы получим

$$|(-z)^{m-1}\sum_{q=0}^m s^q(z)s_n^{m-q}(z)|\leqslant\frac{C}{v}. \tag{4.41}$$

Мы можем выбрать $V_1\geqslant V_0$ так, что для любого $v\geqslant V_1$

$$\frac{C}{v}\leqslant\frac{v}{2}. \tag{4.42}$$

Это влечет, что для любого $v \geqslant V_1$

$$|\mathrm{Im}\,\{z + (-z)^{m-1} \sum_{q=0}^{m} s^q(z) s_n^{m-q}(z)\}| \geqslant \frac{v}{2}, \tag{4.43}$$

и

$$|s_n(z) - s(z)| \leqslant \frac{C\tau_n}{v^4}. \tag{4.44}$$

Из неравенства (4.44) мы заключаем, что существует открытое множество с непустой внутренностью, такое, что $s_n(z)$ сходится к $s(z)$ на этом множестве. Заметим, что преобразование Стилтьеса любой случайной величины является аналитической функцией в верхней полуплоскости, кроме того, оно является локально ограниченной функцией на $\mathcal{C}^+$, т.е. $|s_n(z)| \leqslant v^{-1}$ for any $v > 0$. По теореме Монтеля (Montel) (см., например, [7], с. 153, теорема 2.9) сходимость на открытом множестве с непустой внутренностью влечет сходимость $s_n(z)$ к $s(z)$ равномерно в любом компактном множестве $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}^+$. Это, в свою очередь, влечет сходимость $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Что и доказывает теорему 1.1.

§5. Приложения

5.1. Норма Гильберта–Шмидта степени случайной матрицы. Сначала мы рассмотрим независимые случайные величины X_{jk}, удовлетворяющие условиям

$$|\mathbf{E}\, X_{jk}| \leqslant C(\tau_n\sqrt{n})^{-1}, \quad \mathbf{E}\,|X_{jk} - \mathbf{E}\, X_{jk}|^2 \leqslant 1, \quad |X_{jk}| \leqslant \tau_n\sqrt{n}, \tag{5.1}$$

где $\tau_n \to 0$ когда $n \to \infty$, причем последовательность τ_n может быть выбрана сколь угодно медленно сходящейся к 0. Мы исследуем поведение нормы Гильберта–Шмидта $\|\mathbf{X}^m\|_2$ степени матрицы

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_{jk})_{j,k=1}^{n}.$$

Сформулируем следующую лемму.

Лемма 5.1. *Пусть $X_{jk}^{(n)}$, $1 \leqslant j,k \leqslant n$, независимые случайные величины. Предположим, что выполнены условия* (5.1). *Тогда для любого $m \geqslant 1$ и любого $\nu = 0, \ldots, m$, существует постоянная $C(m) > 0$, зависящая только от m, такая, что*

$$n^{-m}\mathbf{E}\,\|\mathbf{X}^\nu(\mathbf{X} - \mathbf{E}\,\mathbf{X})^{m-\nu}\|_2^2 \leqslant C(m)n. \tag{5.2}$$

Доказательство. мы начнем со случая $\nu = 0$. Рассмотрим матрицу $\widetilde{\mathbf{X}} := \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{X} - \mathbf{E}\,\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\widetilde{X}_{jk})_{j,k=1}^{n}$ и норму степени этой матрицы. Мы можем записать

$$\mathbf{E}\,\|\widetilde{\mathbf{X}}\|_2^2 = n^{-m} \sum_{j,k=1}^{n} \sum_{j_1,\dots,j_{m-1}=1}^{n} \sum_{j'_1,\dots,j'_{m-1}=1}^{n} \mathbf{E}\,\widetilde{X}_{jj_1}\widetilde{X}_{j_1j_2}\cdots\widetilde{X}_{j_{m-2}j_{m-1}}\widetilde{X}_{j_{m-1}k} \overline{\widetilde{X}}_{jj'_1}\,\overline{\widetilde{X}}_{j'_1j'_2}\cdots\overline{\widetilde{X}}_{j'_{m-2}j'_{m-1}}\,\overline{\widetilde{X}}_{j'_{m-1}k}. \tag{5.3}$$

Здесь $\overline{a}$ означает комплексно сопряженное к числу a. Произведение под знаком математического ожидания в правой части равенства (5.3) включает μ различных (с точностью до комплексного сопряжения) сомножителей, скажем, $X^{\varepsilon}_{l_1,l'_1},\dots,X^{\varepsilon}_{l_\mu,l'_\mu}$, с кратностями $m_1,\dots,m_\mu$, где $\varepsilon = \pm$, и

$$X^{\varepsilon}_{jk} = \begin{cases} X_{jk}, & \text{если} \quad \varepsilon = + \\ \overline{X}_{jk}, & \text{если} \quad \varepsilon = -. \end{cases} \tag{5.4}$$

Заметим, что $m_1 + \dots + m_\mu = 2m$, и, если $\min\{m_1,\dots,m_\mu\} = 1$, то математическое ожидание соответствующего произведения равно 0, так как $\mathbf{E}\,X^{\varepsilon}_{j,l} = 0$ для любых $j, l = 1,\dots,n$. В частности, отсюда следует, что ненулевые слагаемые в правой части равенства (5.3) появляются только при $\mu \leqslant m$ и $\min\{m_1,\dots,m_\mu\} \geqslant 2$. По предположению (5.1) мы имеем

$$\left|\mathbf{E}\,\widetilde{X}_{jj_1}\widetilde{X}_{j_1j_2}\cdots\widetilde{X}_{j_{m-2}j_{m-1}}\widetilde{X}_{j_{m-1}k}\overline{\widetilde{X}}_{jj'_1}\,\overline{\widetilde{X}}_{j'_1j'_2}\cdots\overline{\widetilde{X}}_{j'_{m-2}j'_{m-1}}\,\overline{\widetilde{X}}_{j'_{m-1}k}\right| \leqslant n^{m-\mu}\tau_n^{2(m-\mu)}. \tag{5.5}$$

Мощность множества индексов с μ различными вершинами l_ν, l'_ν с кратностями $m_1,\dots,m_\mu$ равная $\mathcal{N}(l_1,\dots,l_m,l'_1,\dots,l'_m)$, соответственно удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{N}(l_1,\dots,l_m,l'_1,\dots,l'_m) \leqslant Cn^{\mu+1}. \tag{5.6}$$

Представление (5.3), неравенства (5.5) и (5.6) вместе влекут

$$\mathbf{E}\,\|\widetilde{\mathbf{X}}^m\|_2^2 \leqslant C(m)n. \tag{5.7}$$

Пусть теперь $1 \leqslant \nu \leqslant m$. Введем в рассмотрение величину

$$\Gamma_n^{(\nu)} = \mathbf{E}\,\|\mathbf{X}^\nu(\mathbf{X} - \mathbf{E}\,\mathbf{X})^{m-\nu}\|_2^2. \tag{5.8}$$

Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{E}\,\mathbf{X}$. Легко проверить, что

$$\Gamma_n^{(\nu)} \leqslant C(m) \sum_{\alpha=0}^{\nu} (\mathbf{E}\,\|\mathbf{A}\|_2^2)^{\alpha} \mathbf{E}\,\|(\mathbf{X}-\mathbf{A})^{m-\alpha}\|_2^2. \tag{5.9}$$

Чтобы доказать (5.9) мы рассмотрим представление

$$\mathbf{X}^{\nu} = {\sum}^{*} \mathbf{A}^{m_1}(\mathbf{X}-\mathbf{A})^{m_1'} \cdots \mathbf{A}^{m_\nu}(\mathbf{X}-\mathbf{A})^{m_\nu'}, \tag{5.10}$$

где ${\sum}^{*}$ означает суммирование по всем индексам $m_1, \dots, m_k, m_1', \dots, m_\nu' \geqslant 0$, таким, что $m_1 + \dots + m_\nu + m_1' + \dots + m_\nu' = \nu$. Последнее представление влечет оценку

$$\Gamma_n^{(\nu)} \leqslant C(m) {\sum}^{*} \mathbf{E}\,\|\mathbf{A}^{m_1}(\mathbf{X}-\mathbf{A})^{m_1'} \cdots \mathbf{A}^{m_\nu}(\mathbf{X}-\mathbf{A})^{m_\nu'}\|_2^2. \tag{5.11}$$

Используя то, что для квадратных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ справедливо равенство $\|\mathbf{AB}\|_2 = \|\mathbf{BA}\|_2$ и что $\|\mathbf{A}^{\nu}\|_2 \leqslant \|\mathbf{A}\|_2^{\nu}$, из неравенства (5.11), мы получим (5.9). По предположению (5.1) мы имеем

$$\|\mathbf{A}\|_2^2 \leqslant \frac{CM}{n^2 \tau_n^6}. \tag{5.12}$$

Неравенства (5.7), (5.11), (5.12), и индукционное предположение вместе заканчивают доказательство леммы. □

Мы докажем также следующие оценки.

Лемма 5.2. *Пусть* $X_{jk}^{(n)}$, $1 \leqslant j,k \leqslant n$, *– независимые случайные величины. Предположим, что выполнено* (5.1) *и* $\mathbf{E}\,X_{jk} = 0$. *Тогда для любых* $m, r \geqslant 1$ *и любого* $\nu = 0, \dots, m$ *и* $j = 1, \dots, n$ *существует постоянная* $C(m,r) > 0$, *зависящая только от* m, r, *такая, что*

$$\max\{\mathbf{E}\,\|\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{e}_j\|_2^{2r}, \mathbf{E}\,\|\mathbf{e}_j^T\mathbf{X}^{\nu}\|_2^{2r}\} \leqslant C(m,r). \tag{5.13}$$

Доказательство. Пусть

$$\Gamma_{\nu,j} = \|\mathbf{X}^{\nu}\mathbf{e}_j\|_2. \tag{5.14}$$

Мы можем записать

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu,j}^{2r} = \sum_{k_1,\dots,k_r=1}^{n} \sum_{j_1^{(1)},\dots,j_{\nu-1}^{(1)}=1}^{n} \sum_{j_1^{(1)\prime},\dots,j_{\nu-1}^{(1)\prime}=1}^{n} \cdots \sum_{j_1^{(r)},\dots,j_{\nu-1}^{(r)}=1}^{n} \\ \times \sum_{j_1^{(r)\prime},\dots,j_{\nu-1}^{(r)\prime}=1}^{n} \prod_{q=1}^{r} A(k_q, j_1^{(q)}, \dots, j_{\nu-1}^{(q)}) \overline{A}(k_q, j_1^{(q)\prime}, \dots, j_{\nu-1}^{(q)\prime}), \end{aligned} \tag{5.15}$$

где

$$A(k_q, j_1^{(q)}, \dots, j_{\nu-1}^{(q)}) = X_{k_q j_1^{(q)}} X_{j_1^{(q)} j_2^{(1)}} \cdots X_{j_{\nu-2}^{(q)} j_{\nu-1}^{(q)}} X_{j_{\nu-1}^{(q)} j}. \tag{5.16}$$

Предположим, что множество индексов

$$\mathcal{N} = \cup_{q=1}^{r} \{\{k_q, j_1^{(q)}, \dots, j_{\nu-1}^{(q)}\} \cup {j_1^{(q)}}', \dots, {j_{\nu-1}^{(q)}}'\}$$

состоит из μ различных пар, например, $l_1, l_1', \dots, l_\mu, l_\mu'$ с кратностями $m_1, \dots, m_\mu$, соответственно. Заметим, что $m_1 + \dots + m_\mu = 2qr$, и, если $\min\{m_1, \dots, m_\mu\} = 1$, то соответствующее слагаемое равно нулю, так как $\mathbf{E}\, X_{j,l} = 0$ для всех $j, l = 1, \dots, n$. Это влечет, что $\mu \leqslant m$ и $\min\{m_1, \dots, m_\mu\} \geqslant 2$. По предположению (5.1), мы имеем

$$|\mathbf{E}\, A(k_q, j_1^{(q)}, \dots, j_{\nu-1}^{(q)}) \overline{A}(k_q, {j_1^{(q)}}', \dots, {j_{\nu-1}^{(q)}}'| \leqslant C(\tau_n \sqrt{n})^{2mr-2\mu}. \tag{5.17}$$

Мощность множества множества индексов с μ различными парами l_ν, l_ν' с кратностями $m_1, \dots, m_\mu$, $\mathcal{N}(l_1, \dots, l_m, l_1', \dots, l_m')$, удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{N}(l_1, \dots, l_m, l_1', \dots, l_m') \leqslant Cn^{\mu}. \tag{5.18}$$

Представление (5.3) и неравенства (5.17, (5.18) вместе влекут

$$\mathbf{E}\, \|\mathbf{X}^\nu \mathbf{e}_j\|_2^{2r} \leqslant C(m, r). \tag{5.19}$$

Оценка $\mathbf{E}\, \|\mathbf{e}_j^T \mathbf{X}^\nu\|_2^{2r}$ совершенно аналогична. Таким образом, лемма доказана. □

Лемма 5.3. *В условиях теоремы* 1.1 *справедливо неравенство*

$$\mathbf{E}\, |\frac{1}{n}(\mathrm{Tr}\, \mathbf{R} - \mathbf{E}\, \mathrm{Tr}\, \mathbf{R})|^2 \leqslant \frac{C}{nv^2}. \tag{5.20}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $\mathbf{X}^{(j)}$, полученную из $\mathbf{X}$ заменой элементов j-ой строки нулевыми элементами . Определим также следующие матрицы:

$$\mathbf{H}^{(j)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(j)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{X}^{(j)*} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\mathbf{H}}^{(j)} = \mathbf{H}^{(j)} \mathbf{J}. \tag{5.21}$$

Воспользуемся следующим "ранговым неравенством". Для любых эрмитовых матриц $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ справедлива оценка (см. Бай и Сильверстейн [6], section A.6, теорема A.44, неравенство (A.6.2), стр. 503)

$$|\mathrm{Tr}\, (\mathbf{A} - z\mathbf{I})^{-1} - \mathrm{Tr}\, (\mathbf{B} - z\mathbf{I})^{-1}| \leqslant \frac{\mathrm{rank}(\mathbf{A} - \mathbf{B})}{v}. \tag{5.22}$$

Легко видеть, что

$$\operatorname{rank}(\mathbf{H}^q\mathbf{J} - (\mathbf{H}^{(j)})^q\mathbf{J}) \leqslant 4q. \tag{5.23}$$

Неравенства (5.22) и (5.23) Вместе влекут

$$|\frac{1}{2n}(\operatorname{Tr}\mathbf{R} - \operatorname{Tr}\mathbf{R}^{(j)})| \leqslant \frac{C}{nv}. \tag{5.24}$$

Теперь мы можем применить известную технику мартингального разложения, предложенную Гирко в [8]. Мы введем σ-алгебры

$$\mathcal{F}_j = \sigma\{X_{lk},\, j < l \leqslant n, k = 1, \ldots, n\}$$

и воспользуемся представлением

$$\operatorname{Tr}\mathbf{R} - \mathbf{E}\operatorname{Tr}\mathbf{R} = \sum_{j=1}^{n}(\mathbf{E}_{\,j-1}\operatorname{Tr}\mathbf{R} - \mathbf{E}_{\,j}\operatorname{Tr}\mathbf{R}),$$

где $\mathbf{E}_{\,j}$ означает условное математическое ожидание относительно σ $\mathcal{F}_j$. Поскольку $\mathbf{E}_{\,j-1}\operatorname{Tr}\mathbf{R}^{(j)} = \mathbf{E}_{\,j}\operatorname{Tr}\mathbf{R}^{(j)}$, мы имеем

$$\operatorname{Tr}\mathbf{R} - \mathbf{E}\operatorname{Tr}\mathbf{R} = \sum_{j=1}^{n}(\mathbf{E}_{\,j-1}(\operatorname{Tr}\mathbf{R} - \operatorname{Tr}\mathbf{R}^{(j)}) - \mathbf{E}_{\,j}(\operatorname{Tr}\mathbf{R} - \operatorname{Tr}\mathbf{R}^{(j)})).$$

Остается воспользоваться лишь некоррелированностью слагаемых в правой части последнего равенства и неравенством (5.24). □

Лемма 5.4. *В условиях теоремы* 1.1 *для любого* $q \geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\mathbf{E}\,|\frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}[\mathbf{H}^q\mathbf{J}\mathbf{R}]_{jj+n} - \mathbf{E}\sum_{j=1}^{n}[\mathbf{H}^q\mathbf{J}\mathbf{R}]_{jj+n}\Big)\Big|^2 \leqslant \frac{C}{nv^4}. \tag{5.25}$$

Доказательство. Так же как и в предыдущей лемме, введем в рассмотрение случайные матрицы $\mathbf{X}^{(j)} = \mathbf{X} - \mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^T\mathbf{X}$ и $\mathbf{H}^{(j)} = \mathbf{H} - \mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^T\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{e}_{j+n}\mathbf{e}_{j+n}^T$. Здесь и далее $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ означают вектора ортонормированного базиса $\mathbb{R}^n$. Напомним, что $\mathbf{X}^{(j)}$ получена из матрицы $\mathbf{X}$ заменой элементов j-ой строки нулями. Рассмотрим равенство

$$S_j := \sum_{k=1}^{n}[\mathbf{H}^q\mathbf{J}\mathbf{R}]_{kk+n} - \sum_{k=1}^{n}[(\mathbf{H}^{(j)})^q\mathbf{J}\mathbf{R}^{(j)}]_{kk+n}. \tag{5.26}$$

Используя следующее представление

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^q\mathbf{J}\mathbf{R}-(\mathbf{H}^{(j)})^q\mathbf{J}\mathbf{R}^{(j)}&=\sum_{\nu=0}^{q-1}{\mathbf{H}^{(j)}}^{\nu}(\mathbf{H}-\mathbf{H}^{(j)})\mathbf{H}^{q-1-\nu}\mathbf{J}\mathbf{R}\\&+\sum_{\nu=0}^{m-1}{\mathbf{H}^{(j)}}^{q}\mathbf{J}\mathbf{R}^{(j)}\mathbf{H}^{\nu}(\mathbf{H}-\mathbf{H}^{(j)})\mathbf{H}^{m-1-\nu}\mathbf{J}\mathbf{R},\end{aligned}\tag{5.27}$$

мы получим

$$S_j=S_j^{(1)}+S_j^{(2)},\tag{5.28}$$

где

$$\begin{aligned}S_j^{(1)}&=\sum_{\nu=0}^{q-1}\sum_{k=1}^{n}[{\mathbf{H}^{(j)}}^{\nu}(\mathbf{H}-\mathbf{H}^{(j)})\mathbf{H}^{q-1-\nu}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{kk+n}\\S_j^{(2)}&=\sum_{\nu=0}^{m-1}\sum_{k=1}^{n}[{\mathbf{H}^{(j)}}^{q}\mathbf{J}\mathbf{R}^{(j)}\mathbf{H}^{\nu}(\mathbf{H}-\mathbf{H}^{(j)})\mathbf{H}^{p-1-\nu}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{kk+n}.\end{aligned}\tag{5.29}$$

Применяя теперь

$$\mathbf{H}-\mathbf{H}^{(j)}=\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^T\mathbf{H}+\mathbf{H}\mathbf{e}_{j+n}\mathbf{e}_{j+n}^T,\tag{5.30}$$

мы придем к равенству

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}[{\mathbf{H}^{(j)}}^{\nu}(\mathbf{H}-\mathbf{H}^{(j)})\mathbf{H}^{q-1-\nu}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{kk+n}\\&\quad=\operatorname{Tr}\widehat{\mathbf{J}}{\mathbf{H}^{(j)}}^{\nu}(\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^T\mathbf{H}+\mathbf{H}\mathbf{e}_{j+n}\mathbf{e}_{j+n}^T)\mathbf{H}^{q-1-\nu}\mathbf{J}\mathbf{R}\\&\quad=[\mathbf{H}^{q-\nu}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{J}{\mathbf{H}^{(j)}}^{\nu}]_{jj}+[\mathbf{H}^{q-1-\nu}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{J}{\mathbf{H}^{(j)}}^{\nu}\mathbf{H}]_{j+nj+n}|.\end{aligned}\tag{5.31}$$

Здесь

$$\widehat{J}=\begin{pmatrix}\mathbf{O}&\mathbf{I}\\\mathbf{O}&\mathbf{O}\end{pmatrix}.\tag{5.32}$$

Равенство (5.31) влечет

$$|S_j^{(1)}|\leqslant\sum_{\nu=0}^{q-1}|[\mathbf{H}^{q-\nu}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{J}{\mathbf{H}^{(j)}}^{\nu}]_{jj}|+|[\mathbf{H}^{q-1-\nu}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{J}{\mathbf{H}^{(j)}}^{\nu}\mathbf{H}]_{j+nj+n}|.\tag{5.33}$$

Применяя неравенство Гёльдера, мы получим

$$\mathbf{E}\,|S_j^{(1)}|^2 \leqslant \frac{C}{v^2}\sum_{\nu=0}^{q-1}(\mathbf{E}\,\|\mathbf{e}_j^T\mathbf{H}^{q-\nu}\|_2^2\|{\mathbf{H}^{(j)}}^{\nu}\mathbf{e}_j\|_2^2+\mathbf{E}\,\|\mathbf{e}_{j+n}\mathbf{H}^{q-1-\nu}\|_2^2\|{\mathbf{H}^{(j)}}^{\nu}\mathbf{H}\mathbf{e}_{j+n}\|_2^2). \tag{5.34}$$

Лемма 5.2 и неравенство Гёльдера вместе влекут

$$\mathbf{E}\,|S_j^{(1)}| \leqslant \frac{C}{v^2}. \tag{5.35}$$

Аналогично мы получим оценку

$$\mathbf{E}\,|S_j^{(2)}|^2 \leqslant \frac{C}{v^4}. \tag{5.36}$$

Из неравенств (5.35) и (5.36) следует, что

$$\mathbf{E}\,|S_j|^2 \leqslant \frac{C(v^2+1)}{v^4}. \tag{5.37}$$

Пусть теперь как и ранее $\mathcal{F}_j$ означает σ-алгебру, порожденную случайными величинами X_{lk}, for $1 \leqslant l \leqslant j, 1 \leqslant k \leqslant n$, а $\mathbf{E}_j$ – условное математическое ожидание относительно этой σ-алгебры. Мы можем записать

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\,\Big|\frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^n[\mathbf{H}^q\mathbf{J}\mathbf{R}]_{jj+n}-\mathbf{E}\sum_{j=1}^n[\mathbf{H}^q\mathbf{J}\mathbf{R}]_{jj+n}\Big)\Big|^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n\mathbf{E}\,|\mathbf{E}_j\sum_{k=1}^n[\mathbf{H}^q\mathbf{J}\mathbf{R}]_{kk+n}-\mathbf{E}_{j-1}\sum_{k=1}^n[\mathbf{H}^q\mathbf{J}\mathbf{R}]_{kk+n})|^2 \\
&\leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n\mathbf{E}\,|\sum_{k=1}^n[\mathbf{H}^q\mathbf{J}\mathbf{R}]_{kk+n}-\sum_{k=1}^n[{\mathbf{H}^{(j)}}^q\mathbf{J}\mathbf{R}^{(j)}]_{kk+n})|^2 \\
&\leqslant \frac{C(1+v^2)}{nv^4}.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Таким образом, лемма доказана. □

Лемма 5.5. *В условиях теоремы* 1.1 *справедливо следующее неравенство:*

$$\mathbf{E}\,|\frac{1}{n}(\sum_{j=1}^n\mathbf{R}_{j,j+n}-\mathbf{E}\sum_{j=1}^n\mathbf{R}_{j,j+n})|^2 \leqslant \frac{C}{nv^4}. \tag{5.39}$$

Доказательство. Доказательство подобно доказательству предыдущих лемм. Мы имеем

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\mathbf{R}_{kk+n}-\sum_{k=1}^{n}\mathbf{R}^{(j)}_{kk+n}\\&=\sum_{\nu=0}^{m-1}\sum_{k=1}^{n}[\mathbf{R}^{(j)}{\mathbf{H}^{(j)}}^{\nu}(\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^T\mathbf{H}+\mathbf{H}\mathbf{e}_{j+n}\mathbf{e}_{j+n}^T)\mathbf{H}^{m-1-\nu}\mathbf{R}]_{kk+n}.\end{aligned}\tag{5.40}$$

Применяя неравенство Гёльдера и неравенство $\max\{\|\mathbf{R}\|,\|\mathbf{R}^{(j)}\|\}\leqslant v^{-1}$, мы получим

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=1}^{n}\mathbf{R}_{kk+n}-\sum_{k=1}^{n}\mathbf{R}^{(j)}_{kk+n}\Big|&\leqslant\frac{1}{v^2}\sum_{\nu=0}^{m-1}\|{\mathbf{H}^{(j)}}^{\nu}\mathbf{e}_j\|_2\|\mathbf{e}_j^T\mathbf{H}^{m-\nu}\|_2\\&+\frac{1}{v^2}\sum_{\nu=0}^{m-1}\|\mathbf{e}_{j+n}^T\mathbf{H}^{m-1-\nu}\|_2\|(\mathbf{H}^{(j)})^{\nu}\mathbf{H}\mathbf{e}_{j+n}\|_2.\end{aligned}\tag{5.41}$$

Используя вновь неравенство Гёльдера и лемму 5.2, мы придем к неравенству

$$\mathbf{E}\,\Big|\sum_{k=1}^{n}\mathbf{R}_{kk+n}-\sum_{k=1}^{n}\mathbf{R}^{(j)}_{kk+n}\Big|^2\leqslant\frac{C(m)}{v^4}.\tag{5.42}$$

Для завершения доказательства достаточно применить технику мартингального разложения к $\sum_{k=1}^n R_{kk+n}-\sum_{k=1}^n\mathbf{E}\,R_{kk+n}$ точно так же, как и в предыдущих леммах. Лемма доказана. □

Литература

1. F. Oravecz, *On the powers of Voiculescu's circular element.* — Studia Math. **145**, No. 1 (2001), 85–95.
2. T. Banica, S. Belinschi, M. Capitaine, B. Collins, *Free Bessel laws.* — Preprint. `arXiv:0710.5931`.
3. J. A. Mingo, R. Speicher, *Sharp bounds for sums associated to graphs of matrices.* — Preprint. `arXiv:0909.4277`.
4. Н. В. Алексеев, Ф. Гётце, А. Н. Тихомиров, *О сингулярном спектре степеней и произведений случайных матриц.* — Доклады РАН **433**, No. 1 (2010), 7–9.
5. N. Alexeev, F. Götze, A. N. Tikhomirov, *On the asymptotic distribution of singular values of power of random matrices.* — Lithuan. Math. J. **50**, No. 2 (2010), 121–132.
6. Z. D. Bai, J. W. Silverstein, *Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices.* 2nd ed. Springer, 2010.

7. John B. Conway, *Functions of One Complex Variable* I. 2nd ed. Springer–Verlag, Berlin, 1995.
8. В. Л. Гирко, *Спектральная теория случайных матриц.* — Успехи матем. наук **40**, No. 1(241) (1985), 67–106.

Alexeev N., Götze F., Tikhomirov A. On the asymptotic distribution of the singular values of powers of random matrices.

We consider powers of random matrices with independent entries. Let $X_{ij}, i, j \geqslant 1$, be independent complex random variables with $\mathbf{E}\, X_{ij} = 0$ and $\mathbf{E}\, |X_{ij}|^2 = 1$ and let $\mathbf{X}$ denote an $n \times n$ matrix with $[\mathbf{X}]_{ij} = X_{ij}$, for $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Denote by $s_1^{(m)} \geqslant \ldots \geqslant s_n^{(m)}$ the singular values of the random matrix $\mathbf{W} := n^{-\frac{m}{2}}\mathbf{X}^m$ and define the empirical distribution of the squared singular values by

$$\mathcal{F}_n^{(m)}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{\{s_k^{(m)2} \leqslant x\}},$$

where $I_{\{B\}}$ denotes the indicator of an event B. We prove that that the expected spectral distribution $F_n^{(m)}(x) = \mathbf{E}\,\mathcal{F}_n^{(m)}(x)$ converges under a Lindeberg condition to the distribution function $G^{(m)}(x)$ defined by its moments

$$\alpha_k(m) := \int_{\mathbb{R}} x^k \, dG(x) = \frac{1}{mk+1}\binom{km+k}{k}.$$

Поступило 1 ноября 2012 г.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербургский госуниверситет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: nikita.v.alexeev@gmail.com

Факультет математики,
Университета Билефельда,
Билефельд, Германия
E-mail: goetze@math.uni-bielefeld.de

Отдел математики
КНЦ УрО РАН,
Сыктывкарский государственный университет,
ул. Чернова 3а,
16700 Сыктывкар, Россия
E-mail: sasha-tikh@yandex.ru