Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 407, 2012 г.

А. А. Владимиров

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

§1. Введение

1. Основной целью настоящей статьи является характеризация класса равномерно непрерывных отображений компактных конструктивных метрических пространств, не связанная с предварительными явными предположениями о каких-либо свойствах непрерывности таких отображений. При этом, в отличие от известных [1] теорем равномерной непрерывности, устанавливаемых в рамках теории заполнений, мы не намерены привлекать также и предположение о возможности распространения рассматриваемых функций на псевдоточки.

В дальнейшем мы всегда, не оговаривая этого особо, будем исходить из конструктивного понимания математических суждений, как оно даётся ступенчатой семантической системой А. А. Маркова [2, 3].

2. Термин "множество" мы далее будем рассматривать как сокращение для термина "однопараметрическая формула логико-математического языка" (см., например, [4, §7], [5, Введение, 7]). Знак равенства "=", связывающий два множества, мы будем истолковывать как указание на равнообъёмность этих множеств. Для записи отношения принадлежности конструктивного объекта множеству и отношения вложения одного множества в другое мы будем использовать стандартные теоретико-множественные символы "$\in$" и "$\subseteq$" (см., например, [5, Введение, 7]).

3. Термины "вещественное число" и "метрическое пространство" мы далее будем использовать в качестве сокращений для терминов "конструктивное вещественное число" и "конструктивное метрическое пространство с непустым носителем". Определения этих понятий могут быть найдены в [5, Гл. 2, §2] и [5, Гл. 9, §1], соответственно.

Ключевые слова: конструктивное метрическое пространство, компактность, расстояние Хаусдорфа, равномерная непрерывность.

Для обозначения *носителя* метрического пространства X мы будем использовать запись $\mathfrak{S}_X$, а для обозначения *метрического алгорифма* этого пространства – запись ρ_X.

Термин "предельная точка подмножества $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}_X$" мы будем связывать с точками $x \in \mathfrak{S}_X$, внутри любой окрестности которых квазиосуществима некоторая точка $x' \in \mathfrak{A}$ (см., например, [5, Гл. 9, §3, Определение 4]). Соответственно, термин "замкнутое подмножество" мы будем связывать с подмножествами, содержащими все свои предельные точки.

Знак равенства "=", связывающий две точки некоторого метрического пространства, мы будем истолковывать как указание на обращение в нуль расстояния между этими точками.

4. Через $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^+$ мы будем обозначать, соответственно, множество вещественных чисел и множество положительных вещественных чисел. Через $\mathbf{R}$ мы будем обозначать метрическое пространство с носителем $\mathbb{R}$ и обычным метрическим алгорифмом $\rho_{\mathbf{R}}(x, x') \rightleftharpoons |x - x'|$.

§2. Пространство непустых компактов

1. Пусть X – полное метрическое пространство. Для произвольных двух непустых списков $\zeta \rightleftharpoons \{\zeta_k\}_{k=1}^n$ и $\eta \rightleftharpoons \{\eta_l\}_{l=1}^m$ точек пространства X может быть конструктивно определено *расстояние Хаусдорфа*

$$h_X(\zeta, \eta) \rightleftharpoons \sup\Big(\sup_{k\in[1,n]} \inf_{l\in[1,m]} \rho_X(\zeta_k, \eta_l), \sup_{l\in[1,m]} \inf_{k\in[1,n]} \rho_X(\eta_l, \zeta_k)\Big). \qquad (1)$$

Результат конструктивного пополнения множества всевозможных непустых списков точек пространства X по расстоянию (1) мы в дальнейшем будем называть *пространством непустых компактов* пространства X и обозначать через $\mathfrak{c}(X)$. Такой способ введения понятия компакта в рамках конструктивного математического анализа указан, в частности, в работе [6, 4.5]. Целью настоящего параграфа является описание некоторых свойств пространства $\mathfrak{c}(X)$, которые будут использованы нами при доказательстве основного результата статьи. Приводимые в настоящем параграфе утверждения не претендуют в полной мере на новизну (в частности, утверждение 4.1 в несколько других терминах упоминается уже в работе [7, §11.2]).

2. Рассмотрим алгорифм c_X, сопоставляющий произвольной паре непустых списков $\zeta \rightleftharpoons \{\zeta_k\}_{k=1}^{n}$ и $\eta \rightleftharpoons \{\eta_k\}_{k=1}^{m}$ точек пространства X список $\theta \rightleftharpoons \{\theta_k\}_{k=1}^{n+m}$ вида

$$\theta_k \rightleftharpoons \begin{cases} \zeta_k & \text{при } k \leqslant n, \\ \eta_{k-n} & \text{при } k > n, \end{cases} \tag{2}$$

т. е. результат конкатенации списков ζ и η. Для любых четырёх непустых списков ζ, η, ζ' и η' точек пространства X с очевидностью выполняется соотношение

$$h_X(c_X(\zeta,\eta), c_X(\zeta',\eta')) \leqslant \sup\bigl(h_X(\zeta,\zeta'),\, h_X(\eta,\eta')\bigr). \qquad [(2),\ (1)] \tag{3}$$

Тем самым, алгорифм c_X допускает продолжение по непрерывности (см., например, [7, §10.2]) до конструктивной бинарной операции $\cup : \mathfrak{c}(X) \times \mathfrak{c}(X) \to \mathfrak{c}(X)$ *объединения* непустых компактов. При этом на основе предельного перехода легко устанавливается справедливость следующих утверждений:

2.1. *Операция объединения непустых компактов является сочетательной и перестановочной* [(2), (1)].

2.2. *Пусть K_1, K_2, K_1' и K_2' – четыре точки пространства $\mathfrak{c}(X)$. Тогда выполняется соотношение*

$$\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K_1 \cup K_2, K_1' \cup K_2') \leqslant \sup\bigl(\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K_1, K_1'),\, \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K_2, K_2')\bigr). \qquad [(3)]$$

3. Компакт $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$ мы будем называть *мажорирующим* компакт $K' \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$, если выполняется равенство $K' \cup K = K$. Утверждение о мажорировании компакта K' компактом K мы будем сокращённо записывать в виде $K' \leqslant K$.

Точку $x \in \mathfrak{S}_X$ мы будем называть *инцидентной* компакту $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$, если одночленный список $\{x\}$ мажорируется компактом K. Множество всех точек пространства X, инцидентных компакту $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$, мы будем обозначать через $\mathfrak{M}(K)$. При этом имеют место следующие факты:

3.1. *Пусть $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$. Тогда множество $\mathfrak{M}(K)$ является замкнутым* [2.2, (1)].

3.2. *Пусть* $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$, $x \in \mathfrak{M}(K)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, *и пусть* $\zeta \rightleftharpoons \{\zeta_k\}_{k=1}^n$ – *непустой список точек пространства* X, *удовлетворяющий соотношению* $\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K,\zeta) < \varepsilon$. *Тогда осуществим индекс* $k \in [1,n]$, *удовлетворяющий соотношению* $\rho_X(x,\zeta_k) < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть η – непустой список точек пространства X со свойством

$$\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K,\eta) < \varepsilon - \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K,\zeta). \tag{4}$$

Тогда выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \rho_{\mathfrak{c}(X)}(\{x\}\cup\eta,\zeta) &\leqslant \rho_{\mathfrak{c}(X)}(\{x\}\cup\eta,\{x\}\cup K) + \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K,\zeta) \\ &\leqslant \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K,\eta) + \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K,\zeta) && [2.2] \\ &< \varepsilon, && [(4)] \end{aligned}$$

означающие осуществимость внутри ε-окрестности точки x некоторой точки из списка ζ [(2), (1)]. □

3.3. *Пусть* $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, *и пусть* $\zeta \rightleftharpoons \{\zeta_k\}_{k=1}^n$ – *непустой список точек пространства* X, *удовлетворяющий соотношению* $\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K,\zeta) < \varepsilon$. *Тогда при произвольно фиксированном* $k \in [1,n]$ *осуществима точка* $x \in \mathfrak{M}(K)$, *удовлетворяющая соотношению* $\rho_X(x,\zeta_k) < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\{\eta_l\}_{l=1}^\infty$ – сходящаяся в пространстве $\mathfrak{c}(X)$ к компакту K последовательность непустых списков точек пространства X, обладающая свойством

$$(\forall l \geqslant 1) \qquad \rho_{\mathfrak{c}(X)}(\eta_l,\eta_{l+1}) < 2^{-l-1}. \tag{5}$$

Зафиксируем номер $m \geqslant 1$, удовлетворяющий соотношению

$$2^{-m+1} < \varepsilon - \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K,\zeta), \tag{6}$$

и рассмотрим последовательность $\{x_l\}_{l=1}^\infty$ точек пространства X со следующими свойствами:

3.3.1. Точка x_1 удовлетворяет соотношению $\rho_X(x_1,\zeta_k) < \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K,\zeta) + 2^{-m}$ и принадлежит списку η_m.

3.3.2. При любом $l \geqslant 1$ точка x_{l+1} удовлетворяет соотношению $\rho_X(x_l,x_{l+1}) < 2^{-m-l}$ и принадлежит списку η_{m+l}.

Осуществимость такой последовательности $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$ гарантируется условием (5) и определением (1). Для завершения доказательства теперь остаётся заметить, что точка $x \rightleftharpoons \lim\limits_{l\to\infty} x_l$ удовлетворяет неравенству $\rho_X(x,\zeta_k) < \varepsilon$ [3.3.1, 3.3.2, (6)] и равенствам

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{c}(X)}(\{x\}\cup K, K) &= \lim_{l\to\infty} \rho_{\mathfrak{c}(X)}(\{x_{l+1}\}\cup \eta_{m+l}, \eta_{m+l}) \\ &= 0, \qquad\qquad [3.3.2,\ (2),\ (1)]\end{aligned}$$

означающим выполнение соотношения $x \in \mathfrak{M}(K)$. □

3.4. *Пусть $K_1, K_2 \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$, $x \in \mathfrak{M}(K_1 \cup K_2)$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Тогда внутри ε-окрестности точки x осуществима или точка $x' \in \mathfrak{M}(K_1)$, или точка $x' \in \mathfrak{M}(K_2)$.*

Доказательство. Пусть ζ_1 и ζ_2 – два непустых списка точек пространства X, удовлетворяющих соотношению

$$(\forall k \in \{1,2\}) \qquad \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K_k, \zeta_k) < \varepsilon/2. \tag{7}$$

Тогда выполняется соотношение

$$\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K_1 \cup K_2, \zeta_1 \cup \zeta_2) < \varepsilon/2, \qquad [2.2,\ (7)]$$

означающее, что внутри $(\varepsilon/2)$-окрестности точки x осуществима или точка из списка ζ_1, или точка из списка ζ_2 [3.2, (2)]. В первом случае внутри ε-окрестности точки x осуществима точка $x' \in \mathfrak{M}(K_1)$ [(7), 3.3]. Во втором случае внутри ε-окрестности точки x осуществима точка $x' \in \mathfrak{M}(K_2)$ [(7), 3.3]. □

3.5. *Пусть $K, K' \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$. Тогда соотношения $K' \leqslant K$ и $\mathfrak{M}(K') \subseteq \mathfrak{M}(K)$ равносильны.*

Доказательство. В случае $K' \leqslant K$ факт выполнения соотношения $\mathfrak{M}(K') \subseteq \mathfrak{M}(K)$ тривиален [2.1]. В случае $\mathfrak{M}(K') \subseteq \mathfrak{M}(K)$ зафиксируем произвольные число $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ и два непустых списка ζ и $\zeta' \rightleftharpoons \{\zeta'_k\}_{k=1}^{n}$ точек пространства X со свойствами

$$\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K, \zeta) < \varepsilon, \tag{8}$$

$$\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K', \zeta') < \varepsilon. \tag{9}$$

Тогда осуществим список $\{x'_k\}_{k=1}^{n}$ точек множества $\mathfrak{M}(K')$ со свойством

$$(\forall k \in [1,n]) \qquad \rho_X(x'_k, \zeta'_k) < \varepsilon. \qquad [(9),\ 3.3] \tag{10}$$

При этом для любого $k \in [1,n]$ будет выполняться соотношение $x'_k \in \mathfrak{M}(K)$, а потому и соотношения

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{c}(X)}(\{x'_k\}\cup\zeta,\zeta) &\leqslant \rho_{\mathfrak{c}(X)}(\{x'_k\}\cup\zeta,\{x'_k\}\cup K)+\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K,\zeta)\\ &\leqslant 2\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K,\zeta) && [2.2]\\ &< 2\varepsilon. && [(8)]\end{aligned}$$

Объединяя последние оценки с соотношениями (10), (2) и (1), устанавливаем, что при произвольно фиксированном $k \in [1,n]$ внутри 3ε-окрестности точки ζ'_k осуществима точка из списка ζ. В таком случае выполняется соотношение

$$\rho_{\mathfrak{c}(X)}(\zeta'\cup\zeta,\zeta) < 3\varepsilon, \qquad [(2),\ (1)] \quad (11)$$

а потому и соотношения

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K'\cup K,K) &\leqslant \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K'\cup K,\zeta'\cup\zeta)\\ &\qquad+\rho_{\mathfrak{c}(X)}(\zeta'\cup\zeta,\zeta)+\rho_{\mathfrak{c}(X)}(\zeta,K)\\ &< \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K',\zeta')+2\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K,\zeta)+3\varepsilon && [2.2,\ (11)]\\ &< 6\varepsilon. && [(8),\ (9)]\end{aligned}$$

Ввиду произвольности произведённого ранее выбора числа $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, полученные оценки означают выполнение соотношения $K' \leqslant K$. □

3.6. *Пусть $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$, $x \in \mathfrak{S}_X$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Тогда или множество $\mathfrak{M}(K)$ не пересекается с ε-окрестностью точки x, или осуществим непустой компакт $K' \leqslant K$, для которого множество $\mathfrak{M}(K')$ является подмножеством 2ε-окрестности точки x и надмножеством пересечения множества $\mathfrak{M}(K)$ с ε-окрестностью точки x.*

Доказательство. Пусть $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – сходящаяся в пространстве $\mathfrak{c}(X)$ к компакту K последовательность непустых списков точек пространства X, обладающая свойством

$$(\forall k \geqslant 1) \qquad \rho_{\mathfrak{c}(X)}(\zeta_k,\zeta_{k+1}) < 2^{-k-2}\varepsilon. \qquad (12)$$

Заметим, что или ни одна точка из списка ζ_1 не лежит в $(5\varepsilon/4)$-окрестности точки x, или хотя бы одна из точек этого списка лежит в $(3\varepsilon/2)$-окрестности указанной точки (см., например, [5, Гл. 2, §3, Теорема 20]). В первом случае множество $\mathfrak{M}(K)$ не пересекается с ε-окрестностью точки x [(12), 3.2].

Во втором случае рассмотрим последовательность $\{\zeta'_k\}_{k=1}^{\infty}$ непустых списков точек пространства X со следующими свойствами:

3.6.1. При любом $k \geqslant 1$ список ζ'_k является подсписком списка ζ_k.

3.6.2. При любом $k \geqslant 1$ любая точка списка ζ_k, лежащая в $(1+2^{-k-1})\varepsilon$-окрестности точки x, принадлежит списку ζ'_k, а любая точка списка ζ_k, не лежащая в $(2-2^{-k-1})\varepsilon$-окрестности точки x, не принадлежит списку ζ'_k.

3.6.3. При любом $k \geqslant 1$ выполняется соотношение $\rho_{\mathfrak{c}(X)}(\zeta'_k, \zeta'_{k+1}) < 2^{-k-2}\varepsilon$.

Осуществимость такой последовательности $\{\zeta'_k\}_{k=1}^{\infty}$ гарантируется вышеупомянутой теоремой [5, Гл. 2, §3, Теорема 20], соотношением (12) и определением (1). Проверим, что непустой компакт $K' \rightleftharpoons \lim\limits_{k\to\infty} \zeta'_k$ обладает всеми требуемыми от искомого объекта свойствами.

Во-первых, выполняются равенства

$$\begin{aligned} \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K' \cup K, K) &= \lim_{k\to\infty} \rho_{\mathfrak{c}(X)}(\zeta'_k \cup \zeta_k, \zeta_k) \\ &= 0, && [3.6.1,\ (2),\ (1)] \end{aligned}$$

а потому и соотношение $K' \leqslant K$.

Во-вторых, внутри $(\varepsilon/4)$-окрестности произвольно фиксированной точки $x' \in \mathfrak{M}(K')$ осуществима точка x'' из списка ζ'_1 [3.6.3, 3.2]. При этом выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \rho_X(x, x') &\leqslant \rho_X(x, x'') + \rho_X(x'', x') \\ &< 7\varepsilon/4 + \varepsilon/4 && [3.6.1,\ 3.6.2] \\ &= 2\varepsilon, \end{aligned}$$

означающие, что множество $\mathfrak{M}(K')$ является подмножеством 2ε-окрестности точки x.

В-третьих, зафиксируем произвольную точку $x' \in \mathfrak{M}(K)$, лежащую внутри ε-окрестности точки x. При любом $k \geqslant 1$ внутри $(2^{-k-1}\varepsilon)$-окрестности точки x' осуществима точка из списка ζ_k [(12), 3.2], принадлежащая также списку ζ'_k [3.6.2]. Тогда при любом $k \geqslant 1$ внутри $(2^{-k}\varepsilon)$-окрестности точки x' осуществима точка $x'' \in \mathfrak{M}(K')$ [3.6.3, 3.3], что с очевидностью означает выполнение соотношения $x' \in \mathfrak{M}(K')$ [3.1]. Тем самым, множество $\mathfrak{M}(K')$ является надмножеством пересечения множества $\mathfrak{M}(K)$ с ε-окрестностью точки x. $\square$

4. Имеет место следующий факт:

4.1. *Пусть* $K \in \mathfrak{c}(\mathbf{R})$. *Тогда осуществимы вещественные числа* $\sup \mathfrak{M}(K)$ *и* $\inf \mathfrak{M}(K)$.

Доказательство. Пусть $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – сходящаяся в пространстве $\mathfrak{c}(\mathbf{R})$ к компакту K последовательность непустых списков вещественных чисел, обладающая свойством

$$(\forall k \geqslant 1) \qquad \rho_{\mathfrak{c}(\mathbf{R})}(\zeta_k, \zeta_{k+1}) < 2^{-k-1}. \tag{13}$$

Рассмотрим две числовые последовательности $\{\zeta_k^+\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\zeta_k^-\}_{k=1}^{\infty}$, соответственно, верхних и нижних точных граней списков ζ_k. Эти последовательности удовлетворяют соотношениям

$$(\forall k \geqslant 1) \qquad |\zeta_k^{\pm} - \zeta_{k+1}^{\pm}| < 2^{-k-1}, \qquad [(13),\ (1)]$$

а потому сходятся к некоторым вещественным числам $\zeta^{\pm}$. Далее, при любом $k \geqslant 1$ внутри 2^{-k}-окрестности каждой из точек $\zeta_k^{\pm}$ осуществима точка из множества $\mathfrak{M}(K)$ [(13), 3.3], а потому каждая из точек $\zeta^{\pm}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}(K)$ [3.1]. Наконец, любая точка $x \in \mathfrak{M}(K)$ удовлетворяет соотношению

$$(\forall k \geqslant 1) \qquad x \in (\zeta_k^- - 2^{-k},\, \zeta_k^+ + 2^{-k}), \qquad [(13),\ 3.2]$$

из которого предельным переходом выводится соотношение $x \in [\zeta^-, \zeta^+]$. Тем самым, выполняются равенства

$$\zeta^+ = \sup \mathfrak{M}(K),$$
$$\zeta^- = \inf \mathfrak{M}(K),$$

означающие справедливость доказываемого утверждения. □

5. Далее мы не будем явным образом прослеживать наиболее очевидные случаи применения утверждений из настоящего параграфа.

§3. Вспомогательные утверждения

1. В дальнейшем подмножество $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}_X$ носителя полного метрического пространства X мы будем называть *предкомпактным*, если осуществим непустой компакт $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$, для которого множество $\mathfrak{M}(K)$ является замыканием множества $\mathfrak{A}$.

2. Пусть $f : X \to Y$ есть всюду определённое конструктивное отображение полного метрического пространства X в полное метрическое пространство Y. Пусть также для любого предкомпактного подмножества $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}_X$ его f-образ

$$\{y \in \mathfrak{S}_Y \mid (\exists x \in \mathfrak{A}) \quad y = f(x)\}$$

также предкомпактен. Тогда любому непустому компакту $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$ может быть сопоставлен непустой компакт $\Pi_f(K) \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(Y)}$, для которого множество $\mathfrak{M}(\Pi_f(K))$ является замыканием f-образа множества $\mathfrak{M}(K)$. При этом для любых двух компактов $K, K' \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$ из равенства $K = K'$ вытекает равенство $\Pi_f(K) = \Pi_f(K')$ [§2.3.5]. Иначе говоря, с любым всюду определённым конструктивным отображением $f : X \to Y$ полных метрических пространств, сохраняющим предкомпактность подмножеств, может быть связано всюду определённое конструктивное отображение $\Pi_f : \mathfrak{c}(X) \to \mathfrak{c}(Y)$.

3. Имеет место следующий тривиальный факт:

3.1. *Пусть $f : X \to Y$ – всюду определённое конструктивное отображение полного метрического пространства X в полное метрическое пространство Y, $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, и $y \in \mathfrak{S}_Y$ – предельная точка f-образа множества $\mathfrak{M}(K)$. Тогда осуществима точка $x \in \mathfrak{M}(K)$ со свойством $\rho_Y(f(x), y) < \varepsilon$.*

Доказательство. Множество $\mathfrak{M}(K)$ является сепарабельным, т. е. осуществима плотная в $\mathfrak{M}(K)$ по метрике пространства X последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек этого множества [§2.3.2, §2.3.3]. Тогда из теоремы Г. С. Цейтина о непрерывности конструктивных отображений (см., например, [5, Гл. 9, §2, Теорема 11], [8, Основная теорема]) следует, что квазиосуществим индекс $k \geqslant 1$, удовлетворяющий соотношению $\rho_Y(f(x_k), y) < \varepsilon$. Из принципа конструктивного подбора теперь немедленно вытекает, что такой индекс $k \geqslant 1$ является осуществимым. Последнее с очевидностью означает справедливость доказываемого утверждения. □

4. Пусть X – полное метрическое пространство, $f : X \to \mathbf{R}$ – всюду определённая конструктивная функция, сохраняющая предкомпактность подмножеств, и пусть $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$. Тогда паре произвольно фиксированных чисел $n \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ мы сопоставляем класс $\mathfrak{K}_{n,\varepsilon}(f, K) \subseteq \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$ следующего вида:

4.1. *Компакт* $K' \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$ *считается принадлежащим классу* $\mathfrak{K}_{n,\varepsilon}(f,K)$, *если выполнены следующие условия:*

4.1.1. $K' \leqslant K$.

4.1.2. *Для любых двух точек* $x, x' \in \mathfrak{M}(K)$ *со свойствами* $\rho_X(x,x') < 2^{-n}$ *и* $|f(x) - f(x')| > 2\varepsilon$ *выполняется соотношение* $x \in \mathfrak{M}(K')$.

4.1.3. *Для любой точки* $x \in \mathfrak{M}(K')$ *осуществима точка* $x' \in \mathfrak{M}(K)$ *со свойствами* $\rho_X(x,x') < 2^{-n+4}$ *и* $f(x') < \sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) - \varepsilon$.

Имеет место следующий факт:

4.2. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *и* $K' \in \mathfrak{K}_{n,\varepsilon}(f,K)$. *Тогда осуществим компакт* $K'' \in \mathfrak{K}_{n+1,\varepsilon}(f,K)$ *со свойством* $\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K',K'') < 2^{-n+5}$.

Доказательство. Пусть $\zeta \rightleftharpoons \{\zeta_k\}_{k=1}^m$ – непустой список точек пространства X со свойством

$$\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K,\zeta) < 2^{-n-2}. \tag{14}$$

Зафиксируем набор индексов $\Gamma \subseteq [1,m]$, для которого при любом $k \in [1,m] \setminus \Gamma$ множество $\mathfrak{M}(K')$ не пересекается с 2^{-n}-окрестностью точки ζ_k, а при любом $k \in \Gamma$ осуществим непустой компакт $K'_k \leqslant K'$, для которого множество $\mathfrak{M}(K'_k)$ является подмножеством 2^{-n+1}-окрестности точки ζ_k и надмножеством пересечения 2^{-n}-окрестности точки ζ_k с множеством $\mathfrak{M}(K')$ [§2.3.6]. При этом выполняются равенство $K' = \bigcup_{k\in\Gamma} K'_k$ [4.1.1, §2.3.5, (14)] и соотношение

$$(\forall k \in \Gamma) \qquad \mathfrak{M}(\Pi_f(K'_k)) \subseteq \mathfrak{M}(\Pi_f(K)). \qquad [4.1.1] \tag{15}$$

Зафиксируем также набор индексов $\Gamma' \subseteq \Gamma$, удовлетворяющий соотношениям

$$(\forall k \in \Gamma') \qquad \sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K'_k)) - \inf \mathfrak{M}(\Pi_f(K'_k)) > \varepsilon, \tag{16}$$

$$(\forall k \in \Gamma \setminus \Gamma') \qquad \sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K'_k)) - \inf \mathfrak{M}(\Pi_f(K'_k)) < 2\varepsilon. \tag{17}$$

Осуществимость такого набора Γ' гарантируется теоремой [5, Гл. 2, §3, Теорема 20]. Сопоставим теперь каждому значению $k \in \Gamma$ компакт K''_k вида

$$K''_k \rightleftharpoons \begin{cases} K'_k & \text{при } k \in \Gamma', \\ \{x_k\} & \text{при } k \in \Gamma \setminus \Gamma', \end{cases} \tag{18}$$

где x_k – произвольно фиксированная точка со свойствами

$$x_k \in \mathfrak{M}(K), \tag{19}$$

$$f(x_k) < \sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) - \varepsilon, \tag{20}$$

$$(\exists x' \in \mathfrak{M}(K'_k)) \qquad \rho_X(x_k, x') < 2^{-n+4}. \tag{21}$$

Осуществимость такой точки гарантируется условием 4.1.3. Проверим, что компакт $K'' \rightleftharpoons \bigcup_{k\in\Gamma} K''_k$ обладает всеми требуемыми от искомого объекта свойствами.

Выполнение соотношения $K'' \leqslant K$ очевидно [(18), (19)].

Пусть две точки $x, x' \in \mathfrak{M}(K)$ удовлетворяют соотношениям

$$\rho_X(x, x') < 2^{-n-1} \quad \text{и} \quad |f(x) - f(x')| > 2\varepsilon.$$

Тогда выполняются соотношения $x, x' \in \mathfrak{M}(K')$ [4.1.2], а также осуществим индекс $k \in [1, m]$, для которого 2^{-n}-окрестность точки ζ_k содержит каждую из точек x и x' [(14)]. В таком случае выполняются соотношения $x, x' \in \mathfrak{M}(K'_k)$ и $k \in \Gamma'$ [(17)], а потому и соотношение $x \in \mathfrak{M}(K'')$ [(18)].

Далее, рассмотрим произвольную точку $x \in \mathfrak{M}(K'')$. Согласно утверждению §2.3.4, осуществим индекс $k \in \Gamma$, для которого внутри 2^{-n}-окрестности точки x осуществима точка $x'' \in \mathfrak{M}(K''_k)$. При этом выполняется одно из соотношений $k \in \Gamma'$ или $k \notin \Gamma'$. В первом случае, по построению компакта K'_k, в 2^{-n+2}-окрестности точки x'' осуществима точка $x' \in \mathfrak{M}(K)$ со свойством

$$f(x') < \sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) - \varepsilon. \qquad [(18), (16), (15), 3.1]$$

Во втором случае осуществима точка $x' \rightleftharpoons x'' \in \mathfrak{M}(K)$ с тем же свойством [(18), (20)]. В обоих случаях построенная точка $x' \in \mathfrak{M}(K)$ лежит в 2^{-n+3}-окрестности точки x.

Наконец, по построению компактов K'_k, имеет место соотношение

$$(\forall k \in \Gamma) \qquad \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K'_k, \{\zeta_k\}) < 2^{-n+2}, \tag{22}$$

а потому и соотношения

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K', K'') &= \rho_{\mathfrak{c}(X)}\Big(\bigcup\nolimits_{k\in\Gamma} K'_k, \bigcup\nolimits_{k\in\Gamma} K''_k\Big) \\
&\leqslant \sup_{k\in\Gamma} \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K'_k, K''_k) && [\S 2.2.2] \\
&\leqslant \sup_{k\in\Gamma\setminus\Gamma'} \big(\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K'_k, \{\zeta_k\}) + \rho_X(\zeta_k, x_k)\big) && [(18)] \\
&< 2^{-n+2} + 2^{-n+1} + 2^{-n+4} && [(22),\ (21)] \\
&< 2^{-n+5}.
\end{aligned}$$

Тем самым, доказываемое утверждение справедливо. □

5. На протяжении настоящего пункта мы будем использовать сокращение

$$\mathcal{Z}(\varepsilon, \delta) \rightleftharpoons \big(f(x) > \sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) - \varepsilon\big) \,\&\, \big(\rho_X(x, x') < \delta\big).$$

Имеют место следующие два факта:

5.1. *Пусть X – полное метрическое пространство, $f : X \to \mathbf{R}$ – всюду определённая конструктивная функция, сохраняющая предкомпактность подмножеств, $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Тогда осуществимо число $\delta \in \mathbb{R}^+$ со свойством*

$$(\forall x, x' \in \mathfrak{M}(K)) \qquad \mathcal{Z}(\varepsilon/2, \delta) \supset \big(|f(x) - f(x')| \leqslant 2\varepsilon\big). \tag{23}$$

Доказательство. Согласно теореме [5, Гл. 2, §3, Теорема 20], выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) - \inf \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) < 2\varepsilon, \tag{24}$$

$$\sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) - \inf \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) > \varepsilon. \tag{25}$$

В случае, когда выполняется неравенство (24), любое число $\delta \in \mathbb{R}^+$ с очевидностью обладает свойством (23).

В случае, когда выполняется неравенство (25), зафиксируем произвольные точку $z \in \mathfrak{S}_X$ и число $m \in \mathbb{Z}$ со свойством

$$\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K, \{z\}) < 2^{-m+3}. \tag{26}$$

При этом будет выполняться соотношение

$$(\forall x, x' \in \mathfrak{M}(K)) \qquad \rho_X(x, x') < 2^{-m+4}, \qquad [(26)]$$

а потому и соотношение $K \in \mathfrak{K}_{m,\varepsilon}(f, K)$ [4.1, (25), 3.1]. Тогда из утверждения 4.2 вытекает осуществимость последовательности $\{K_k\}_{k=1}^{\infty}$ непустых компактов со свойствами

$$(\forall k \geqslant 1) \qquad K_k \in \mathfrak{K}_{m+k-1,\varepsilon}(f, K), \tag{27}$$

$$(\forall k \geqslant 1) \qquad \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K_k, K_{k+1}) < 2^{-m-k+6}. \tag{28}$$

Такая последовательность с очевидностью имеет в пространстве $\mathfrak{c}(X)$ предел K' со свойством

$$(\forall k \geqslant 1) \qquad \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K_k, K') < 2^{-m-k+7}. \qquad [(28)] \tag{29}$$

Кроме того, из соотношения (27) и условия 4.1.3 вытекает осуществимость последовательности $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ списков точек множества $\mathfrak{M}(K)$ со свойствами

$$(\forall k \geqslant 1) \qquad \rho_{\mathfrak{c}(X)}(K_k, \zeta_k) < 2^{-m-k+7}, \tag{30}$$

$$(\forall k \geqslant 1) \qquad \mathfrak{M}(\Pi_f(\zeta_k)) \subseteq (-\infty, \sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) - \varepsilon). \tag{31}$$

Применяя к отображению $\Pi_f : \mathfrak{c}(X) \to \mathfrak{c}(\mathbf{R})$ теорему Г. С. Цейтина о непрерывности (см., например, [5, Гл. 9, §2, Теорема 11], [8, Основная теорема]), убеждаемся в осуществимости числа $n \geqslant 1$, удовлетворяющего соотношению

$$\begin{aligned}(\forall K'' \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}) \qquad & \bigl(\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K'', K') < 2^{-m-n+8}\bigr) \\ & \supset \bigl(\rho_{\mathfrak{c}(\mathbf{R})}(\Pi_f(K''), \Pi_f(K')) < \varepsilon/4\bigr).\end{aligned} \tag{32}$$

Тогда должно выполняться неравенство

$$\rho_{\mathfrak{c}(\mathbf{R})}(\Pi_f(K_n), \Pi_f(\zeta_n)) < \varepsilon/2, \qquad [(29),\ (30),\ (32)] \tag{33}$$

а потому и соотношение

$$\mathfrak{M}(\Pi_f(K_n)) \subseteq (-\infty, \sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) - \varepsilon/2). \qquad [(31),\ (33)] \tag{34}$$

При этом для любых двух точек $x, x' \in \mathfrak{M}(K)$ со свойствами $f(x) > \sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) - \varepsilon/2$ и $\rho_X(x, x') < 2^{-m-n+1}$ заведомо выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x')| \leqslant 2\varepsilon. \qquad [(34),\ (27),\ 4.1.2]$$

Тем самым, число $\delta \rightleftharpoons 2^{-m-n+1}$ обладает свойством (23). $\square$

5.2. *Пусть X – полное метрическое пространство, $f : X \to \mathbf{R}$ – всюду определённая конструктивная функция, сохраняющая предкомпактность подмножеств, $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Тогда осуществимо число $\delta \in \mathbb{R}^+$ со свойством*

$$(\forall x, x' \in \mathfrak{M}(K)) \qquad \big(\rho_X(x, x') < \delta\big) \supset \big(|f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon\big). \tag{35}$$

Доказательство. Зафиксируем пространство X, функцию $f : X \to \mathbf{R}$ и число $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, после чего рассмотрим следующее вспомогательное условие $\mathcal{Y}$, налагаемое на натуральное число n: "каков бы ни был компакт $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$, удовлетворяющий соотношению

$$\sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) - \inf \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) < \frac{n+1}{60}\,\varepsilon, \tag{36}$$

осуществимо число $\delta \in \mathbb{R}^+$ со свойством (35)". Для доказательства утверждения 5.2 достаточно установить, что любое натуральное число n удовлетворяет условию $\mathcal{Y}$. Последнее будет сделано нами на основе арифметической индукции.

Пусть число n удовлетворяет равенству $n = 0$. В таком случае для произвольно фиксированного компакта $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$, удовлетворяющего соотношению (36), любое число $\delta \in \mathbb{R}^+$ с очевидностью обладает свойством (35).

Пусть число n допускает представление в виде $n = n' + 1$, где $n' \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию $\mathcal{Y}$. Тогда, согласно утверждению 5.1, для произвольно фиксированного компакта $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$, удовлетворяющего соотношению (36), осуществимо число $\varkappa \in \mathbb{R}^+$ со свойствами

$$(\forall x, x' \in \mathfrak{M}(K)) \qquad \mathcal{Z}(\varepsilon/8, \varkappa) \supset \big(|f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon/2\big), \tag{37}$$

$$(\forall x, x' \in \mathfrak{M}(K)) \qquad \mathcal{Z}(\varepsilon/60, \varkappa) \supset \big(|f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon/15\big). \tag{38}$$

Зафиксируем список $\zeta \rightleftharpoons \{\zeta_k\}_{k=1}^m$ точек множества $\mathfrak{M}(K)$ со свойством

$$\rho_{\mathfrak{c}(X)}(K, \zeta) < \varkappa/4. \tag{39}$$

Согласно утверждению §2.3.6, каждому индексу $k \in [1, m]$ можно сопоставить непустой компакт $K_k \leqslant K$, для которого множество $\mathfrak{M}(K_k)$ является подмножеством $\varkappa$-окрестности точки ζ_k и надмножеством пересечения множества $\mathfrak{M}(K)$ с $(\varkappa/2)$-окрестностью точки ζ_k. При этом с очевидностью выполняется соотношение

$$(\forall k \in [1, m]) \qquad \mathfrak{M}(\Pi_f(K_k)) \subseteq \mathfrak{M}(\Pi_f(K)). \tag{40}$$

Далее, зафиксируем два набора индексов $\Gamma \subseteq [1,m]$ и $\Gamma' \rightleftharpoons [1,m] \setminus \Gamma$, удовлетворяющих соотношениям

$$(\forall k \in \Gamma) \qquad f(\zeta_k) < \sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) - \varepsilon/12, \tag{41}$$

$$(\forall k \in \Gamma') \qquad f(\zeta_k) > \sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) - \varepsilon/8. \tag{42}$$

Осуществимость таких наборов гарантируется теоремой [5, Гл. 2, §3, Теорема 20]. При этом, по построению компактов K_k, выполняется соотношение

$$(\forall k \in \Gamma)\,(\forall x \in \mathfrak{M}(K_k)) \qquad f(x) \leqslant \sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K)) - \varepsilon/60, \quad [(41),\ (38)] \tag{43}$$

а потому и соотношение

$$(\forall k{\in}\Gamma) \quad \sup \mathfrak{M}(\Pi_f(K_k)) - \inf \mathfrak{M}(\Pi_f(K_k)) < \frac{n'+1}{60}\,\varepsilon. \quad [(43),\ (40),\ (36)]$$

Тогда, согласно индуктивному предположению, осуществимо число $\delta' \in \mathbb{R}^+$ со свойством

$$(\forall k{\in}\Gamma)\,(\forall x, x'{\in}\mathfrak{M}(K_k)) \quad \big(\rho_X(x,x'){<}\delta'\big) \supset \big(|f(x){-}f(x')|{\leqslant}\varepsilon\big). \tag{44}$$

Кроме того, по построению компактов K_k, при любом $k \in \Gamma'$ для любых двух точек $x, x' \in \mathfrak{M}(K_k)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &\leqslant |f(x) - f(\zeta_k)| + |f(\zeta_k) - f(x')| \\ &\leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 && [(42),\ (37)] \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Тем самым, выполняется соотношение

$$(\forall k \in \Gamma')\,(\forall x, x' \in \mathfrak{M}(K_k)) \qquad |f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon. \tag{45}$$

Положим теперь $\delta \rightleftharpoons \inf(\delta', \varkappa/4)$ и заметим, что для любых двух точек $x, x' \in \mathfrak{M}(K)$ со свойством $\rho_X(x,x') < \delta$ осуществим индекс $k \in [1,m]$, для которого $(\varkappa/2)$-окрестность точки ζ_k содержит каждую из точек x и x' [(39)]. Тогда, по построению компактов K_k, выполняются соотношения $x, x' \in \mathfrak{M}(K_k)$. При этом в каждом из случаев $k \in \Gamma$ и $k \in \Gamma'$ справедлива оценка

$$|f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon. \qquad [(44),\ (45)]$$

Тем самым, число δ обладает свойством (35). □

§4. Основной результат

1. Теперь мы сформулируем и докажем основной результат настоящей статьи.

1.1. *Пусть X – компактное метрическое пространство, Y – полное метрическое пространство, а $f : X \to Y$ – всюду определённое конструктивное отображение. Тогда функция f является равномерно непрерывной в том и только том случае, если она сохраняет предкомпактность подмножеств.*

Доказательство. Пусть функция $f : X \to Y$ является равномерно непрерывной. Зафиксируем произвольные компакт $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$ и предкомпактное множество $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}_X$ с замыканием $\mathfrak{M}(K)$. Зафиксируем также произвольную сходящуюся в пространстве $\mathfrak{c}(X)$ к компакту K последовательность $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ списков точек множества $\mathfrak{M}(K)$, и условимся обозначать через ζ'_k списки f-образов точек из списков ζ_k. Ввиду равномерной непрерывности функции f на множестве $\mathfrak{M}(K)$, последовательность $\{\zeta'_k\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной относительно метрики пространства $\mathfrak{c}(Y)$ и сходится к некоторому компакту $K' \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(Y)}$. При этом, также в силу равномерной непрерывности функции f на множестве $\mathfrak{M}(K)$, для любых точки $x \in \mathfrak{A}$ и числа $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ осуществима точка $y \in \mathfrak{M}(K')$ со свойством

$$\rho_Y(f(x), y) < \varepsilon, \qquad [\S 2.3.2,\ \S 2.3.3]$$

а для любых точки $y \in \mathfrak{M}(K')$ и числа $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ квазиосуществима точка $x \in \mathfrak{A}$ с тем же свойством [§2.3.2]. Таким образом, множество $\mathfrak{M}(K')$ представляет собой замыкание f-образа множества $\mathfrak{A}$ [§2.3.1]. Ввиду произвольности выбора компакта $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$ и множества $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}_X$ с замыканием $\mathfrak{M}(K)$, сказанное означает сохранение функцией f предкомпактности подмножеств.

Пусть теперь функция $f : X \to Y$ сохраняет предкомпактность подмножеств. Зафиксируем компакт $K \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{c}(X)}$ со свойством $\mathfrak{M}(K) = \mathfrak{S}_X$, число $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, а также непустой список $\zeta \rightleftharpoons \{\zeta_k\}_{k=1}^{n}$ точек пространства Y со свойством

$$\rho_{\mathfrak{c}(Y)}(\Pi_f(K), \zeta) < \varepsilon/3. \tag{46}$$

Кроме того, введём в рассмотрение набор $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ функций $\varphi_k : Y \to \mathbf{R}$ вида

$$(\forall k \in [1, n])\,(\forall y \in \mathfrak{S}_Y) \qquad \varphi_k(y) = \rho_Y(y, \zeta_k). \tag{47}$$

Каждая из функций φ_k с очевидностью является равномерно непрерывной, а потому сохраняет предкомпактность подмножеств. Тогда каждая из функций $\varphi_k \circ f : X \to \mathbf{R}$ также сохраняет предкомпактность подмножеств, а потому, согласно утверждению §3.5.2, осуществимо число $\delta \in \mathbb{R}^+$, удовлетворяющее соотношению

$$\begin{aligned}(\forall k \in [1,n])\,(\forall x, x' \in \mathfrak{M}(K)) \qquad & (\rho_X(x,x') < \delta) \\ \supset (|\varphi_k(f(x)) - \varphi_k(f(x'))| \leqslant \varepsilon/3).\end{aligned} \tag{48}$$

С другой стороны, для произвольно фиксированной точки $x \in \mathfrak{M}(K)$ осуществим индекс $k \in [1,n]$ со свойством

$$\rho_Y(f(x), \zeta_k) < \varepsilon/3. \qquad [(46)] \tag{49}$$

Тогда для любой точки $x' \in \mathfrak{M}(K)$, удовлетворяющей условию $\rho_X(x,x') < \delta$, выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\rho_Y(f(x), f(x')) &\leqslant \rho_Y(f(x), \zeta_k) + \rho_Y(\zeta_k, f(x')) \\ &= 2\rho_Y(f(x), \zeta_k) + [\varphi_k(f(x')) - \varphi_k(f(x))] && [(47)] \\ &< \varepsilon. && [(49),\ (48)]\end{aligned}$$

Тем самым, выполняется соотношение

$$(\forall x, x' \in \mathfrak{M}(K)) \qquad (\rho_X(x,x') < \delta) \supset (\rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon).$$

Ввиду произвольности произведённого ранее выбора числа $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, полученный результат означает равномерную непрерывность функции f. □

Литература

1. Б. А. Кушнер, *Конструктивная версия теоремы Кёнига; функции, вычислимые по Маркову, Гжегорчику и Лакомбу.* — Сб. работ по теории алгорифмов и матем. логике. Под. ред. Б. А. Кушнера и Н. М. Нагорного. М., ВЦ АН СССР, 1974, 87–111.
2. А. А. Марков, *О языке* $Я_{\omega|}$. — ДАН СССР **215**, No. 1 (1974), 57–60.
3. А. А. Владимиров, М. Н. Домбровский–Кабанченко, *Ступенчатая семантическая система.* — М., Изд-во ВЦ РАН, 2009.
4. Н. А. Шанин, *О конструктивном понимании математических суждений.* — Труды Матем. ин.-та АН СССР, **52** (1958), 226–311.
5. Б. А. Кушнер, Лекции по конструктивному математическому анализу. М., Наука, 1973.
6. Н. А. Шанин, *Эскиз финитарного варианта математического анализа.* — Препринт ПОМИ 06/2000.

7. Н. А. Шанин, *Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства.* — Труды Матем. ин.-та АН СССР **67** (1962), 15–294.
8. Г. С. Цейтин, *Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах.* — Труды Матем. ин.-та АН СССР **67** (1962), 295–361.

Vladimirov A. A. On some continuity theorem for constructive functions.

One proves that any everywhere defined constructive mapping from a compact metric space into a complete metric space which preserves the property of precompacity of subsets is uniformly continuous.

ВЦ им. А. А. Дородницына,
ул. Вавилова, 40,
Москва 119333, Россия
E-mail: vladimi@mech.math.msu.su

Поступило 16 апреля 2012 г.