Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 407, 2012 г.

А. А. Владимиров

О СРАВНЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ДАРБУ И РИМАНА В КОНСТРУКТИВНОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

§1. Введение

1. В рамках "классической" теоретико-множественной математики известно два основных способа определения одномерного интеграла Римана: в качестве предела интегральных сумм при исчезновении измельчённости дробления (подход Римана), и в качестве промежуточного значения множеств интегралов "элементарно интегрируемых" функций, оценивающих рассматриваемую (подход Дарбу). С точки зрения "классической" математики указанные два подхода приводят к равнообъёмным понятиям. Основная цель настоящей статьи заключается в построении примера всюду на отрезке $[0, 1]$ заданной функции, интегрируемой по Риману, но не интегрируемой по Дарбу, с точки зрения конструктивного математического анализа.

В дальнейшем мы всегда, не оговаривая этого особо, будем исходить из конструктивного понимания математических суждений, как оно даётся ступенчатой семантической системой А. А. Маркова [1, 2].

2. Конструктивный вариант определения Римана рассматривался неоднократно и в настоящее время может считаться стандартным [3, Гл. 7, §1]. Конструктивную интегрируемость по Дарбу мы вводим следующим образом:

Ключевые слова: конструктивная функция, интеграл Римана, интеграл Дарбу, сингулярное покрытие.

2.1. *Функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ называется интегрируемой по Дарбу, если для любого вещественного числа $\varepsilon > 0$ осуществимы две полигональные функции $f_\varepsilon^\downarrow$ и $f_\varepsilon^\uparrow$, удовлетворяющие соотношениям*

$$(\forall x \in [0,1]) \qquad f_\varepsilon^\downarrow(x) \leqslant f(x) \leqslant f_\varepsilon^\uparrow(x),$$

$$\int\limits_0^1 (f_\varepsilon^\uparrow - f_\varepsilon^\downarrow) < \varepsilon.$$

Здесь и далее функцию $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ мы называем *полигональной* (ср. [3, Гл. 5, §1, Определение 7], [4, §1]), если осуществимы список $\{q_k\}_{k=0}^m$ рациональных чисел и упорядоченный по возрастанию список $\{p_k\}_{k=0}^m$ попарно различных рациональных точек отрезка $[0,1]$, удовлетворяющие соотношениям $p_0 = 0$, $p_m = 1$ и

$$(\forall k \in \mathbb{N} : 1 \leqslant k \leqslant m)\ (\forall x \in [p_{k-1}, p_k])$$

$$f(x) = \frac{q_k \cdot (x - p_{k-1}) + q_{k-1} \cdot (p_k - x)}{p_k - p_{k-1}}.$$

Под *полигональным интегралом* такой функции, как обычно [3, Гл. 8, §2, Определение 6], [4, §1], понимается величина

$$\int\limits_0^1 f \rightleftharpoons \sum_{k=1}^m \frac{(q_k + q_{k-1}) \cdot (p_k - p_{k-1})}{2},$$

численно совпадающая с интегралом Римана.

§2. Вспомогательные утверждения

1. Очевидным образом имеет место следующий факт:

1.1. *Пусть функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Дарбу. Тогда для любого рационального числа $\varepsilon > 0$ осуществимы рациональное число $\delta > 0$ и неотрицательная полигональная функция g, удовлетворяющие соотношениям*

$$\int\limits_0^1 g < 1/2,$$

$$(\forall x, y \in [0,1] : \sup(g(x),\, g(y)) < 1,\ |x - y| < \delta) \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

2. Следующее утверждение представляет собой удобный для наших дальнейших целей аналог известной [3, Гл. 8, §1, Теорема 2], [4, Теорема 2.1] теоремы о сингулярных покрытиях. Оно может также быть рассмотрено в качестве варианта конструктивного опровержения [5, Замечание 2] теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

2.1. *Осуществима неубывающая последовательность* $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ *неотрицательных полигональных функций, удовлетворяющая соотношениям*

$$(\forall x \in [0,1]) \qquad \lim_{n\to\infty} h_n(x) = 2, \tag{1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \int_0^1 h_n < 1/2. \tag{2}$$

Доказательство. Зафиксируем [3, Гл. 8, §1, Теорема 2] накрывающую отрезок $[0,1]$ последовательность $\{(a_n, b_n)\}_{n=0}^{\infty}$ непустых интервалов с рациональными концами, удовлетворяющую соотношению

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \sum_{k=0}^{n}(b_k - a_k) < 1/6. \tag{3}$$

Введём в рассмотрение последовательность $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ полигональных функций вида

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in [0,1]) \quad \varphi_n(x) = \inf\left(1, \sup\left(0,\, 2 - \frac{|2x - b_n - a_n|}{b_n - a_n}\right)\right), \tag{4}$$

а также неубывающую последовательность $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных полигональных функций, рекуррентно заданную соотношениями

$$(\forall x \in [0,1]) \qquad h_0(x) = 0, \tag{5}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in [0,1]) \qquad h_{n+1}(x) = \sup(h_n(x),\, 2\varphi_n(x)). \tag{6}$$

Тогда при любом выборе индекса $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\int_0^1 h_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 2\varphi_k \qquad [(5),\ (6)]$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} 3 \cdot (b_k - a_k) \qquad [(4)]$$

$$< 1/2. \qquad [(3)]$$

Кроме того, выполняется соотношение

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in [0,1]) \qquad h_n(x) \leqslant 2, \qquad [(5),\ (6),\ (4)]$$

а также обусловленное вложением $[0,1] \subseteq \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (a_n, b_n)$ соотношение

$$(\forall x \in [0,1])\ (\exists n \in \mathbb{N}) \qquad h_{n+1}(x) \geqslant 2. \qquad [(6),\ (4)]$$

Тем самым, функциональная последовательность $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет всем предъявленным в формулировке доказываемого утверждения требованиям. □

3. Произвольно фиксированным полигональной функции f и вещественному числу $\varepsilon > 0$ можно сопоставить [6, §11.2.2] функцию $\omega(f,\varepsilon) : [0,1] \to \mathbb{R}$ вида

$$(\forall x \in [0,1]) \qquad [\omega(f,\varepsilon)](x) = \sup_{t,s \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap [0,1]} |f(t) - f(s)|.$$

Очевидным образом имеют место следующие два факта:

3.1. *Пусть даны полигональная функция f и вещественное число $\varepsilon > 0$. Тогда функция $\omega(f,\varepsilon) : [0,1] \to \mathbb{R}$ является равномерно непрерывной.*

3.2. *Пусть даны полигональная функция, вещественное число $\varepsilon > 0$, а также имеющее не превосходящую ε измельчённость интегральное дробление τ отрезка $[0,1]$. Тогда отвечающее дроблению τ значение $I(f,\tau)$ интегральной суммы функции f удовлетворяет соотношению*

$$\left| I(f,\tau) - \int_0^1 f \right| \leqslant \int_0^1 \omega(f,\varepsilon).$$

Также имеют место следующие два факта:

3.3. *Пусть* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *– последовательность полигональных функций, поточечно сходящаяся к некоторой функции* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. *Пусть также для любого вещественного числа* $\varepsilon > 0$ *осуществимо вещественное число* $\delta > 0$, *удовлетворяющее соотношению*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \int\limits_0^1 \omega(f_n, \delta) < \varepsilon.$$

Тогда функция f *интегрируема по Риману.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное вещественное число $\varepsilon > 0$, а также вещественное число $\delta > 0$, удовлетворяющее соотнощению

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \int\limits_0^1 \omega(f_n, \delta) < \varepsilon/3. \tag{1}$$

Тогда для любых двух интегральных дроблений τ и σ отрезка $[0,1]$, имеющих не превосходящую δ измельчённость, будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned} |I(f,\tau) - I(f,\sigma)| &= \lim_{n\to\infty} |I(f_n,\tau) - I(f_n,\sigma)| \\ &\leqslant 2\varepsilon/3 && [3.2,\ (1)] \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Интегрируемость функции f по Риману вытекает теперь из произвольности выбора вещественного числа $\varepsilon > 0$ и критерия Коши. □

3.4. *Пусть* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *и* $\zeta \in (0,1)$ *– рациональные числа, и пусть полигональная функция* f *имеет вид*

$$(\forall x \in [0,1]) \qquad f(x) = \alpha \cdot \sup\left(0,\, 1 - \frac{|x-\zeta|}{\beta}\right).$$

Тогда при любом выборе рационального числа $\varepsilon > 0$ *выполняется соотношение*

$$\int\limits_0^1 \omega(f,\varepsilon) \leqslant 8\alpha\varepsilon. \tag{2}$$

Доказательство. Заметим, что всегда выполняется одно из неравенств $\varepsilon < \beta$ или $\varepsilon \geqslant \beta$.

В первом случае функция f является липшицевой с коэффициентом α/β, а потому функция $\omega(f,\varepsilon)$ мажорируется постоянной $2\alpha\varepsilon/\beta$. Кроме того, указанная функция обращается в нуль вне отрезка $[\zeta-2\beta,\zeta+2\beta]$. Тем самым, неравенство (2) выполняется.

Во втором случае функция $\omega(f,\varepsilon)$ мажорируется постоянной α и обращается в нуль вне отрезка $[\zeta-2\varepsilon,\zeta+2\varepsilon]$. Тем самым, неравенство (2) также выполняется. $\square$

§3. Построение примера

1. На протяжении настоящего параграфа мы будем считать, что натуральные и рациональные числа представляют собой слова в трёхбуквенном алфавите $\{|,-,/\}$ [7, §1.6], а списки рациональных чисел являются $*$-системами [7, §24]. Поскольку любое конструктивное отображение множества натуральных чисел в множество $*$-систем рациональных чисел может быть задано посредством нормального алгорифма в шестибуквенном алфавите $\{|,-,/,*,a,b\}$ [7, §41.7.1], то в дальнейшем мы будем ограничиваться рассмотрением именно таких алгорифмов.

2. Зафиксируем некоторую нумерацию $\{\mathfrak{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$ нормальных алгорифмов указанного в предыдущем пункте вида. Рассмотрим связанное с этой нумерацией множество индексов N, для которых процесс применения алгорифма $\mathfrak{A}_N$ к слову N останавливается с результатом вида

$$*\delta*p_0*q_0*\ldots*p_m*q_m*, \tag{1}$$

где δ – положительное рациональное число, а списки рациональных чисел $\{p_k\}_{k=0}^{m}$ и $\{q_k\}_{k=0}^{m}$ определяют [§1.2] некоторую неотрицательную полигональную функцию g со свойством

$$\int\limits_0^1 g < 1/2. \tag{2}$$

Указанное множество индексов с очевидностью является бесконечным и полуразрешимым, а потому допускает перечисление без повторений некоторым полным арифметическим алгорифмом $\mu:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$.

Последовательность рациональных чисел δ из представления (1) результатов применения алгорифмов $\mathfrak{A}_{\mu(n)}$ к словам $\mu(n)$ мы на протяжении настоящего параграфа будем обозначать в виде $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$. Последовательность соответствующих полигональных функций мы будем обозначать в виде $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$. Кроме того, мы будем предполагать зафиксированной неубывающую последовательность $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных полигональных функций из утверждения §2.2.1.

3. Имеют место следующие три факта:

3.1. *Осуществимы возрастающая последовательность $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, а также последовательность $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$ рациональных точек интервала $(0,1)$ и последовательность $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ положительных рациональных чисел, удовлетворяющие соотношениям*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \beta_n < \inf(\delta_n,\, \zeta_n,\, 1-\zeta_n), \tag{1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})\, (\forall x \in [\zeta_n - \beta_n, \zeta_n + \beta_n]) \quad [g_n + h_{\nu(n)}](x) < 1 < h_{\nu(n+1)}(x). \tag{2}$$

Доказательство. Положим $\nu(0) \rightleftharpoons 0$. Построение значений ζ_n, β_n и $\nu(n+1)$ на основе известного значения $\nu(n)$ может теперь быть произведено следующим образом. В качестве ζ_n выберем произвольную рациональную точку интервала $(0,1)$, удовлетворяющую неравенству $[g_n + h_{\nu(n)}](\zeta_n) < 1$. Осуществимость такой точки гарантирована соотношениями

$$\int_0^1 (g_n + h_{\nu(n)}) < 1/2 + 1/2 \qquad [2\,(2),\ §2.2\,(2)]$$

$$= 1.$$

В качестве $\nu(n+1)$ выберем произвольное натуральное число, удовлетворяющее неравенству $h_{\nu(n+1)}(\zeta_n) > 1$. Осуществимость такого числа гарантирована соотношением §2.2 (1). В качестве β_n теперь остаётся выбрать произвольное положительное рациональное число, чья малость будет достаточна для выполнения соотношений (1) и (2). $\square$

3.2. *Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность полигональных функций вида*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\, (\forall x \in [0,1]) \qquad f_n(x) = 2^{-\mu(n)} \cdot \sup\left(0,\, 1 - \frac{|x-\zeta_n|}{\beta_n}\right), \tag{3}$$

где $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ *– числовые последовательности из утверждения* 3.1. *Тогда осуществима и интегрируема по Риману функция* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющая соотношению*

$$(\forall x \in [0,1]) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $x \in [0,1]$, а также номер $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющий неравенству $h_{\nu(n)}(x) > 1$ [§2.2 (1)]. Тогда выполняется соотношение

$$(\forall k \in \mathbb{N} : k \geqslant n) \qquad f_k(x) = 0, \qquad [(3),\ (2)]$$

означающее сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Кроме того, для любых вещественного числа $\varepsilon > 0$ и номера $n \in \mathbb{N}$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega\left(\sum_{k=0}^{n} f_k,\, \varepsilon/16\right) &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \omega(f_k,\, \varepsilon/16) \\ &< \sum_{k=0}^{n} 2^{-\mu(k)-1} \cdot \varepsilon \qquad [(3),\ §2.3.4] \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

означающие интегрируемость функции f по Риману [§2.3.3]. □

3.3. *Функция* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *из утверждения* 3.2 *не является интегрируемой по Дарбу.*

Доказательство. В случае интегрируемости рассматриваемой функции по Дарбу должен найтись [§2.1.1] алгорифм, перерабатывающий каждое натуральное число n в список вида 2 (1), отвечающие которому положительное рациональное число $\delta > 0$ и неотрицательная полигональная функция g удовлетворяют соотношению

$$(\forall x, y \in [0,1] : \sup(g(x),\, g(y)) < 1,\ |x-y| < \delta) \qquad |f(x)-f(y)| < 2^{-n-1}.$$

При этом, очевидно, найдётся также натуральное число m, для которого значение $\mu(m)$ будет являться номером рассматриваемого алгорифма при нумерации из пункта 2. Однако тогда должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned}
g_m(\zeta_m + \beta_m) &< 1, && [(2)]\\
g_m(\zeta_m) &< 1, && [(2)]\\
|(\zeta_m + \beta_m) - \zeta_m| &= \beta_m \\
&< \delta_m, && [(1)]\\
|f(\zeta_m + \beta_m) - f(\zeta_m)| &= |f_m(\zeta_m + \beta_m) - f_m(\zeta_m)| && [(3),\ (2)]\\
&= |0 - 2^{-\mu(m)}| && [(3)]\\
&= 2^{-\mu(m)},
\end{aligned}$$

противоречащие сделанным предположениям о свойствах алгорифма $\mathfrak{A}_{\mu(m)}$. □

4. Заметим, что применительно к многомерному случаю утверждение об осуществимости функций, интегрируемых по Риману, но не интегрируемых по Дарбу, может быть получено в качестве следствия из результатов [8] о неверности теоремы Фубини для конструктивного интеграла Римана. Однако такое доказательство требует привлечения ряда дополнительных представлений, поэтому на его деталях мы здесь не останавливаемся.

Литература

1. А. А. Марков, *О языке* $Я_{\omega|}$. — ДАН СССР, **215**, No 1 (1974), 57–60.
2. А. А. Владимиров, М. Н. Домбровский–Кабанченко, Ступенчатая семантическая система. М., Изд-во ВЦ РАН, 2009.
3. Б. А. Кушнер, Лекции по конструктивному математическому анализу. М., Наука, 1973.
4. И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин, *О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций.* — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **67** (1962), 458–502.
5. О. Демут, *О конструктивном аналоге связи измеримости множеств и функций по Лебегу.* — Comment. Math. Univ. Carolinae, **14**, No. 3 (1973), 377–396.
6. Н. А. Шанин, *Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства.* — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **67** (1962), 15–294.
7. А. А. Марков, Н. М. Нагорный, Теория алгорифмов. Изд. 2 , М., ФАЗИС 1996.
8. О. Демут, *О теореме Фубини для интеграла Римана в конструктивной математике.* — Comment. Math. Univ. Carolinae **9**, No. 4 (1968), 677–686.

Vladimirov A. A. On a comparison of Darboux and Riemann integrals in constructive analysis.

An example of constructive (in A. A. Markov's sense) real-valued function of one real variable which is integrable by Riemann, but is not integrable by Darboux, is constructed.

ВЦ им. А. А. Дородницына,
ул. Вавилова, 40,
Москва 119333, Россия
E-mail: vladimi@mech.math.msu.su

Поступило 16 апреля 2012 г.