Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 407, 2012 г.

В. П. Оревков

ПРАВИЛО СЕЧЕНИЯ В МЕТОДЕ РЕЗОЛЮЦИЙ

Цель этой работы – расширить метод резолюций новым правилом, которое моделирует правило сечения генценовских секвенциальных исчислений. Также будут получены верхние и нижние оценки сложности опровержений с правилом сечения и без этого правила.

§1.

Мы будем использовать традиционное секвенциальное исчисление Г. Генцена со структурными правилами сечение, утончение, сокращение повторений и перестановка (см., например, систему $G1$ из книги [2]).

Пусть D – доказательство в секвенциальном исчислении. *Длиной* D будем называть число различных секвенций в D. Длину D будем обозначать через $l[D]$. Посредством $l^-[D]$ будем обозначать число различных применений двухпосылочных правил в линейной записи D, а посредством $T^-[D]$ будем обозначать число различных узлов в древовидной записи D, в которых применяются двухпосылочные правила.

Формулу A исчисления предикатов будем называть *α-формулой*, если A не содержит импликаций и конъюнкций и отрицание может входить в A только непосредственно перед элементарными формулами. α-формулу будем называть *универсальной*, если она не содержит вхождений квантора $\exists$.

Пусть t – терм. Высота $h[t]$ терма t определяется индукцией по построению t:

(1) если t является переменной или константой, то $h[t] = 0$;
(2) в противном случае

$$h[g(t_1, \ldots, t_n)] = 1 + \max_{i=1}^{n} h[t_i].$$

Ключевые слова: метод резолюций, опровержение, сечение, секвенция, верхняя оценка, нижняя оценка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-01-00760-а).

Пусть D – вывод какого-нибудь дизъюнкта из набора дизъюнктов в методе резолюций. *Длиной* D будем называть число различных дизъюнктов в D. Длину D будем обозначать через $l[D]$. *Высота* D – максимальная высота термов, входящих в дизъюнкты в D. Высоту D будем обозначать через $h[D]$. Посредством $H[D]$ будем обозначать максимальное число дизъюнктов в одной ветви вывода D, а посредством $K[D]$ наибольшее число литер в одном дизъюнкте вывода D.

Пусть A – формула, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – список без повторений свободных параметров Формулы A. *Замыканием* Формулы A будем называть формулу

$$\forall x_1 x_2 \ldots x_n A.$$

Замыкание формулы A будем обозначать посредством $\widetilde{\forall} A$.

Пусть Γ – список формул. Посредством $\widetilde{\forall}\Gamma$ будем обозначать список замыканий формул из списка Γ.

Лемма 1.1. *Каковы бы ни были набор дизъюнктов* Γ *и дизъюнкт* U, *по любому выводу* D *дизъюнкта* U *из* Γ *можно построить доказательство* D' *секвенции* $\widetilde{\forall}\Gamma \to U$, *в котором сечения выполняются только по универсальным* α*-формулам и в котором*

$$l^-[D'] \leqslant 2K[D]l[D].$$

Доказательство. Вывод D дизъюнкта U из Γ перестраивается в секвенциальное доказательство индукцией по $l[D]$. □

Будем говорить, дизъюнкт U *отобразим в дизъюнкт* U' (в терминологии книги [3], U' *является примером* U), если U' можно получить из U в результате подстановки каких-либо термов вместо переменных.

Лемма 1.2. *Каковы бы ни были набор дизъюнктов* $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ *и дизъюнкты* U *и* U_1', *если дизъюнкт* U_1' *отобразим в дизъюнкт* U_1, *то по любому выводу* D *дизъюнкта* U *из набора дизъюнктов* $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ *можно построить дизъюнкт* U' *и вывод* D' *дизъюнкта* U' *из набора дизъюнктов* $\{U_1', U_2, \ldots, U_n\}$, *которые удовлетворяют следующим условиям:*

(1) *дизъюнкт* U' *отобразим в дизъюнкт* U;
(2) *если дизъюнкт* U *участвует в выводе* D, *то дизъюнкт* U' *участвует в выводе* D';
(3) $l[D'] \leqslant l[D]$.

Доказательство. Лемму 1.2 можно доказать индукцией по числу применений правила резолюции в выводе D. □

Пусть W_1 и W_2 – дизъюнкты. В дальнейшем выражение $W_1 \vee W_2$ будет обозначать результат дописывания всех литер дизъюнкта W_2 к дизъюнкту W_1 и сокращения повторения литер, если необходимо.

Лемма 1.3. *Каковы бы ни были набор дизъюнктов* Γ, *и дизъюнкты* U, W_1 *и* W_2, *если дизъюнкт* W_2 *содержит только основные литеры, то по любому выводу* D *дизъюнкта* U *из набора дизъюнктов* Γ, W_1 *можно построить дизъюнкт* U' *и вывод* D' *дизъюнкта* U' *из набора дизъюнктов* $\Gamma, W_1 \vee W_2$, *которые удовлетворяют следующим условиям:*

(1) *дизъюнкт* U' *отобразим в дизъюнкт* $U \vee W_2$,
(2) $l[D'] \leqslant l[D]$.

Доказательство. Лемму 1.3 можно доказать индукцией по числу применений правила резолюции в выводе D. □

Лемма 1.4. *Каковы бы ни были набор дизъюнктов* Γ, *и дизъюнкты* U, W_1 *и* W_2, *если дизъюнкты* W_1 *и* W_2 *не имеют общих переменных, то по любому выводу* D *дизъюнкта* U *из набора дизъюнктов* Γ, W_1 *можно построить дизъюнкт* U' *и вывод* D' *дизъюнкта* U' *из набора дизъюнктов* $\Gamma, W_1 \vee W_2$, *которые удовлетворяют следующим условиям:*

(1) *дизъюнкт* U' *отобразим в дизъюнкт* $U \vee W_2$,
(2) $l[D'] \leqslant l[D]$.

Доказательство. Пусть дизъюнкты W_1 и W_2 не имеют общих переменных; $x_1, x_2, \ldots, x_n (n \geqslant 0)$ – список без повторений всех переменных, входящих в дизъюнкт W_2; D – вывод дизъюнкта U из набора дизъюнктов Γ, W_1; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – попарно различные константы, которые не входят ни в дизъюнкты W_1, W_2, ни в дизъюнкты набора Γ. Заменив в дизъюнкте W_2 переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно на константы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ получим дизъюнкт W_2^*. Далее по лемме 1.3 перестроим вывод D в такой вывод D^* дизъюнкта U^* из набора дизъюнктов $\Gamma, W_1 \vee W_2^*$, что дизъюнкт U^* отобразим в дизъюнкт $U \vee W_2^*$. Так как дизъюнкты W_1 и W_2 не имеют общих переменных, дизъюнкт $W_1 \vee W_2$ отобразим в дизъюнкт $W_1 \vee W_2^*$. Наконец, по лемме 1.2 перестроим вывод D^* в такой вывод D' дизъюнкта U' из набора дизъюнктов $\Gamma, W_1 \vee W_2$, что дизъюнкт U' отобразим в дизъюнкт $U \vee W_2^*$.

Заметим, что константы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не входят в дизъюнкт U'. Следовательно, дизъюнкт U' отобразим в дизъюнкт $U \vee W_2$. $\square$

Лемма 1.5. *Каковы бы ни были набор дизъюнктов* Γ*, дизъюнкт* U *и элементарная формула* E*, по любому выводу* D *дизъюнкта* U *из набора дизъюнктов* $\Gamma, E \vee \neg E$ *можно построить дизъюнкт* U' *и вывод* D' *дизъюнкта* U' *из набора дизъюнктов* Γ*, которые удовлетворяют следующим условиям:*

(1) *дизъюнкт* U' *отобразим в дизъюнкт* U*,*
(2) $l[D'] \leqslant l[D]$.

Доказательство. Лемму 1.5 можно доказать индукцией по числу применений в опровержении D правила резолюции, одной из посылок которых является дизъюнкт $E \vee \neg E$. $\square$

Будем говорить, что дизъюнкт U содержит *контрарную пару,* если в U содержатся в качестве членов дизъюнкта как некоторая элементарная формула, так и отрицание этой формулы.

Лемма 1.6. *Каковы бы ни были набор дизъюнктов* Γ *и дизъюнкт* U*, если дизъюнкт* U *не содержит контрарной пары, то по любому доказательству* D *секвенции* $\widetilde{\forall}\Gamma \to U$*, в котором сечения выполняются только по универсальным* α*-формулам, можно построить дизъюнкт* U'*, который отобразим в дизъюнкт* U*, и вывод* D' *дизъюнкта* U' *из* Γ*, в котором*

$$l[D'] \leqslant T^-[D] + 1.$$

Доказательство. Доказательство D секвенции $\widetilde{\forall}\Gamma \to U$, в котором сечения выполняются только по универсальным α-формулам, перестраивается в вывод D' дизъюнкта U' из Γ с помощью лемм 1.2, 1.3, 1.4 и 1.5 индукцией по $T^-[D]$. При этом свободные переменные секвенции рассматриваются как константы. $\square$

§2.

В качестве основного примера будем рассматривать набор дизъюнктов

$$\left.\begin{array}{c} \neg R(x,y,z) \vee \neg R(z,y,u) \vee R(x,s(y),u), \\ R(x,0,f(x)), \\ \neg R(x,s^n(0),y). \end{array}\right\} C_n$$

Здесь и в дальнейшем выражение $s^n(t)$ обозначает терм

$$\underbrace{s(s(\dots s}_{n \text{ раз}}(t)\dots)),$$

а выражение $f^m(t)$ – терм

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{m \text{ раз}}(t)\dots)).$$

Последовательно порождая единичные дизъюнкты

$$R(x, s(0), f(f(x))),$$
$$\dots,$$
$$R(x, s^n(0), f^{2^n}(x)),$$

мы получим опровержение D_n^* набора C_n.

Заметим, что при $n \geqslant 1$

$$l[D_n^*] = 2n + 4, \qquad h[D_n^*] = 2^n, \qquad H[D_n^*] = 2n + 2, \qquad K[D_n^*] = 3.$$

Замечание 2.1. Можно также построить опровержение D_n^+ набора C_n со следующим (при $n \geqslant 1$) сложностными характеристиками:

$$l[D_n^+] = 2^n + 4, \quad h[D_n^+] = n, \quad H[D_n^+] = 2^n + 2, \quad K[D_n^+] = n + 1.$$

Полученные верхние оценки сложности опровержения набора C_n достаточно близки к нижним оценкам. Нижняя оценка будет получена в следующих двух параграфах.

§3.

Очевидно следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Каковы бы ни были набор дизъюнктов* Γ *и опровержение* D *набора* Γ*, если опровержение* D *записано в виде дерева, то, применяя к дизъюнктам опровержения* D *подстановки основных термов вместо переменных, опровержение* D *можно перестроить в опровержение набора основных примеров* Γ.

Доказательство. Лемму 3.1 можно доказать индукцией по $H[D]$. $\square$

Лемма 3.2. *Каковы бы ни были набор хорновских дизъюнктов* Γ *и основной дизъюнкт* U*, если* U *участвует в опровержении основных примеров набора* Γ*, то все элементарные формулы, которые входят в* U *с отрицанием или без отрицания, выводимы из набора основных примеров* Γ.

Доказательство. Пусть Γ – набор хорновских дизъюнктов, D – опровержение набора основных примеров Γ в древовидной записи. Предположим, что основной дизъюнкт U участвует в D и U содержит элементарную формулу с отрицанием или без отрицания, которая не выводима из набора основных примеров Γ. Так как в пустой дизъюнкт не входит ни одна элементарная формула, можно считать, что в D ниже U в дизъюнкты входят только элементарные формулы, выводимые из набора основных примеров Γ. В этом случае, дизъюнкт U является посылкой применения правила резолюции, одна из отрезаемых литер которого является элементарной формулой E, не выводимой из набора основных примеров Γ. Заметим, что все остальные литеры посылки, содержащей литеру E, являются отрицаниями элементарных формул, выводимых из набора основных примеров Γ. Следовательно, можно построить доказательство элементарной формулы E из набора основных примеров Γ. Мы получили противоречие. $\square$

Лемма 3.3. *Если основная элементарная формула выводима из набора основных примеров* C_n*, то она имеет вид*

$$P(t, s^k(0), f^{2^k}(t)). \tag{1}$$

Доказательство. Построим модель $\mathfrak{M}$.Объектами модели $\mathfrak{M}$ будут основные термы набора C_n. Константа 0 и одноместные функции s и f определяются на этих объектах тривиально. Основная элементарная формула будет истинна в модели $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда она имеет вид (1). Легко показать, что на модели $\mathfrak{M}$ выполняются первые два дизъюнкта набора C_n.

Пусть основная элементарная формула E выводима из набора основных примеров C_n. Так как все дизъюнкты набора C_n хорновские, формула E будет выводима только из первых двух дизъюнктов набора C_n. Следовательно, она будет истинна в модели $\mathfrak{M}$ и иметь вид (1).

$\square$

§4.

Рассмотрим дизъюнкты следующих типов:

Тип A:

$$\neg R(x_0, s^{l_1}(y), x_1) \vee \dots \vee \neg R(x_{k+1}, s^{l_{k+2}}(y), x_{k+2}) \vee R(x_0, s^N(y), x_{k+2}),$$

где

$$\sum_{j=1}^{k+2} 2^{l_j} = 2^N;$$

Тип B:

$$R(x_0, s^L(0), f^M(x_0)),$$

где

$$M = 2^L;$$

Тип C:

$$\neg R(f^{i_0}(x_0), s^{l_1}(0), x_1) \vee \dots \vee \neg R(f^{i_k}(x_k), s^{l_{k+1}}(0), x_{k+1}) \vee \\ \vee R(x_0, s^L(0), f^M(x_{k+1})),$$

где

$$\sum_{j=0}^{k} i_j + \sum_{j=1}^{k+1} 2^{l_j} + M = 2^L;$$

Тип D:

$$\neg R(f^{i_1}(x_0), s^{l_1}(0), x_1) \vee \dots \vee \neg R(f^{i_{k+1}}(x_k), s^{l_{k+1}}(0)), x_{k+1}).$$

Здесь $k, N, L, M, l_1, \dots, l_{k+2}, i_0, \dots, i_{k+1}$ – натуральные числа; y, $x_0, \dots, x_{k+2}$ – предметные переменные.

Заметим, что первый дизъюнкт набора C_n является дизъюнктом типа **A**, второй дизъюнкт – типа **B**, третий дизъюнкт – типа **D**.

Пусть U – дизъюнкт. Если U является дизъюнктом типа **A**, положим

$$\eta[U] = 0 \quad \text{и} \quad \varphi[U] = 2^N.$$

Если U является дизъюнктом типа **B** или **C**, положим

$$\eta[U] = M \quad \text{и} \quad \varphi[U] = 2^L.$$

Если U является дизъюнктом типа **D**, литеру

$$\neg R(f^{i_{k+1}}(x_k), s^{l_{k+1}}(0)), x_{k+1})$$

будем называть *главной литерой дизъюнкта* U и положим

$$\eta[U] = i_{k+1} \quad \text{и} \quad \varphi[U] = \sum_{j=1}^{k+1} i_j + \sum_{j=1}^{k+1} 2^{l_j}.$$

Если U является пустым дизъюнктом, положим

$$\eta[U] = 0 \quad \text{и} \quad \varphi[U] = 0.$$

Легко доказать следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Каковы бы ни были дизъюнкты U_1, U_2 и U_3, если дизъюнкт U_3 получен из дизъюнктов U_1 и U_2 в результате применения правила резолюции без склеек литер и если в U_1 отрезается литера без отрицания, то выполняются условия:*

(1) *если оба дизъюнкта U_1 и U_2 являются дизъюнктами типа* ***A****, то дизъюнкт U_3 также является дизъюнктом типа* ***A****,*

$$\varphi[U_3] \geqslant \varphi[U_1] \quad \text{и} \quad \varphi[U_3] \geqslant \varphi[U_2];$$

(2) *если дизъюнкт U_1 является дизъюнктом типа* ***B*** *или* ***C****, а U_2 – типа* ***A****, то дизъюнкт U_3 является дизъюнктом типа* ***C****,*

$$\varphi[U_3] \geqslant \varphi[U_1] \quad \text{и} \quad \varphi[U_3] \geqslant \varphi[U_2];$$

(3) *если дизъюнкт U_1 является дизъюнктом типа* ***A*** *или* ***C****, а U_2 – типа* ***C****, то дизъюнкт U_3 является дизъюнктом типа* ***C****,*

$$\varphi[U_3] = \varphi[U_2] \geqslant \varphi[U_1];$$

(4) *если дизъюнкт U_1 является дизъюнктом типа* ***B****, а U_2 – типа* ***C****, то дизъюнкт U_3 является дизъюнктом типа* ***B*** *или* ***C****,*

$$\varphi[U_3] = \varphi[U_2] \geqslant \varphi[U_1];$$

(5) *если дизъюнкт U_1 является дизъюнктом типа* ***A****,* ***B*** *или* ***C****, U_2 – типа* ***D*** *и отрезаемая литера в U_2 не является главной, то дизъюнкт U_3 является дизъюнктом типа* ***D****,*

$$\varphi[U_3] = \varphi[U_2] > \varphi[U_1];$$

(6) *если дизъюнкт U_1 является дизъюнктом типа* ***A*** *или* ***C****, U_2 – типа* ***D*** *и отрезаемая литера в U_2 является главной, то дизъюнкт U_3 является дизъюнктом типа* ***D****,*

$$\varphi[U_3] = \varphi[U_2] - \eta[U_1] \quad \text{и} \quad \varphi[U_2] \geqslant \varphi[U_1];$$

(7) *если дизъюнкт U_1 является дизъюнктом типа* $\boldsymbol{B}$, U_2 *– типа* $\boldsymbol{D}$ *и отрезаемая литера в U_2 является главной, то дизъюнкт U_3 является пустым дизъюнктом или дизъюнктом типа* $\boldsymbol{D}$,

$$\varphi[U_3] = \varphi[U_2] - \eta[U_1] - \eta[U_2] \quad \text{и} \quad \varphi[U_2] \geqslant \varphi[U_1].$$

Лемма 4.2. *Если дизъюнкт U получен в результате склейки литер дизъюнкта типа* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ *или* $\boldsymbol{D}$, *то любой основной пример дизъюнкта U содержит отрицание основной элементарной формулы, которая не выводима из набора основных примеров C_n.*

Доказательство. Пусть дизъюнкт U получен в результате склейки литер дизъюнкта типа **A**, **B**, **C** или **D**. Тогда любой основной пример дизъюнкта U содержит цепочку литер вида

$$\neg R(t_0, \theta_0, t_1) \vee \neg R(t_0, \theta_1, t_2) \vee \cdots \vee \neg R(t_k, \theta_k, t_{k+1}),$$

где $k \geqslant 1$; $t_0, t_1, \ldots, t_{k+1}, \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k$ – основные термы; элементарные формулы

$$R(t_0, \theta_0, t_1) \quad \text{и} \quad R(t_k, \theta_k, t_{k+1}) \tag{2}$$

совпадают. Допустим, что все элементарные формулы

$$R(t_0, \theta_0, t_1), R(t_0, \theta_1, t_2), \ldots, R(t_k, \theta_k, t_{k+1}) \tag{3}$$

выводимы из набора основных примеров C_n. Тогда по лемме 3.3

$$h[t_0] < h[t_1] < \ldots, h[t_k] < h[t_{k+1}].$$

Следовательно, элементарные формулы (2) не могут совпадать. Таким образом, одна из формул (3) не выводима из набора основных примеров C_n. □

Из лемм 3.1, 3.2, 4.1 и 4.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.3. *В любом обосновании противоречивости набора дизъюнктов C_n методом резолюций применяются только правила резолюции без склеек литер и каждый дизъюнкт, участвующий в опровержении набора C_n, является пустым дизъюнктом или дизъюнктом типа* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ *или* $\boldsymbol{D}$.

Лемма 4.4. *В любом обосновании D противоречивости набора дизъюнктов C_n методом резолюций*

$$H[D] \cdot h[D] \geqslant 2^{n-1}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть D – обоснование противоречивости набора дизъюнктов C_n методом резолюций. Выделим в D ветвь F,все дизъюнкты в которой не содержат литер без отрицания. Так как все дизъюнкты в наборе C_n хорновские, такая ветвь существует и единственна. Ветвь содержит не более $H[D]$ дизъюнктов. Пусть V – самый верхний дизъюнкт, W – самый низкий дизъюнкт в ветви F. Дизъюнкт V будет третьим дизъюнктом набора C_n и дизъюнктом типа **D**. Следовательно, $\varphi[V] = 2^n$. Дизъюнкт W – пустой дизъюнкт и $\varphi[W] = 0$. Согласно леммам 4.1 и 4.3 все дизъюнкты ветви F, кроме самого низкого дизъюнкта, являются дизъюнктами типа **D**. Очевидно, что для любого дизъюнкта U в опровержении D

$$\eta[U] \leqslant h[D].$$

Отсюда по лемме 4.1 следует

$$2h[D] \cdot H[D] \geqslant \varphi[V].$$

Таким образом, получаем неравенство (4) □

Теорема 1. *В любом обосновании D противоречивости набора дизъюнктов C_n методом резолюций*

$$l[D] > \mathbf{2}^{(n-1)/2} \quad \textit{или} \quad h[D] > \mathbf{2}^{(n-1)/2}.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда

$$2^{n-1} \geqslant l[D] \cdot h[D] > H[D] \cdot h[D].$$

Мы получили противоречие с леммой 4.4. □

§5.

Пусть A – формула, t – терм, свободный для подстановки вместо свободных вхождений переменной x в формулу A. Выражение $[A]^x_t$ будет обозначать результат замены всех свободных вхождений переменной x в формулу A термом t.

Будем говорить, что α-формула A *выводима из дизъюнкта* U, если секвенцию $\to A$ можно вывести из секвенции $\to \overline{U}$, применяя только правила введения дизъюнкции и кванторов $\forall$ и $\exists$ в сукцедент, а также структурные правила сокращения повторений и утончения в сукцеденте. Здесь посредством $\overline{U}$ обозначен список всех литер дизъюнкта U.

В нашем случае, правило введения дизъюнкции в сукцедент имеет вид

$$\frac{\to \Delta, A, B, \Pi}{\to \Delta, (A \vee B), \Pi} \to \vee,$$

где Δ и Π – конечные списки α-формул, а A и B α-формулы.

Правило введения квантора $\forall$ в сукцедент имеет вид

$$\frac{\to \Delta, [A]^x_a, \Pi}{\to \Delta, \forall x A, \Pi} \to \forall,$$

где переменная a как терм свободна для подстановки вместо свободных вхождений переменной x в формулу A и переменная a не входит свободно в формулы списка Δ, Π и в формулу $\forall x A$.

Правило введения квантора $\to \exists$ в сукцедент имеет вид

$$\frac{\to \Delta, [A]^x_t, \Pi}{\to \Delta, \exists x A, \Pi} \to \exists,$$

где терм t свободен для подстановки вместо свободных вхождений переменной x в формулу A.

Структурные правила сокращения повторений и утончения в сукцеденте имеют вид

$$\frac{\to \Delta, A, \Pi, A, \Xi}{\to \Delta, A, \Pi, \Xi}; \qquad \frac{\to \Delta, \Pi}{\to \Delta, A, \Pi}.$$

Пример 1. Выводом α-формулы

$$\forall x \exists y R(x, s(0), y)$$

из дизъюнкта

$$R(x, s(0), f(f(x)))$$

является следующая последовательность секвенций

$$\to R(x, s(0), f(f(x)));$$
$$\to \exists y R(x, s(0), y);$$
$$\to \forall x \exists y R(x, s(0), y).$$

Пример 2. Выводом α-формулы

$$\forall y (\exists z \forall u \neg R(z, y, u) \vee \forall x \exists u R(x, s(y), u)).$$

из дизъюнкта

$$\neg R(x, y, z) \vee \neg R(z, y, u) \vee R(x, s(y), u)$$

является следующая последовательность секвенций

$$\to \neg R(x,y,z),\ \neg R(z,y,u),\ R(x,s(y),u);$$
$$\to \neg R(x,y,z),\ \neg R(z,y,u),\ \exists u R(x,s(y),u);$$
$$\to \neg R(x,y,z),\ \forall u \neg R(z,y,u),\ \exists u R(x,s(y),u);$$
$$\to \neg R(x,y,z),\ \exists z \forall u \neg R(z,y,u),\ \exists u R(x,s(y),u);$$
$$\to \forall u \neg R(x,y,u),\ \exists z \forall u \neg R(z,y,u),\ \exists u R(x,s(y),u);$$
$$\to \exists z \forall u \neg R(z,y,u),\ \exists z \forall u \neg R(z,y,u),\ \exists u R(x,s(y),u);$$
$$\to \exists z \forall u \neg R(z,y,u),\ \exists u R(x,s(y),u);$$
$$\to (\exists z \forall u \neg R(z,y,u) \vee \exists u R(x,s(y),u));$$
$$\to \forall y (\exists z \forall u \neg R(z,y,u) \vee \forall x \exists u R(x,s(y),u)).$$

§6.

Правило сечения для метода резолюций.

Пусть U – дизъюнкт. Допустим, что α-формула A выводима из дизъюнкта U.

Предположим, что скулемовской стандартной формой α-формулы A является дизъюнкт U^*. Этот дизъюнкт U^* будем называть *результатом применения правила сечения для метода резолюций к дизъюнкту* U.

Пусть Γ – набор дизъюнктов, U – дизъюнкт. Выражение $\Gamma \vdash U$ будет означать, что дизъюнкт U выводим из набора Γ, а выражение $\Gamma \vdash$ будет означать, что пустой дизъюнкт выводим из набора Γ.

Теорема 2. *Каков бы ни был набор дизъюнктов* Γ*, если существует вывод пустого дизъюнкта из* Γ *с правилом сечения, то существует вывод пустого дизъюнкта из* Γ *и без сечения.*

Доказательство. Пусть D – вывод пустого дизъюнкта из набора дизъюнктов Γ с правилом сечения, $U_1, U_2, \ldots, U_n$ – все посылки применений правила сечения в D. Теорему будем доказывать индукцией по n. База индукции ($n = 0$) тривиальна.

Предположим, что $n \geqslant 1$, при всех $i (1 \leqslant i \leqslant n)$ α-формула A_i выводима из дизъюнкта U_i и её скулемовская стандартная форма дизъюнкт U_i^* является результатом применения правила сечения для метода резолюций к дизъюнкту U_i. Тогда

$$\Gamma \vdash U_1; \quad \Gamma, U_1^* \vdash U_2; \quad \cdots \quad \Gamma, U_1^*, U_2^*, \ldots, U_{n-1}^* \vdash U_n;$$

$$\Gamma, U_1^*, U_2^*, \ldots, U_n^* \vdash .$$

Следовательно, по лемме 1.1 выводимы секвенции

$$\widetilde{\forall}\Gamma, \widetilde{\forall}U_1^*, \widetilde{\forall}U_2^*, \ldots, \widetilde{\forall}U_{n-1}^* \to U_n \quad \text{и} \quad \widetilde{\forall}\Gamma, \widetilde{\forall}U_1^*, \widetilde{\forall}U_2^*, \ldots, \widetilde{\forall}U_n^* \to .$$

Так как α-формула A_n выводима из дизъюнкта U_n, будет выводима и секвенция

$$\widetilde{\forall}\Gamma, \widetilde{\forall}U_1^*, \widetilde{\forall}U_2^*, \ldots, \widetilde{\forall}U_{n-1}^* \to A_n.$$

Заметим, что скулемовские функции, которые были введены при получении скулемовской стандартной формы U_n^* α-формулы A_n, не содержатся в формулах $\widetilde{\forall}\Gamma, \widetilde{\forall}U_1^*, \widetilde{\forall}U_2^*, \ldots, \widetilde{\forall}U_{n-1}^*$. Отсюда следует, что выводима секвенция

$$\widetilde{\forall}\Gamma, \widetilde{\forall}U_1^*, \widetilde{\forall}U_2^*, \ldots, \widetilde{\forall}U_{n-1}^*, A_n \to .$$

Применив правило сечения для секвенциального исчисления, докажем секвенцию

$$\widetilde{\forall}\Gamma, \widetilde{\forall}U_1^*, \widetilde{\forall}U_2^*, \ldots, \widetilde{\forall}U_{n-1}^* \to .$$

Следовательно, по лемме 1.6 получаем

$$\Gamma, U_1^*, U_2^*, \ldots, U_{n-1}^* \vdash .$$

Таким образом, построен вывод пустого дизъюнкта из набора дизъюнктов Γ с $n-1$ применением правила сечения. $\square$

§7.

Пример 3. Дизъюнкт $R(x, s(0), f(f(x)))$ выводим из набора C_n. α-формула $\forall x \exists y R(x, s(0), y)$ выводима из дизъюнкта

$$R(x, s(0), f(f(x))).$$

Введем скулемовскую функцию f_1. Дизъюнкт $R(x, s(0), f_1(x))$ является результатом применения правила сечения для метода резолюций к дизъюнкту $R(x, s(0), f(f(x)))$.

Добавим к ранее полученным дизъюнктам дизъюнкт

$$R(x, s(0), f_1(x)).$$

Далее продолжим построение вывода пустого дизъюнкта в методе резолюций с правилом сечения следующим образом.

$$\neg R(f_1(x), s(0), u) \vee R(x, s(s(0)), u),$$
$$R(x, s(s(0)), f_1(f_1(x))),$$
$$R(x, s(s(0)), f_2(x)),$$
$$\dots$$
$$\neg R(f_{n-1}(x), s^{n-1}(0), u) \vee R(x, s^n(0), u),$$
$$R(x, s^n(0), f_{n-1}(f_{n-1}(x))).$$

Здесь $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ – новые скулемовские функции. Полученное таким образом опровержение набора C_n обозначим через D_n^+. Очевидно, что

$$l[D_n^+] = 3n + 4, \qquad h[D_n^+] = n.$$

Пример 4. Предположим, что

$$n = 2^k.$$

Дизъюнкт

$$\neg R(x, y, z) \vee \neg R(z, y, u) \vee R(x, s(y), u)$$

содержится в наборе C_n. Из этого дизъюнкта выводима α-формула

$$\forall y(\exists z \forall u \neg R(z, y, u) \vee \forall x \exists u R(x, s(y), u)).$$

Введём скулемовские функции g и h. Добавим к исходным дизъюнктам дизъюнкт

$$\neg R(g(y), y, u) \vee R(x, s(y), h(y, x)).$$

Далее будем последовательно получить дизъюнкты

$$\neg R(g(y), y, u) \vee R(x, s(s(y)), h(s(y), x)),$$
$$\dots$$
$$\neg R(g(y), y, u) \vee R(x, s^{2^i}(y), h(x, s^{2^i-1}(y))),$$
$$\dots$$
$$\neg R(g(y), y, u) \vee R(x, s^n(y), h(x, s^{n-1}(y))).$$

Наконец получим дизъюнкт

$$R(x, s^n(0), h(x, s^{n-1}(0))).$$

Мы получили вывод D_n^{∇} пустого дизъюнкта в методе резолюций с правилом сечения. Очевидно, что

$$l[D_n^{\nabla}] = \log_2 n + 6 \qquad h[D_n^{\nabla}] = n.$$

Замечание 7.1. Используя технику схем доказательств из книги [1], можно доказать, что каково бы ни было доказательство D секвенции $\widetilde{\forall} C_n \to$, для бесконечно многих натуральных n

$$l[D] \geqslant \frac{\log_2 n}{10 \log_2 \log_2 n}.$$

§8.

Лемма 8.1. *Каковы бы ни были набор дизъюнктов* Γ*, дизъюнкт* U *и вывод* D *дизъюнкта* U *из набора* Γ*, в каждую литеру вывода* D *отобразима какая-нибудь литера одного из дизъюнктов набора* Γ*, участвующего в выводе* D*.*

Доказательство. Лемму 8.1 можно доказать индукцией по числу дизъюнктов в выводе D. □

Лемма 8.2. *Каковы бы ни были набор дизъюнктов* Γ*, дизъюнкт* U *и вывод* D *дизъюнкта* U *из набора* Γ*, каждая литера, входящая в какой-нибудь дизъюнкт вывода* D*, отобразима в литеру дизъюнкта* U *или отобразима в отрезаемую литеру какого-нибудь применения правила резолюции в* D*.*

Доказательство. Лемму 8.2 можно доказать индукцией по числу дизъюнктов в выводе D дизъюнкта U из набора Γ. □

Пусть Γ – набор дизъюнктов, L и V – литеры. Будем говорить, что *литера* L *зацепляется с литерой* V, если выполняются условия:

(1) одна из литер V или L начинается с отрицания,
(2) одна из литер V или L не содержит отрицания,
(3) элементарные формулы литер V и L унифицируемы.

Будем говорить, что литера L *зацепляется с* Γ, если в одном из дизъюнктов набора Γ содержится литера, которая зацепляется с L.

Лемма 8.3. *Каковы бы ни были набор дизъюнктов* Γ *и опровержение* D *набора* Γ*, каждая литера, входящая в какой-нибудь дизъюнкт опровержения* D*, зацепляется с участвующим в опровержении* D *дизъюнктом набора* Γ*.*

Доказательство. Пусть D – опровержение набора дизъюнктов Γ и L – литера, входящая в какой-нибудь дизъюнкт опровержения D. По лемме 8.2 литера L отобразима в отрезаемую литеру применения правила резолюции в D. По лемме 8.1 в отрезаемую литеру из другой посылки этого применения отобразима литера одного из дизъюнктов набора Γ. Следовательно, литера L зацепляется с Γ. □

Будем говорить, что литера L является *критической литерой* ***I*** *рода для набора* Γ, если литера L не зацепляется с Γ.

Лемма 8.4. *Каковы бы ни были набор дизъюнктов* Γ *и дизъюнкт* U*, если дизъюнкт* U *содержит критическую литеру* ***I*** *рода для набора* Γ*, то в любом опровержении набора дизъюнктов* Γ, U *не участвует дизъюнкт* U*.*

Доказательство. Пусть D – опровержение набора дизъюнктов Γ, U. Предположим, что дизъюнкт U участвует в опровержении D. Допустим, что литера L содержится в дизъюнкте U и является критической литерой **I** рода для набора Γ. По лемме 1.2 построим такое опровержение D' набора дизъюнктов Γ, L, что в D' участвует дизъюнкт L. Заметим, что литера L является критической литерой **I** рода для набора Γ, L. Мы получили противоречие с леммой 8.3. □

Будем говорить, что литера L является *критической литерой* ***II*** *рода для набора* Γ, если в любом дизъюнкте, полученном в результате применения правила резолюции к дизъюнкту L и какому-нибудь дизъюнкту из набора Γ, содержится литера, которая является критической литерой **I** рода для набора Γ и которая не зацепляется с L.

Лемма 8.5. *Каковы бы ни были набор дизъюнктов* Γ *и дизъюнкт* U*, если дизъюнкт* U *содержит критическую литеру* ***II*** *рода для набора* Γ*, то в любом опровержении набора дизъюнктов* Γ, U *не участвует дизъюнкт* U*.*

Доказательство. Пусть D – опровержение набора дизъюнктов Γ, U. Предположим, что дизъюнкт U участвует в опровержении D. Допустим, что литера L содержится в дизъюнкте U и является критической литерой **II** рода для набора Γ. По лемме 1.2 построим такое опровержение D' набора дизъюнктов Γ, L, что в D' участвует дизъюнкт L. Опровержение D' по лемме 3.1 перестроим в опровержение D^* набора основных примеров дизъюнктов Γ, L. Заметим, что в опровержении D^* участвует основной пример L^* дизъюнкта L. Тогда по

лемме 8.3 L^* зацепляется с основным примером U^* одного из дизъюнктов набора Γ. Так как L является критической литерой **II** рода для набора Γ, дизъюнкт U^* содержит критическую литеру **I** рода для набора основных примеров дизъюнктов Γ, L. Мы получили противоречие с леммой 8.3. $\square$

Пример 5. Формула

$$\exists xyzR(x, y, z)$$

выводима из дизъюнкта

$$R(x, 0, f(x))). \tag{5}$$

Введем скулемовские константы a, b и c. Дизъюнкт

$$R(a, b, c) \tag{6}$$

является результатом применения правила сечения для метода резолюций к дизъюнкту (5).

Заметим, что в любом дизъюнкте, полученном в результате применения правила резолюции к дизъюнкту (6) и к какому-нибудь дизъюнкту из набора C_n, содержится литера, которая является критической литерой **I** рода для набора C_n и которая не зацепляется с литерой $R(a, b, c)$. Следовательно, дизъюнкт (6) содержит критическую литеру **II** рода для набора C_n. Согласно лемме 8.5, дизъюнкт (6) не участвует в каком-либо опровержении набора C_n.

Таким образом, дизъюнкт (6) не следует использовать при поиске опровержения набора C_n.

Литература

1. V. P. Orevkov, *Complexity of proofs and their transformations in axiomatic theories.* — Amer. Math. Soc. (1993).
2. С. К. Клини, *Введение в метаматематику.* ИЛ, М., 1957.
3. Ч. Чень, Р. Ли, *Математическая логика и автоматическое доказательство теорем.* Наука, М., 1983.

Orevkov V. P. Cut for resolution method.

The aim of this talk is to extended Resolution Method by new rule, which simulate cut. We also will obtain upper and lower bounds on the complexity of refutation with and without this rule.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: orevkov@pdmi.ras.ru

Поступило 16 апреля 2012 г.