Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 406, 2012 г.

А. В. Пастор, О. П. Родионова

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЧИСЛА СКЛЕЕК

§1. Введение

1.1. Используемые обозначения. Рассмотрим K кругов $D_1, D_2, \ldots, D_K$, на граничных окружностях которых отмечены в сумме $2N$ точек, так, что на каждой из окружностей отмечена хотя бы одна точка. Пусть на каждом из кругов D_i задана определенная ориентация (направление обхода против часовой стрелки), и одна из дуг, на которые отмеченные точки делят его окружность, помечена его номером i. Разобьем произвольным образом на пары все $2N$ получившихся дуг и склеим соответствующие дуги, учитывая ориентацию (склеиваемые дуги должны быть противоположно направлены). В результате получится компактная, ориентированная, но, возможно, несвязная поверхность без края. Отмеченные на граничных окружностях точки и дуги этих окружностей изображают на нашей поверхности некоторый граф.

Далее, мы для удобства будем называть круги $D_1, D_2, \ldots, D_K$ *многоугольниками*, отмеченные на кругах точки – *вершинами*, а дуги, на которые отмеченные точки разбивают окружность, – *ребрами* многоугольника. Соответственно, M-угольником мы будем называть круг, на граничной окружности, которого отмечено ровно M точек. Тем самым мы допускаем существование многоугольников с одной и двумя вершинами. Для каждого из ребер многоугольника одну из его вершин назовем *начальной*, а другую *конечной*, в соответствии с порядком их следования при обходе против часовой стрелки.

Определение 1. *Под* картой *мы будем понимать упорядоченную пару* (X, G), *состоящую из графа* G *(возможно, содержащего кратные*

Ключевые слова: карта, ориентируемая поверхность, склейка.

Исследования выполнены при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН, гранта Президента РФ НШ-3229.2012.1, гранта РФФИ № 11-01-00760-а и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 г.

ребра и петли), вложенного в компактную ориентированную поверхность X без края таким образом, что связные компоненты множества $X \setminus G$, называемые странами карты, гомеоморфны дискам.

Две карты (X, G) и (X', G') называются изоморфными, *если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : X \to X'$, такой, что $f(G) = G'$.*

Родом *карты (X, G) называется род поверхности X.*

Все необходимые сведения о картах (в частности, об их связи с перестановками) можно найти, например, в обзоре [3]. Ниже мы напомним понятия, необходимые для целей данной статьи.

Замечание 1. Отметим, что одному и тому же графу G могут соответствовать несколько неизоморфных карт. Для того, чтобы карта, соответствующая G, задавалась однозначно с точностью до изоморфизма, добавим к графу G следующую дополнительную конструкцию. Каждому ребру графа G поставим в соответствие пару противоположно направленных дуг (ориентированных ребер) и для каждой вершины циклически упорядочим все исходящие из нее дуги (то есть зададим порядок, в котором дуги будут выходить из данной вершины при обходе по часовой стрелке). Известно (см., например, [3]), что выбор циклического порядка для каждой вершины однозначно с точностью до изоморфизма задает карту, соответствующую графу G.

Задав для каждой вершины графа G циклический порядок всех исходящих из нее дуг, мы получим перестановку σ на множестве A всех дуг графа G ($\sigma(e)$ – дуга, выходящая из той же вершины, что и e, и следующая за e при циклическом упорядочении всех дуг, выходящих из данной вершины). Определим также перестановки $\iota, \tau \in S(A)$ следующим образом: $\iota(e)$ – дуга, *противоположная* дуге e, то есть соответствующая тому же ребру графа G, но направленная в противоположную сторону, и $\tau = \sigma\iota$. Поскольку $\iota^2 = 1$, имеем также $\sigma = \tau\iota$. Будем говорить, что дуга e карты (X, G) принадлежит стране F, если она лежит на границе F и ориентирована в направлении обхода границы против часовой стрелки. Заметим, что дуга $\tau(e)$ принадлежит той же стране F и является следующей при обходе границы F против часовой стрелки. Поэтому дугу $\tau(e)$ мы будем называть *последующей* за дугой e, а дугу $\tau^{-1}(e)$ – *предшествующей.* Отметим также, что циклы перестановки σ соответствуют вершинам, циклы ι – ребрам и циклы τ – странам карты (X, G).

Легко видеть, что описанная выше процедура склейки поверхности из K многоугольников дает карту с N ребрами и K странами. Страны полученной карты соответствуют склеиваемым многоугольникам, поэтому занумеруем их числами от 1 до K так же, как и соответствующие многоугольники. Каждое ребро карты соответствует двум сторонам многоугольников. Ориентировав ребра многоугольников против часовой стрелки, мы получим естественную биекцию между множеством всех дуг карты и множеством ребер многоугольников. Дуги карты, соответствующие помеченным ребрам многоугольников, пометим теми же числами.

Итак, мы получили карту с N ребрами и K странами, страны которой занумерованы числами от 1 до K, и для любой страны одна из принадлежащих ей дуг помечена ее номером. Такие карты мы будем называть *помеченными*. Помеченные карты (X, G) и (X', G') мы будем считать *изоморфными*, если существует изоморфизм карт $f : (X, G) \to (X', G')$, сохраняющий номера стран и пометки на дугах. Можно заметить, что описанная выше процедура склейки однозначно с точностью до изоморфизма задает карту, а также что любая карта может быть единственным с точностью до изоморфизма способом склеена из некоторого набора многоугольников. Всюду, где мы будем говорить о количестве помеченных карт или о количестве склеек определенного вида, мы будем подразумевать количество с точностью до изоморфизма. То есть речь будет идти о числе классов изоморфных помеченных карт. Аналогично, говоря о всевозможных помеченных картах данного вида мы будем подразумевать классы изоморфных помеченных карт.

1.2. Постановка задачи. Основным объектом исследования в данной статье будет количество способов склеить из K многоугольников с суммарным числом ребер $2N$ связную ориентированную поверхность рода g.

Замечание 2. Данная задача имеет следующую эквивалентную переформулировку. Занумеруем все дуги карты числами от 1 до $2N$ в следующем естественном порядке: сначала последовательно нумеруем дуги первой страны, начиная с помеченной числом 1, в порядке обхода против часовой стрелки, далее аналогичным образом нумеруем дуги второй страны, и т. д. Тогда определенные выше перестановки ι и τ будут действовать на множестве $\{1, 2, \ldots, 2N\}$. Перестановка ι

состоит из N циклов длины 2, а τ – из K циклов, элементы каждого из которых – последовательные натуральные числа. Широко известно (см. [3]), что такая пара перестановок однозначно с точностью до изоморфизма задает карту. Поскольку циклы перестановки $\sigma = \tau\iota$ соответствуют вершинам склеиваемой карты, а род связной поверхности, на которой изображена карта с V вершинами, N ребрами и K странами, можно вычислить по формуле Эйлера $V-N+K = 2-2g$, задача сводится к нахождению числа пар перестановок (ι, τ) описанного выше вида, таких, что порождаемая ими группа $\langle \iota, \tau \rangle$ транзитивна и их произведение $\tau\iota$ разлагается в произведение $N - K + 2 - 2g$ независимых циклов.

Определение 2. *Через $\varepsilon_g(N, K)$ мы будем обозначать количество способов склеить связную ориентированную поверхность рода g из K многоугольников, в сумме имеющих $2N$ ребер.*

При $N = 0$ положим $\varepsilon_0(0, 1) = 1$ и $\varepsilon_g(0, K) = 0$, если $g + K > 1$.

Число $\varepsilon_g(N, K)$ можно также интерпретировать как количество помеченных карт рода g с N ребрами и K странами. При этом, числу $\varepsilon_0(0, 1)$ будет соответствовать сфера с отмеченной на ней единственной вершиной.

Замечание 3. Как уже отмечалось выше, число вершин карты равно $N - K + 2 - 2g$. Поскольку оно должно быть положительным, при $N < K + 2g - 1$ имеем $\varepsilon_g(N, K) = 0$.

Наряду с описанной выше задачей мы будем рассматривать *двукрашенные склейки*, определяемые следующим образом. Пусть вершины каждого из многоугольников $D_1, D_2, \ldots, D_K$ раскрашены правильным образом в черный и белый цвета, причем склеиваться могут только одноцветные вершины. Тогда в результате склейки получится *двукрашенная карта*, вершины которой правильным образом раскрашены в черный и белый цвета. Ребра многоугольников и соответствующие им дуги карты, исходящие из белых вершин, мы будем называть *белыми*, а исходящие из черных вершин – *черными*. В качестве помеченного ребра в двукрашенном многоугольнике будем всегда выбирать белое ребро. Отметим также, что двукрашенный многоугольник всегда содержит четное число вершин, а склеиваться будут только разноцветные ребра.

Определение 3. Помеченной двукрашенной картой *мы будем называть помеченную карту, вершины которой раскрашены правильным образом в черный и белый цвета так, что все ее помеченные дуги – белые. В случае, если помеченные дуги могут быть как белыми так и черными, будем называть такую карту* квазипомеченной.

Определение 4. *Через $B_g(N,K)$ мы будем обозначать количество способов склеить связную ориентированную поверхность рода g из K двукрашенных многоугольников, в сумме имеющих $2N$ ребер.*

При $N=0$ положим $B_0(0,1)=1$ и $B_g(0,K)=0$, если $g+K>1$.

Число $B_g(N,K)$ можно также интерпретировать как количество помеченных двукрашенных карт рода g с N ребрами и K странами.

Замечание 4. Заметим, что между множествами квазипомеченных двукрашенных карт, в которых числом i помечена черная и белая дуга есть естественная биекция: вместо помеченной белой дуги мы можем пометить последующую за ней черную дугу и наоборот, вместо черной – предшествующую ей белую. Таким образом, количество квазипомеченных двукрашенных карт рода g с N ребрами и K странами равно $2^K B_g(N,K)$.

Склейки поверхности рода g из одного многоугольника впервые рассмотрели J. Harer и D. Zagier в работе [8]. В этой работе количества таких склеек, обозначаемые авторами $\varepsilon_g(N)$, были использованы для вычисления эйлеровой характеристики пространств модулей. В работе [8] была доказана следующая рекуррентная формула для чисел $\varepsilon_g(N)$

$$\varepsilon_g(N)=\frac{2N-1}{N+1}(2\varepsilon_g(N-1)+(N-1)(2N-3)\varepsilon_{g-1}(N-2)). \qquad (1)$$

При этом формально полагается, что $\varepsilon_0(0)=1$. В настоящее время известно порядка десяти различных доказательств формулы (1). В частности, в работе [4] приведено доказательство этой формулы посредством прямой биекции.

Похожая на (1) рекуррентная формула для числа $B_g(N)$ двукрашенных склеек поверхности рода g из одного многоугольника была независимо получена в работах [9] и [1].

$$B_g(N)=\frac{1}{N+1}(2(2N-1)B_g(N-1)+(N-2)(N-1)^2B_{g-1}(N-2)). \quad (2)$$

(Здесь также считаем, что $B_0(0) = 1$.) Биективное доказательство формулы (2) получено в работе [10].

Явные формулы для чисел $\varepsilon_g(N)$ и $B_g(N)$ при малых значениях g содержатся в работах [7] и [1]. Приведем некоторые из них, которые нам потребуются в дальнейшем

$$\varepsilon_0(N) = B_0(N) = \frac{(2N)!}{N!(N+1)!}; \tag{3}$$

$$\varepsilon_1(N) = \frac{(2N)!}{12N!(N-2)!}. \tag{4}$$

Склейки поверхности рода g из двух многоугольников рассматривались в работах [5] и [2]. В работе [5] вычислена производящая функция для числа склеек поверхности рода g из p-угольника и q-угольника. Однако полученная формула весьма громоздка и никаких (ни явных, ни рекуррентных) формул для самих чисел $\varepsilon_g(N,2)$ из нее не выведено. В работе [2] получено более простое выражение для производящей функции, а именно, доказано, что для любого $g \geqslant 0$

$$\sum_{N\geqslant 0} \varepsilon_g(N,2) z^N = \frac{P_g^{[2]}(z)}{(1-4z)^{3g+2}},$$

где $P_g^{[2]}(z)$ – многочлен степени не более, чем $3g+1$, для вычисления которого предложен рекурсивный метод. Кроме того, в работе [2] получены явные формулы для чисел $\varepsilon_0(N,2)$, $\varepsilon_1(N,2)$ и $\varepsilon_2(N,2)$, а именно,

$$\varepsilon_0(N,2) = N4^{N-1}; \tag{5}$$

$$\varepsilon_1(N,2) = \frac{1}{12}(13N+3)N(N-1)(N-2)4^{N-3}; \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2(N,2) = \frac{1}{180}&(445N^2-401N-210)N(N-1)\\ &\times(N-2)(N-3)(N-4)4^{N-6}.\end{aligned} \tag{7}$$

В данной работе мы дадим элементарные доказательства формул (5) и (6), а также получим явные формулы для чисел $B_0(N,2)$ и $\varepsilon_0(N,3)$ (см. теоремы 4 и 6).

1.3. Операция удаления ребра. Все формулы, доказываемые в данной работе, мы докажем методом математической индукции. Схема доказательства будет такова: мы рассматриваем произвольную связную помеченную карту рода g с $N > 1$ ребрами и K странами. Удалив из рассматриваемой карты ребро, помеченное числом 1, мы получим связную карту или пару связных карт с меньшим числом ребер. При помощи этого мы получим рекуррентное соотношение для чисел $\varepsilon_g(N, K)$, после чего методом математической индукции докажем явную формулу.

Рассмотрим более подробно *операцию удаления ребра*. Пусть помеченная карта (X, G), где X – связная поверхность рода g, а G – граф с V вершинами и $N > 1$ ребрами, склеена из многоугольников $D_1, D_2, \ldots, D_K$, содержащих $m_1, m_2, \ldots, m_K$ ребер соответственно. Тогда $m_1 + m_2 + \ldots + m_K = 2N$. Обозначим через e_i дугу, помеченную числом i; через e'_i – дугу, противоположную e_i, и через $\widetilde{e}_i$ соответствующее им ребро графа G. Удалим из графа G ребро $\widetilde{e}_1$. Для каждой вершины получившегося графа G_1 исходящие из нее дуги можно циклически упорядочить так же, как они были упорядочены в карте (X, G) (удаляемые дуги просто исключаются из циклического порядка). Как было отмечено в замечании 1, графу G_1 с указанным циклическим порядком дуг можно единственным с точностью до изоморфизма образом поставить в соответствие карту (X_1, G_1). В случае, если поверхности X и X_1 гомеоморфны, мы будем не умаляя общности полагать, что $X_1 = X$. Однако, эти поверхности могут и не быть гомеоморфны: например, если граф G_1 несвязен, то и поверхность X_1, очевидно, тоже должна быть несвязна.

Чтобы превратить карту (X_1, G_1) в помеченную карту или пару помеченных карт, нам нужно занумеровать страны и расставить пометки на дугах. Для этого нам нужно будет рассмотреть следующие 4 случая:

(1) *дуги e_1 и e'_1 принадлежат разным странам*;
(2) *дуги e_1 и e'_1 принадлежат стране 1 и являются в ней последовательными*;
(3) *дуги e_1 и e'_1 принадлежат стране 1 и не являются в ней последовательными, а граф G_1 – связен*;
(4) *дуги e_1 и e'_1 принадлежат стране 1 и не являются в ней последовательными, а граф G_1 несвязен.*

Для каждого из указанных случаев мы опишем получающиеся в результате применения операции удаления ребра карты или пары карт, а также посчитаем, сколькими способами могла быть получена каждая карта (пара карт), если применить операцию удаления ребра ко всем картам, удовлетворяющим условиям соответствующего случая.

Приступим к разбору случаев.

1. *Дуги e_1 и e'_1 принадлежат разным странам.* Пусть e'_1 принадлежит стране с номером $j \neq 1$. Тогда при удалении ребра $\widetilde{e}_1$ страны 1 и j склеиваются, и образуется карта (X, G_1) рода g с $N-1$ ребром и $K-1$ страной. Чтобы получить помеченную карту, присвоим стране, образовавшейся при удалении $\widetilde{e}_1$, номер 1; остальные страны перенумеруем числами от 2 до $K-1$ в порядке возрастания исходных номеров и исправим соответствующим образом пометки на дугах. Осталось пометить числом 1 одну из дуг карты (X, G_1). Если $e_j \neq e'_1$, то пометим числом 1 дугу e_j; если $e_j = e'_1$ и $m_1 > 1$, то пометим числом 1 дугу, последующую за e_1 в карте (X, G); если же $e_j = e'_1$ и $m_1 = 1$, то пометим числом 1 дугу, последующую за e_j в карте (X, G) (см. рисунок 1). Отметим, что в последнем случае $m_j > 1$, поскольку карта (X, G) связна и $N > 1$. В итоге мы получим связную помеченную карту рода g с $N-1$ ребром и $K-1$ страной. Заметим также, что страна номер 1 полученной карты содержит $m_1 + m_j - 2$ дуги.

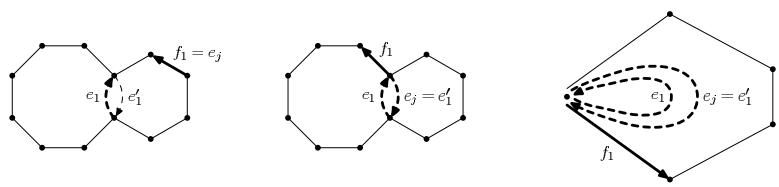

Рис. 1. Операция удаления ребра, случай **1**. В каждом из подслучаев дуга, которая будет помечена числом 1, обозначена f_1.

Лемма 1. *Применим операцию удаления ребра ко всем помеченным картам, удовлетворяющим условиям случая* **1**. *Тогда любая помеченная карта рода g с $N-1$ ребром и $K-1$ страной, страна номер* 1 *которой содержит M дуг, будет получена $\frac{(M+1)(M+2)(K-1)}{2}$ способами.*

Доказательство. Пусть (X, G_1) – помеченная карта рода g с $N-1$ ребром и $K-1$ страной; F_1 – ее страна номер 1; D_1 – M-угольник, соответствующий стране F_1; f_1 – дуга, помеченная числом 1; w – начальная вершина помеченного ребра многоугольника D_1. Такая карта могла быть получена удалением ребра $\widetilde{e}_1$ исходной карты, проходившего внутри страны F_1. Это ребро однозначно с точностью до изоморфизма задается неупорядоченной парой $\{a, b\}$ вершин многоугольника D_1, причем вершины в паре могут совпадать. Таких пар $\frac{M(M+1)}{2}$.

Восстановим исходные пометки. Во-первых, заметим, что страна F_1 могла быть получена склеиванием стран номер 1 и j исходной карты, причем число j можно выбрать $K-1$ способом. Для каждого значения j мы должны указать, какая из частей страны F_1 будет иметь номер 1, а какая номер j и какие дуги в них будут отмечены (номера остальных стран и их помеченные дуги восстанавливаются однозначно). Для этого достаточно указать дугу e_j: действительно, это однозначно задает нумерацию частей, а числом 1 будет помечена та из добавленных дуг, которая принадлежит первой части.

По построению операции удаления ребра, здесь возможны два случая: либо $e_j = f_1$, либо $e_j = e'_1$. Первый случай возможен для любого из ребер $\widetilde{e}_1$, то есть встречается $\frac{M(M+1)}{2}$ раз. Второй случай возможен, только если одна из вершин a или b совпадает с w, причем, если только одна из них совпадает с w, то направление e_j определяется однозначно, а если обе, то двумя способами. Итого, второй случай встречается $M+1$ раз. Тогда для любого значения j мы получаем $\frac{(M+1)(M+2)}{2}$ способов, а всего $\frac{(M+1)(M+2)(K-1)}{2}$ способов. □

2. *Дуги e_1 и e'_1 принадлежат стране 1 и являются в ней последовательными.* В этом случае, поскольку карта (X, G) связна и $N > 1$, мы получаем $m_1 > 2$, и, следовательно, ровно один из концов ребра $\widetilde{e}_1$ имеет степень 1. Обозначим его u. Тогда при удалении ребра $\widetilde{e}_1$ и вершины u образуется карта (X, G'_1) с $N-1$ ребром и K странами. Сохраним нумерацию стран и пометки на всех дугах, кроме удаленной дуги e_1. Числом 1 пометим дугу, последующую в (X, G) за той из дуг e_1 и e'_1, которая выходит из u (см. рисунок 2). В итоге мы получим связную помеченную карту рода g с $V-1$ вершиной, $N-1$ ребром и K странами.

Рис. 2. Операция удаления ребра, случай **2**. Случаи различного расположения дуг e_1 и e_1'.

Лемма 2. *Применим операцию удаления ребра, ко всем помеченным картам, удовлетворяющим условиям случая* **2**. *Любая помеченная карта рода g с $N-1$ ребром и K странами будет получена двумя способами.*

Доказательство. Пусть (X, G_1') – помеченная карта рода g с $N-1$ ребром и K странами; F_1 – ее страна номер 1; v – начальная вершина дуги f_1, помеченной числом 1. Такая карта могла быть получена удалением ребра uv, такого, что вершина u лежит внутри страны F_1 и дуга f_1 до удаления была последующей за дугой uv. Ребро uv можно провести единственным с точностью до изоморфизма способом, причем номера всех стран и дуги, помеченные числами больше 1, сохранятся. Единственная неоднозначность заключается в выборе того, какая из дуг, uv или vu будет помечена числом 1, что дает нам два способа. □

3. *Дуги e_1 и e_1' принадлежат стране 1 и не являются в ней последовательными, а граф G_1 связен.* Рассмотрим определенные выше перестановки σ, ι, τ на множестве дуг карты (X, G) (перестановка σ задает циклический порядок дуг, выходящий из каждой вершины, ι – дугу, противоположную данной, а $\tau = \sigma\iota$ – дугу, последующую за данной) и аналогичные перестановки σ_1, ι_1, $\tau_1 = \sigma_1\iota_1$ на множестве дуг карты (X_1, G_1). Как отмечалось выше, перестановка σ_1 получается из σ путем исключения дуг e_1 и e_1', а ι_1 получается из ι_1 исключением цикла (e_1, e_1'). Из этого следует, что

$$\tau_1(e) = \begin{cases} \tau(e), & \tau(e) \notin \{e_1, e_1'\}; \\ \tau(e_1'), & \tau(e) = e_1; \\ \tau(e_1), & \tau(e) = e_1'. \end{cases}$$

Таким образом, в этом случае стране 1 карты (X, G) будут соответствовать две страны карты (X_1, G_1), одна из которых состоит из дуг, лежащих в карте (X, G) на пути от e_1 к e_1' при обходе страны 1 против часовой стрелке, а другая – из дуг, лежащих на пути от e_1' к e_1. Занумеруем первую из этих стран числом 1, а вторую – числом $K+1$, и отметим в каждой из них дугу, последующую за e_1 и e_1' соответственно (см. рисунок 3a). Получилась связная помеченная карта с $N-1$ ребром и $K+1$ страной. Заметим, что карта (X_1, G_1) содержит V вершин, откуда по формуле Эйлера легко получить, что она имеет род $g-1$.

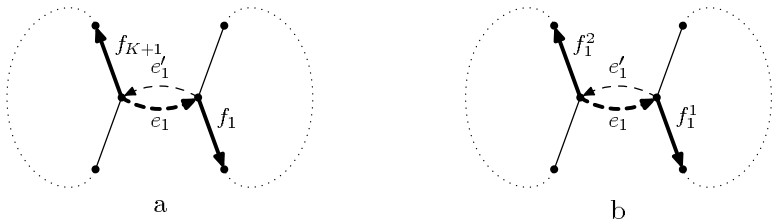

Рис. 3. Операция удаления ребра, случаи **3** и **4**. В случае **3** (рис. 3a) дуги, которые будут помечены числами 1 и $K+1$, обозначены f_1 и f_{K+1} соответственно. В случае **4** (рис. 3b) дуги, которые будут помечены числом 1 в картах (X_1^1, G_1^1) и (X_1^2, G_1^2), обозначены f_1^1 и f_1^2 соответственно.

Замечание 5. Фактически, в этом случае мы удаляем ребро, проходящее по одной из ручек поверхности X, в результате чего одна из связных компонент множества $X \setminus G_1$ становится гомеоморфной цилиндру. Для того, чтобы получить карту (X_1, G_1), мы вырезаем из поверхности X этот цилиндр и заменяем его на два диска, соответствующих его основаниям.

Лемма 3. *Применим операцию удаления ребра, ко всем помеченным картам, удовлетворяющим условиям случая* **3**. *Любая помеченная карта рода $g-1$ с $N-1$ ребром и $K+1$ страной будет получена одним способом.*

Доказательство. Пусть (X_1, G_1) – помеченная карта рода $g-1$ с $N-1$ ребром и $K+1$ страной. Обозначим через f_i дугу, помеченную числом i, и через v_i ее начальную вершину. Покажем, что помеченная карта (X, G), из которой была получена (X_1, G_1), восстанавливается однозначно. Заметим, что граф G получается из G_1 добавлением ребра $v_1 v_{K+1}$. При этом циклическое упорядочение дуг, исходящих из любой вершины графа G, восстанавливается однозначно: для вершин, отличных от v_1, v_{K+1} оно не меняется, а для вершины v_i (где $i \in \{1, K+1\}$) добавленная дуга будет расположена непосредственно перед дугой f_i. Таким образом, карта (X, G) восстанавливается однозначно, при этом нумерация всех стран, кроме стран номер 1 и $K+1$, и их отмеченные дуги сохраняются. Дуга, помеченная числом 1, также восстанавливается однозначно: она будет вести из v_{K+1} в v_1. □

4. *Дуги e_1 и e_1' принадлежат стране 1 и не являются в ней последовательными, а граф G_1 несвязен.* В этом случае карта (X_1, G_1) будет состоять из двух компонент связности. Как и в предыдущем случае, стране 1 карты (X, G) будут соответствовать две страны карты (X_1, G_1), одна из которых состоит из дуг, лежащих на пути от e_1 к e_1', а другая – из дуг, лежащих на пути от e_1' к e_1. Заметим, что эти две страны лежат в разных компонентах связности карты (X_1, G_1). Обозначим через (X_1^1, G_1^1) компоненту, содержащую первую из этих двух стран, а через (X_1^2, G_1^2) – компоненту, содержащую вторую. В каждой из этих двух компонент занумеруем числом 1 страну, образовавшуюся из страны 1 карты (X, G), и отметим в ней ту же дугу, что и в предыдущем случае (то есть дугу, последующую за e_1 и e_1' соответственно – см. рисунок 3b). Остальные страны, принадлежащие каждой из компонент, и соответствующие им помеченные дуги перенумеруем в порядке возрастания исходных номеров. В итоге мы получим упорядоченную пару помеченных карт, в сумме содержащих V вершин, $N-1$ ребро и $K+1$ страну, причем каждая из карт содержит хотя бы одно ребро. Пусть первая из них имеет род g_1, а вторая – род g_2. Из формулы Эйлера легко следует, что $g_1 + g_2 = g$.

Замечание 6. Как и в предыдущем случае, здесь одна из связных компонент множества $X \setminus G_1$ гомеоморфна цилиндру. Но при замене этого цилиндра на два диска, соответствующих его основаниям, поверхность распадается на две связные компоненты.

Лемма 4. *Применим операцию удаления ребра ко всем помеченным картам, удовлетворяющим условиям случая* **4**. *Любая упорядоченная пара помеченных карт с ненулевым числом ребер, в сумме содержащих $N-1$ ребро и $K+1$ страну, и имеющих суммарный род g, будет получена $C_{K-1}^{K_1-1} = C_{K-1}^{K_2-1}$ способами, где K_1 – количество стран в первой, а K_2 – во второй карте пары.*

Доказательство. Доказательство этой леммы очень похоже на доказательство леммы 3. Отличие заключается в том, что, во-первых, добавляемое ребро соединяет начальные вершины дуг, помеченных числом 1 в каждой из карт (X_1^1, G_1^1) и (X_1^2, G_1^2) упорядоченной пары, и, во-вторых, в том, что нумерация стран восстанавливается неоднозначно. Напомним, что все страны, вошедшие в каждую из карт, мы перенумеровали в порядке возрастания их исходных номеров. То есть нумерация стран исходной карты однозначно задается выбором множества номеров, которые будут иметь в ней страны, соответствующие странам карты (X_1^1, G_1^1) с номерами большими 1. Такой выбор можно сделать $C_{K-1}^{K_1-1}$ способами. □

1.4. Некоторые полезные формулы. В этом разделе мы при помощи техники, изложенной в книге [6], установим ряд соотношений на биномиальные коэффициенты и подобные им выражения, которые будут использоваться в дальнейшем.

Определение 5. *Для целых i и k, таких, что $i \geqslant 0$, $k > 0$, определим число $p_k(i)$ следующим образом:*

$$p_k(i) = \prod_{t=0}^{k-1} (i+1-t). \tag{8}$$

При этом формально полагаем: $p_0(i) = 1$ для любого $i \geqslant 0$.

Нетрудно видеть, что выполняются следующие соотношения:

$$p_k(i) = (i+2-k)p_{k-1}(i), \quad i \geqslant 0, k > 0; \tag{9}$$

$$p_k(i) = (i+1)p_{k-1}(i-1), \quad i > 0, k > 0; \tag{10}$$

Замечание 7. По сути, числа $p_k(i)$ являются убывающими факториальными степенями числа $i+1$, которые часто обозначаются $(i+1)^{\underline{k}}$.

Определение 6. *Для целых M, m, k, таких, что $M \geqslant m \geqslant 0$, $k \leqslant m$, определим число $A(M,m,k)$ следующим образом:*

$$A(M,m,k) = \sum_{j=m}^{M} \frac{(2j)!}{4^j j!(j-k)!}. \tag{11}$$

При $m > M \geqslant -1$ будем формально полагать $A(M,m,k) = 0$.

Лемма 5. *Для любых целых M, m, k, таких, что $M \geqslant m \geqslant 0$, $k \leqslant m$, выполняется следующее соотношение:*

$$A(M,m,k) = \frac{2}{2k+1}\left(\frac{(M+1-k)(2M+2)!}{4^{M+1}(M+1)!(M+1-k)!} - \frac{(m-k)(2m)!}{4^m m!(m-k)!}\right). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $a_j(k) = \frac{(2j)!}{4^j j!(j-k)!}$, где $k \leqslant j$. Легко видеть, что

$$a_j(k) = \frac{2}{2k+1}\left((j+1-k)a_{j+1}(k) - (j-k)a_j(k)\right).$$

Складывая эти равенства при $j = m, \ldots, M$ и замечая, что второй член каждого слагаемого сокращается с первым членом последующего слагаемого, получаем требуемое равенство. □

Следствие 1. *При всех $M \geqslant 0$ имеет место равенство*

$$A(M,0,-1) = \sum_{j=0}^{M} \frac{(2j)!}{4^j j!(j+1)!} = 2 - \frac{2(M+2)(2M+2)!}{4^{M+1}(M+1)!(M+2)!}. \tag{13}$$

Следствие 2. *При всех $M \geqslant -1$, $k \geqslant 0$ имеет место равенство*

$$A(M,k,k) = \sum_{j=k}^{M} \frac{(2j)!}{4^j j!(j-k)!} = \frac{2}{2k+1} \cdot \frac{p_k(M)(2M+2)!}{4^{M+1}(M+1)!(M+1)!}. \tag{14}$$

Доказательство. При $M \geqslant k$ следует непосредственно из формулы (12), а при $M < k$ все выражения, равенство которых утверждает данное следствие, равны нулю. □

Определение 7. *Для целых N и k, таких, что $N, k \geqslant 0$, определим число $D_k(N)$ следующим образом:*

$$D_k(N) = \sum_{i=0}^{N} p_k(i) \frac{C_{2i+1}^{i} \cdot C_{2N-2i+1}^{N-i}}{2i+1}. \tag{15}$$

Лемма 6. *Для любого $N \geqslant 0$ выполняются следующие соотношения:*

a) $$D_0(N) = C_{2N+2}^N; \tag{16}$$

b) $$D_1(N) = 2 \cdot 4^N - \frac{1}{2} C_{2N+2}^{N+1}; \tag{17}$$

c) $$D_2(N) = (N+1)\left(4^N - \frac{1}{2} C_{2N+2}^{N+1}\right); \tag{18}$$

d) $$D_3(N) = N(N+1)\left(3 \cdot 4^{N-1} - \frac{1}{2} C_{2N+2}^{N+1}\right); \tag{19}$$

e) $$D_4(N) = (N-1)N(N+1)\left(10 \cdot 4^{N-2} - \frac{1}{2} C_{2N+2}^{N+1}\right). \tag{20}$$

Доказательство. a) Воспользуемся следующей формулой для свертки суммы биномиальных коэффициентов (см., например, [6, формула (5.62)]):

$$\sum_k C_{tk+r}^k \cdot C_{t(N-k)+s}^{N-k} \cdot \frac{r}{tk+r} = C_{tN+r+s}^N.$$

Положив в этой формуле $r = s = 1$, $t = 2$, получим:

$$D_0(N) = \sum_{k=0}^{N} \frac{C_{2k+1}^k \cdot C_{2N-2k+1}^{N-k}}{2k+1} = C_{2N+2}^N.$$

Таким образом, утверждение *a)* доказано. Прежде чем приступить к доказательству следующих пунктов, сформулируем некоторые общие для них утверждения. Введем обозначение

$$d_i(N) = (i+1)\frac{C_{2i+1}^i \cdot C_{2N-2i+1}^{N-i}}{2i+1}. \tag{21}$$

Легко видеть, что при $N, i > 0$ выполняется следующее соотношение:

$$d_i(N) = 2 \cdot \frac{2i-1}{i} \cdot d_{i-1}(N-1). \tag{22}$$

Из формулы (9) следует, что $(2i+1)p_{k-1}(i) = 2p_k(i) + (2k-3)p_{k-1}(i)$ при $i \geqslant 0$, $k > 0$. Тогда, учитывая также формулы (10), (21) и (22)

получим, что при всех $k > 0$ выполнены равенства

$$D_k(N) = \sum_{i=0}^{N} p_k(i) \frac{C_{2i+1}^{i} \cdot C_{2N-2i+1}^{N-i}}{2i+1} = p_k(0) C_{2N+1}^{N} + \sum_{i=1}^{N} \frac{p_k(i)}{i+1} d_i(N)$$

$$= p_k(0) C_{2N+1}^{N} + \sum_{i=1}^{N} p_{k-1}(i-1) \frac{2(2i-1)}{i} d_{i-1}(N-1)$$

$$= p_k(0) C_{2N+1}^{N} + 2 \sum_{j=0}^{N-1} p_{k-1}(j) \frac{2j+1}{j+1} d_j(N-1)$$

$$= p_k(0) C_{2N+1}^{N} + 4 \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_k(j)}{j+1} d_j(N-1) + 2(2k-3) \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_{k-1}(j)}{j+1} d_j(N-1).$$

Из этого при помощи формул (15), (21) получаем, что при всех $k > 0$ выполнено следующее соотношение:

$$D_k(N) = p_k(0) C_{2N+1}^{N} + 4 D_k(N-1) + 2(2k-3) D_{k-1}(N-1). \qquad (23)$$

b) Из формул (23) и (16) следует, что

$$D_1(N) = p_1(0) C_{2N+1}^{N} + 4 D_1(N-1) - 2 D_0(N-1)$$
$$= 4 D_1(N-1) + C_{2N+1}^{N} - 2 C_{2N}^{N-1} = 4 D_1(N-1) + \frac{(2N)!}{N!(N+1)!},$$

откуда по индукции легко вывести формулу

$$D_1(N) = 4^N D_1(0) + \sum_{i=1}^{N} 4^{N-i} \frac{(2i)!}{i!(i+1)!}.$$

Учитывая, что $D_1(0) = 1$, и применяя формулу (13), получим:

$$D_1(N) = 4^N + 4^N \sum_{i=1}^{N} \frac{(2i)!}{4^i i!(i+1)!} = 4^N \sum_{i=0}^{N} \frac{(2i)!}{4^i i!(i+1)!}$$
$$= 4^N \left(2 - \frac{2(N+2)(2N+2)!}{4^{N+1}(N+1)!(N+2)!} \right) = 2 \cdot 4^N - \frac{1}{2} C_{2N+2}^{N+1}.$$

Таким образом, утверждение *b)* доказано.

Заметим, что $p_k(0) = 0$ и $D_k(0) = 0$ при $k > 1$ (формулы (8), (15)). Тогда формулу (23) можно упростить, и из нее может быть легко получено следующее рекуррентное соотношение для $D_k(N)$ при $k > 1$:

$$
\begin{aligned}
D_k(N) &= 4D_k(N-1) + 2(2k-3)D_{k-1}(N-1) \\
&= 4^N D_k(0) + 2(2k-3)\sum_{i=1}^{N} 4^{N-i} D_{k-1}(i-1) \qquad (24) \\
&= 2(2k-3)4^N \sum_{i=1}^{N} \frac{D_{k-1}(i-1)}{4^i}.
\end{aligned}
$$

c) По формуле (24), учитывая формулы (17) и формулу (14) для $k = 0$, имеем:

$$
\begin{aligned}
D_2(N) &= 2\cdot 4^N \sum_{i=1}^{N} \frac{D_1(i-1)}{4^i} = 2\cdot 4^N \sum_{i=1}^{N} \frac{2\cdot 4^{i-1} - \frac{1}{2}C_{2i}^{i}}{4^i} \\
&= 4^N \cdot N - 4^N \sum_{i=1}^{N} \frac{C_{2i}^{i}}{4^i} = (N+1)4^N - 4^N \sum_{i=0}^{N} \frac{(2i)!}{4^i i! i!} \\
&= (N+1)4^N - 4^N \frac{2(N+1)(2N+2)!}{4^{N+1}(N+1)!(N+1)!} \\
&= (N+1)\left(4^N - \frac{1}{2}C_{2N+2}^{N+1}\right).
\end{aligned}
$$

d) По формулам (24), (18) и формуле (14) для $k = 1$ имеем:

$$
\begin{aligned}
D_3(N) &= 2\cdot 3\cdot 4^N \sum_{i=1}^{N} \frac{D_2(i-1)}{4^i} = 6\cdot 4^N \sum_{i=1}^{N} \frac{i\cdot\left(4^{i-1} - \frac{1}{2}C_{2i}^{i}\right)}{4^i} \\
&= 6\cdot 4^{N-1} \sum_{i=1}^{N} i - 3\cdot 4^N \sum_{i=1}^{N} \frac{(2i)!}{4^i i!(i-1)!} \\
&= N(N+1)\cdot 3\cdot 4^{N-1} - 3\cdot 4^N \frac{2N(N+1)(2N+2)!}{3\cdot 4^{N+1}(N+1)!(N+1)!} \\
&= N(N+1)\left(3\cdot 4^{N-1} - \frac{1}{2}C_{2N+2}^{N+1}\right).
\end{aligned}
$$

e) По формулам (24), (19) и формуле (14) для $k = 2$ имеем:

$$\begin{aligned} D_4(N) &= 2\cdot 5\cdot 4^N \sum_{i=1}^{N} \frac{D_3(i-1)}{4^i} = 10\cdot 4^N \sum_{i=1}^{N} \frac{(i-1)i\cdot\left(3\cdot 4^{i-2}-\frac{1}{2}C_{2i}^{i}\right)}{4^i} \\ &= 30\cdot 4^{N-2}\left(\sum_{i=1}^{N} i^2 - \sum_{i=1}^{N} i\right) - 5\cdot 4^N \sum_{i=2}^{N} \frac{(2i)!}{4^i i!(i-2)!} \\ &= 10\cdot 4^{N-2}(N-1)N(N+1) - \frac{5\cdot 4^N\cdot 2(N-1)N(N+1)(2N+2)!}{5\cdot 4^{N+1}(N+1)!(N+1)!} \\ &= (N-1)N(N+1)\left(10\cdot 4^{N-2} - \frac{1}{2}C_{2N+2}^{N+1}\right). \end{aligned}$$

□

§2. Склейка сферы из двух многоугольников

В данном разделе мы докажем рекуррентную и явную формулы для чисел $\varepsilon_0(N,2)$. Число $\varepsilon_0(N,2)$ можно интерпретировать как количество помеченных карт на сфере, содержащих N ребер и 2 страны.

Теорема 1. *Числа $\varepsilon_0(N,2)$ при $N \geqslant 2$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:*

$$\varepsilon_0(N,2) = 2\sum_{i=0}^{N-2} \varepsilon_0(i)\varepsilon_0(N-i-1,2) + N(2N-1)\varepsilon_0(N-1). \qquad (25)$$

Доказательство. Рассмотрим всевозможные помеченные карты на сфере, содержащие $N > 1$ ребер и 2 страны, и применим к каждой из них операцию удаления ребра. Поскольку $g = 0$, случай **3** из описания этой операции невозможен. Так что в результате могли получиться:

- помеченная карта на сфере с $N-1$ ребром и одной страной;
- помеченная карта на сфере с $N-1$ ребром и двумя странами;
- упорядоченная пара помеченных карт на сферах, суммарно содержащих $N-1$ ребро и три страны, причем каждая из карт содержит хотя бы одно ребро.

По леммам 1 и 2 каждая из $\varepsilon_0(N-1)$ помеченных карт на сфере с $N-1$ ребром и одной страной встречается $N(2N-1)$ раз, а каждая из $\varepsilon_0(N-1,2)$ помеченных карт на сфере с $N-1$ ребром и двумя странами встречается 2 раза. Рассмотрим упорядоченные пары помеченных карт на сферах, суммарно содержащих $N-1$ ребро и три страны,

причем карта с одной страной содержит i ребер. Легко видеть, что число таких пар равно $2\varepsilon_0(i)\varepsilon_0(N-i-1,2)$, и по лемме 4 каждая из них встречается один раз.

В итоге получаем формулу

$$\varepsilon_0(N,2) = N(2N-1)\varepsilon_0(N-1)+2\varepsilon_0(N-1,2)+2\sum_{i=1}^{N-2}\varepsilon_0(i)\varepsilon_0(N-i-1,2).$$

Из этого, учитывая, что $\varepsilon_0(0)=1$, получаем требуемую формулу. □

Теорема 2. *Числа $\varepsilon_0(N,2)$ при $N \geqslant 1$ удовлетворяют следующему соотношению:*

$$\varepsilon_0(N,2) = N\cdot 4^{N-1}. \tag{26}$$

Доказательство. Докажем утверждение теоремы по индукции. База для $N=1$ очевидна. Докажем переход. Пусть $\varepsilon_0(k,2)=k\cdot 4^{k-1}$ для всех $k<N$. Покажем, что тогда $\varepsilon_0(N,2)=N\cdot 4^{N-1}$.

Из формулы (25), применяя индукционное предположение, а также формулы (3), (13) и формулу (14) для $k=0$ получаем:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0(N,2) &= 2\sum_{i=0}^{N-2}\varepsilon_0(i)\varepsilon_0(N-i-1,2) + N(2N-1)\varepsilon_0(N-1)\\
&= 2\sum_{i=0}^{N-2}\frac{(2i)!}{i!(i+1)!}(N-i-1)4^{N-i-2} + N(2N-1)\varepsilon_0(N-1)\\
&= 2\cdot 4^{N-2}\left(N\sum_{i=0}^{N-2}\frac{(2i)!}{4^i i!(i+1)!} - \sum_{i=0}^{N-2}\frac{(2i)!}{4^i i! i!}\right) + N(2N-1)\varepsilon_0(N-1)\\
&= 2^{2N-3}\left(2N - \frac{2N^2(2N-2)!}{4^{N-1}(N-1)!N!} - \frac{2(N-1)(2N-2)!}{4^{N-1}(N-1)!(N-1)!}\right)\\
&\quad + N(2N-1)\frac{(2N-2)!}{(N-1)!N!} = N\cdot 4^{N-1}.
\end{aligned}$$

□

§3. Склейка сферы из двух двукрашенных многоугольников

В данном разделе мы докажем рекуррентную и явную формулы для чисел $B_0(N,2)$. Число $B_0(N,2)$ можно интерпретировать как количество помеченных двукрашенных карт на сфере, содержащих N ребер и 2 страны.

Теорема 3. *Числа $B_0(N,2)$ при $N \geqslant 2$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:*

$$B_0(N,2) = 2\sum_{i=0}^{N-3} B_0(i)B_0(N-i-1,2) + \frac{N(N-1)}{2}B_0(N-1). \qquad (27)$$

Доказательство. Заметим, что, применив операцию удаления ребра к помеченной двукрашенной карте, мы получим либо квазипомеченную двукрашенную карту, либо упорядоченную пару квазипомеченных двукрашенных карт. Рассмотрим всевозможные помеченные двукрашенные карты на сфере, содержащие $N > 1$ ребер и 2 страны, и применим к каждой из них операцию удаления ребра. Для каждой из карт имеет место ровно один из следующих трех случаев.

1. *Дуги удаленного ребра $\widetilde{e}_1$ принадлежат разным странам.* Напомним, что согласно определению помеченной двукрашенной карты, все ее помеченные дуги – белые. В частности, белой является дуга e_1, а противоположная ей дуга e_1' является черной. Тогда дуга e_1' не могла быть помечена числом 2. Следовательно, в полученной карте числом 1 будет помечена дуга, которая до удаления была помечена числом 2, и эта дуга является белой. Таким образом, в этом случае получится помеченная двукрашенная карта на сфере с $N-1$ ребром и одной страной. Посчитаем, сколькими способами мы получим каждую такую карту.

Пусть (X, G_1) – помеченная двукрашенная карта на сфере с $N-1$ ребром и одной страной; F_1 – ее единственная страна; D_1 – $(2N-2)$-угольник, соответствующий стране F_1; f_1 – дуга, помеченная числом 1. Такая карта могла быть получена удалением ребра $\widetilde{e}_1$ исходной карты, проходившего внутри страны F_1. Это ребро однозначно с точностью до изоморфизма задается парой разноцветных вершин многоугольника D_1. Пометки также восстанавливаются однозначно: числом 2 была помечена дуга f_1, а числом 1 – белая дуга, соответствующая ребру $\widetilde{e}_1$. Нам осталось выяснить, сколькими способами можно провести ребро

$\widetilde{e}_1$, так, чтобы соответствующая ему белая дуга e_1 и дуга f_1 лежали в разных частях страны F_1. Для этого занумеруем вершины D_1 числами от 1 до $2N-2$ по часовой стрелке, стартуя с начальной вершины помеченного ребра многоугольника D_1. Тогда все белые вершины будут иметь нечетные, а черные – четные номера. Следовательно, дуга e_1 будет задаваться парой чисел $a, b \in \{1, \ldots, 2N-2\}$, где число a нечетно и b – четно. Условие о том, что дуги e_1 и f_1 лежат в разных частях страны F_1, равносильно тому, что дуги e_1' и f_1 лежат в одной части, что в свою очередь равносильно тому, что $b > a$ (см. рисунок 4). Легко видеть, что число таких пар a, b равно $\frac{N(N-1)}{2}$.

Таким образом, любую из $B_0(N-1)$ помеченных двукрашенных карт на сфере с $N-1$ ребром и одной страной мы можем получить $\frac{N(N-1)}{2}$ способами, следовательно, случай **1** возникает для

$$\frac{N(N-1)}{2} B_0(N-1)$$

исходных карт.

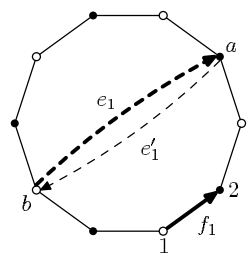

Рис. 4. Операция удаления ребра для двукрашенной карты, случай **1**.

2. *Обе дуги удаленного ребра принадлежат первой стране и являются в ней последовательными.* В этом случае получится квазипомеченная двукрашенная карта на сфере с $N-1$ ребром и двумя странами, в которой дуга 1 может быть как черной так и белой, а дуга 2 – только белой. Как было отмечено в замечании 4, количества карт такого вида с черной и с белой дугой, помеченной 1, равны. Следовательно, всего карт такого вида $2B_0(N-1, 2)$.

Заметим, что любая из $2B_0(N-1, 2)$ квазипомеченных двукрашенных карт, удовлетворяющих условиям случая **2**, могла быть получена

единственным способом в результате операции удаления ребра. Действительно, рассуждая аналогично доказательству леммы 2 мы получим, что удаленное ребро uv восстанавливается единственным с точностью до изоморфизма образом. При этом, числом 1 будет помечена та из дуг uv или vu, которая является белой. Таким образом, случай **2** возможен для $2B_0(N-1,2)$ исходных карт.

3. *Обе дуги удаленного ребра принадлежат первой стране и не являются в ней последовательными.* Поскольку $g=0$, граф не мог остаться связным. То есть рассматриваемый случай соответствует случаю **4** из описания операции удаления ребра. В этом случае получается упорядоченная пара квазипомеченных двукрашенных карт на сферах, суммарно содержащих $N-1$ ребро и три страны, причем каждая из карт содержит хотя бы одно ребро. При этом, числом 1 в каждой из карт будет помечена дуга, последующая за одной из удаленных дуг: в первой карте за e_1 и во второй – за e_1'. Таким образом, дуга 1 первой карты черная, а остальные помеченные дуги – белые. Из сказанного в замечании 4 следует, что количество упорядоченных пар квазипомеченных карт такого вида равно количеству упорядоченных пар помеченных двукрашенных карт на сферах, суммарно содержащих $N-1$ ребро и три страны.

Рассуждая аналогично доказательству леммы 4 получим, что любая упорядоченная пара квазипомеченных двукрашенных карт, удовлетворяющих условиям случая **3**, могла быть единственным образом получена в результате операции удаления ребра. Следовательно, количество исходных карт, для которых возникает случай **3**, равно количеству упорядоченных пар помеченных двукрашенных карт на сферах, суммарно содержащих $N-1$ ребро и три страны. Легко видеть, что количество пар данного вида, в которых карта с одной страной содержит i ребер, равно $2B_0(i)B_0(N-i-1,2)$. При этом, $B_0(1,2)=0$. Следовательно, случай **3** возможен для $2\sum_{i=1}^{N-3} B_0(i)B_0(N-1-i,2)$ исходных карт.

Так как для каждой из $B_0(N,2)$ исходных карт обязательно имел место один из случаев **1**, **2** или **3**, мы получаем следующую формулу:

$$B_0(N,2)=\frac{N(N-1)}{2}B_0(N-1)+2B_0(N-1,2)$$
$$+2\sum_{i=1}^{N-3} B_0(i)B_0(N-i-1,2).$$

Учитывая, что $B_0(0) = 1$, имеем

$$B_0(N,2) = 2\sum_{i=0}^{N-3} B_0(i)B_0(N-i-1,2) + \frac{N(N-1)}{2}B_0(N-1). \qquad \square$$

Теорема 4. *Числа $B_0(N,2)$ при $N \geqslant 1$ удовлетворяют следующему соотношению:*

$$B_0(N,2) = \varepsilon_0(N-1,2) = (N-1)\cdot 4^{N-2}. \tag{28}$$

Доказательство. Докажем утверждение $B_0(N,2) = \varepsilon_0(N-1,2)$ по индукции. База для $N = 1$ очевидна, для $N = 2$ при помощи формул (27), (3) и (26) получаем, что $B_0(2,2) = \varepsilon_0(1,2) = 1$. Докажем переход.

Пусть равенство $B_0(i,2) = \varepsilon_0(i-1,2)$ верно для всех $i \leqslant N$, покажем, что тогда оно верно и для $N+1$. Заметим, что по формуле (3) при всех $i \geqslant 0$ имеем $\varepsilon_0(i) = B_0(i)$. Кроме того, из формулы (3) следует, что

$$\frac{(N+1)N}{2}B_0(N) = \frac{(N+1)N}{2}\varepsilon_0(N) = N(2N-1)\varepsilon_0(N-1).$$

Тогда, применяя формулы (27), (25) и индукционное предположение получаем:

$$\begin{aligned} B_0(N+1,2) &= 2\sum_{i=0}^{N-2} B_0(i)B_0(N-i,2) + \frac{(N+1)N}{2}B_0(N) \\ &= 2\sum_{i=0}^{N-2} \varepsilon_0(i)\varepsilon_0(N-i-1,2) + N(2N-1)\varepsilon_0(N-1) \\ &= \varepsilon_0(N,2). \end{aligned}$$

$\square$

Замечание 8. Было бы очень интересно найти биективное доказательство тождества $B_0(N,2) = \varepsilon_0(N-1,2)$. К сожалению, такое доказательство нам пока не известно.

§4. Склейка сферы из трех многоугольников

В данном разделе мы докажем рекуррентную и явную формулы для чисел $\varepsilon_0(N,3)$. Напомним, что $\varepsilon_0(N,3)$ – это количество помеченных карт на сфере, содержащих N ребер и 3 страны.

4.1. Рекуррентная формула. В этом разделе нам потребуется следующая вспомогательная величина.

Определение 8. *Обозначим через $\widetilde{\varepsilon}_0(N, M, K)$ количество помеченных карт на сфере, содержащих N дуг (т. е. $N/2$ ребер) и K стран, таких, что страна номер 1 содержит ровно M дуг.*

Число $\widetilde{\varepsilon}_0(N, M, K)$ – это также количество способов склеить сферу из K многоугольников, которые в сумме содержат N ребер, причем первый многоугольник содержит M ребер.

Заметим, что $\widetilde{\varepsilon}_0(N, M, K) > 0$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:

(i) $N, M, K \geqslant 1$;
(ii) число N – четное;
(iii) $N \geqslant M + K - 1$.

Условие (iii) вытекает из того факта, что страна 1 содержит M дуг, а каждая из оставшихся $K - 1$ стран должна содержать как минимум одну дугу.

Лемма 7. *Пусть числа $N > 2$, $K = 2$ и M удовлетворяют условиям* (i)–(iii). *Тогда выполнено следующее рекуррентное соотношение:*

$$\widetilde{\varepsilon}_0(N, M, 2) = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{M-3}{2} \rfloor} \varepsilon_0(i) \widetilde{\varepsilon}_0(N - 2i - 2, M - 2i - 2, 2) + (N - M)\varepsilon_0\left(\frac{N}{2} - 1\right). \tag{29}$$

Доказательство. Рассмотрим всевозможные помеченные карты на сфере, содержащие $N > 2$ дуг ($N/2$ ребер) и 2 страны, такие, что страна номер 1 содержит M дуг. Применим к каждой из них операцию удаления ребра. Рассмотрим следующие три случая.

1. *Дуги удаленного ребра $\widetilde{e}_1$ принадлежат разным странам.* В этом случае мы получим помеченную карту на сфере с $N/2 - 1$ ребром и одной страной. Посчитаем, сколькими способами мы могли получить каждую такую карту.

Пусть (X, G_1) – помеченная карта на сфере с $N/2 - 1$ ребром и одной страной; F_1 – ее единственная страна; D_1 – $(N - 2)$-угольник, соответствующий стране F_1; f_1 – дуга, помеченная числом 1. Аналогично доказательству леммы 1 заметим, что карта, из которой была

получена (X, G_1), однозначно задается удаленным ребром $\widetilde{e}_1$ (то есть, парой вершин многоугольника D_1) и дугой e_2, которая в исходной карте была помечена числом 2.

Занумеруем вершины многоугольника D_1 числами от 1 до $N-2$ по часовой стрелке, стартуя с начальной вершины его помеченного ребра. Тогда ребро $\widetilde{e}_1$ однозначно с точностью до изоморфизма задается парой чисел $a, b \in \{1, \ldots, N-2\}$, где $b \geqslant a$. Далее возможны следующие два подслучая.

1.1. $e_2 = f_1$. В этом случае, ребру $\widetilde{e}_1$ может соответствовать любая пара a, b, такая, что $b - a = M - 1$ (см. рисунок 5a). Таких пар $N - M - 1$.

1.2. e_2 *– одна из дуг ребра* $\widetilde{e}_1$. В этом случае $a = 1$. Пусть $M > 1$. Тогда $b = N - M$ и дуга, помеченная в исходной карте числом 1, должна была предшествовать дуге f_1 (см. рисунок 5b). Этими условиями дуга e_2 задается однозначно. Если же $M = 1$, то $b = a = 1$ и дуга e_2 в исходной карте предшествовала дуге f_1, что также задает ее однозначно (см. рисунок 5c).

Таким образом, каждая из $\varepsilon_0\left(\frac{N}{2} - 1\right)$ помеченных карт на сфере с $N/2 - 1$ ребром и одной страной будет получена $N - M$ раз. Следовательно, случай **1** возникает для $(N - M)\varepsilon_0\left(\frac{N}{2} - 1\right)$ исходных карт.

2. *Обе дуги удаленного ребра принадлежат первой стране и являются в ней последовательными.* В этом случае мы получим помеченную карту на сфере с $N/2 - 1$ ребром и двумя странами, страна номер 1 которой содержит $M - 2$ дуги. По лемме 2 любая такая карта будет получена двумя способами. Таким образом, случай **2** возможен для $2\widetilde{\varepsilon}_0(N-2, M-2, 2)$ исходных карт.

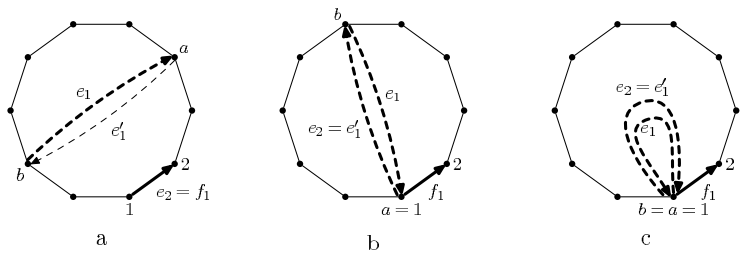

Рис. 5. Операция удаления при фиксированном числе дуг первой страны получаемой карты. Случай **1**.

3. *Обе дуги удаленного ребра принадлежат первой стране и не являются в ней последовательными.* Поскольку $g = 0$, граф не мог остаться связным. То есть рассматриваемый случай соответствует случаю **4** из описания операции удаления ребра. В этом случае получается упорядоченная пара помеченных карт на сферах, суммарно содержащих $N/2 - 1$ ребро и три страны, причем каждая из карт содержит хотя бы одно ребро. При этом, первые страны обеих карт пары будут суммарно содержать $M - 2$ дуги. По лемме 4 любая такая пара будет получена единственным способом. Легко видеть, что количество пар данного вида, в которых карта с одной страной содержит i ребер, равно $2\varepsilon_0(i)\widetilde{\varepsilon}_0(N-2i-2, M-2i-2, 2)$. Таким образом, случай **3** возможен для $2\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{M-3}{2} \rfloor} \varepsilon_0(i)\widetilde{\varepsilon}_0(N-2i-2, M-2i-2, 2)$ исходных карт.

Складывая полученные результаты и учитывая, что $\varepsilon_0(0) = 1$, получаем требуемую формулу. □

Теорема 5. *Числа $\varepsilon_0(N, 3)$ при $N \geqslant 2$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:*

$$\varepsilon_0(N,3) = 2\sum_{i=0}^{N-2}\Big(\varepsilon_0(i)\varepsilon_0(N-i-1,3) + \varepsilon_0(i,2)\varepsilon_0(N-i-1,2)\Big) + \sum_{i=1}^{2N-3}(i+1)(i+2)\widetilde{\varepsilon}_0(2N-2,i,2). \tag{30}$$

Доказательство. Рассмотрим всевозможные помеченные карты на сфере, содержащие $N > 1$ ребер и 3 страны, и применим к каждой из них операцию удаления ребра. Для каждой из карт имеет место ровно один из следующих трех случаев.

1. *Дуги удаленного ребра $\widetilde{e}_1$ принадлежат разным странам.* В этом случае мы получим помеченную карту на сфере с $N-1$ ребром и двумя странами. Пусть ее первая страна содержит i дуг (очевидно, что $1 \leqslant i \leqslant 2N-3$). По лемме 1 любая из $\widetilde{\varepsilon}_0(2N-2, i, 2)$ таких карт будет получена $(i+1)(i+2)$ способами. Таким образом, случай **1** возникает для $\sum_{i=1}^{2N-3}(i+1)(i+2)\widetilde{\varepsilon}_0(2N-2, i, 2)$ исходных карт.

2. *Обе дуги удаленного ребра принадлежат первой стране и являются в ней последовательными.* В этом случае мы получим помеченную карту на сфере с $N-1$ ребром и тремя странами. По лемме 2

любая из $\varepsilon_0(N-1,3)$ таких карт будет получена двумя способами. Таким образом, случай **2** возможен для $2\varepsilon_0(N-1,3)$ исходных карт.

3. *Обе дуги удаленного ребра принадлежат первой стране и не являются в ней последовательными.* Поскольку $g=0$, граф не мог остаться связным. То есть рассматриваемый случай соответствует случаю **4** из описания операции удаления ребра. В этом случае получается упорядоченная пара помеченных карт на сферах, суммарно содержащих $N-1$ ребро и четыре страны. Такие пары карт могут быть двух видов: либо одна из карт пары содержит одну страну, а другая – три, либо обе карты содержат по 2 страны. Рассмотрим эти два подслучая более подробно.

3.1. *Одна из карт пары содержит одну страну, а другая – три.* Пусть карта с одной страной содержит i ребер. По замечанию 3 карта с тремя странами содержит хотя бы 2 ребра, следовательно, $1 \leqslant i \leqslant N-3$. По лемме 4 любая из $2\varepsilon_0(i)\varepsilon_0(N-i-1,3)$ пар карт такого вида будет получена единственным способом. Таким образом, случай 3.1 возможен для $2\sum_{i=1}^{N-3}\varepsilon_0(i)\varepsilon_0(N-i-1,3)$ исходных карт.

3.2. *Обе карты в паре содержат по две страны.* Пусть первая карта пары содержит i ребер. Очевидно, что $1 \leqslant i \leqslant N-2$. По лемме 4 любая из $\varepsilon_0(i,2)\varepsilon_0(N-i-1,2)$ пар карт такого вида будет получена двумя способами. Таким образом, случай 3.2 возможен для $2\sum_{i=1}^{N-2}\varepsilon_0(i,2)\varepsilon_0(N-i-1,2)$ исходных карт.

Складывая полученные результаты и учитывая, что $\varepsilon_0(0)=1$ и $\varepsilon_0(0,2)=\varepsilon_0(1,3)=0$, получаем требуемую формулу. □

4.2. Явная формула. Прежде чем приступить к выводу явной формулы для числа способов склеить сферу из трех многоугольников, докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 8. *Для любого $N \geqslant 1$ выполняется следующее соотношение:*

$$\sum_{i=1}^{2N-1}\widetilde{\varepsilon}_0(2N,i,2)=\varepsilon_0(N,2)=N4^{N-1}. \tag{31}$$

Доказательство. Данное утверждение немедленно следует из определений чисел $\widetilde{\varepsilon}_0(2N,i,2)$, $\varepsilon_0(N,2)$ и формулы (26). □

Лемма 9. *Для любого $N \geqslant 1$ выполняется следующее соотношение:*

$$\sum_{i=1}^{2N-1} i\widetilde{\varepsilon}_0(2N,i,2)=N^2 4^{N-1}. \tag{32}$$

Доказательство. Введем обозначение $T(N) = \sum_{i=1}^{2N-1} i\widetilde{\varepsilon}_0(2N,i,2)$. Докажем утверждение $T(N) = N^2 4^{N-1}$ по индукции.

База для $N = 1$ очевидна. Докажем переход. Пусть $T(k) = k^2 4^{k-1}$ для всех $k < N$. Покажем, что тогда $T(N) = N^2 4^{N-1}$. По формуле (29) имеем:

$$T(N) = \sum_{i=1}^{2N-1} i\widetilde{\varepsilon}_0(2N,i,2) = 2\sum_{i=1}^{2N-1} i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-3}{2} \rfloor} \varepsilon_0(j)\widetilde{\varepsilon}_0(2N-2j-2, i-2j-2, 2) + \sum_{i=1}^{2N-1} i(2N-i)\varepsilon_0(N-1) = T_1(N) + T_2(N),$$

где $T_1(N)$ и $T_2(N)$ – соответственно первое и второе слагаемые получившегося выражения.

Вычислим сначала $T_1(N)$. Заметим, что

$$T_1(N) = 2\sum_{j=0}^{N-2} \varepsilon_0(j) \sum_{i=2j+3}^{2N-1} i\widetilde{\varepsilon}_0(2N-2j-2, i-2j-2, 2).$$

Сделаем замену переменных, положив $k = i - 2j - 2$, и введем обозначение $N_j = N - j - 1$. Учитывая индукционное предположение и формулу (31), получим:

$$\begin{aligned} T_1(N) &= 2\sum_{j=0}^{N-2} \varepsilon_0(j) \sum_{k=1}^{2N_j-1} (k+2j+2)\widetilde{\varepsilon}_0(2N_j,k,2) \\ &= 2\sum_{j=0}^{N-2} \varepsilon_0(j)\Big(\sum_{k=1}^{2N_j-1} k\widetilde{\varepsilon}_0(2N_j,k,2) + (2j+2)\sum_{k=1}^{2N_j-1} \widetilde{\varepsilon}_0(2N_j,k,2)\Big) \\ &= 2\sum_{j=0}^{N-2} \varepsilon_0(j)\left(N_j^2 4^{N_j-1} + (2j+2)N_j 4^{N_j-1}\right) \\ &= 2^{2N-3}\sum_{j=0}^{N-2} \frac{\varepsilon_0(j)}{4^j}(N^2-(j+1)^2). \end{aligned}$$

Применяя формулы (3), (13), а также формулу (14) для $k = 0, 1$, имеем:

$$\begin{aligned}
T_1(N) &= 2^{2N-3} \sum_{j=0}^{N-2} \frac{(2j)!}{4^j j!(j+1)!}(N^2 - (j+1)^2) \\
&= 2^{2N-3}\left(N^2 \sum_{j=0}^{N-2} \frac{(2j)!}{4^j j!(j+1)!} - \sum_{j=0}^{N-2} \frac{(2j)!}{4^j j! j!} - \sum_{j=1}^{N-2} \frac{(2j)!}{4^j j!(j-1)!}\right) \\
&= 2^{2N-3}\left(N^2\left(2 - \frac{2N(2N-2)!}{4^{N-1}(N-1)!N!}\right) - \frac{2(N-1)(2N-2)!}{4^{N-1}(N-1)!(N-1)!} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{2}{3} \cdot \frac{(N-1)(N-2)(2N-2)!}{4^{N-1}(N-1)!(N-1)!}\right) \\
&= N^2 4^{N-1} - \varepsilon_0(N-1)\frac{N(4N^2-1)}{3}.
\end{aligned}$$

Теперь вычислим $T_2(N)$:

$$T_2(N) = \sum_{i=1}^{2N-1} i(2N-i)\varepsilon_0(N-1) = \varepsilon_0(N-1)\frac{N(4N^2-1)}{3}.$$

Складывая полученные выражения для $T_1(N)$ и $T_2(N)$, получаем требуемую формулу. □

Лемма 10. *Для любого $N \geqslant 1$ выполняется следующее соотношение:*

$$\sum_{i=1}^{2N-1} (i+1)(i+2)\widetilde{\varepsilon}_0(2N, i, 2) = 4^{N-2}N(N+1)(5N+7). \qquad (33)$$

Доказательство. Обозначим левую часть формулы (33) через $P(N)$, а правую часть – через $\widetilde{P}(N)$. Докажем по индукции, что $P(N) = \widetilde{P}(N)$.

База для $N = 1$ проверяется непосредственно. Докажем переход. Пусть $P(k) = \widetilde{P}(k)$ для всех $k < N$. Покажем, что тогда $P(N) = \widetilde{P}(N)$.

По формуле (29) имеем:

$$\begin{aligned}P(N) &= \sum_{i=1}^{2N-1}(i+1)(i+2)\widetilde{\varepsilon}_0(2N,i,2)\\ &= \sum_{i=1}^{2N-1}(i+1)(i+2)\cdot 2\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{i-3}{2}\rfloor}\varepsilon_0(j)\widetilde{\varepsilon}_0(2N-2j-2,i-2j-2,2)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{2N-1}(i+1)(i+2)(2N-i)\varepsilon_0(N-1)=P_1(N)+P_2(N),\end{aligned}$$

где $P_1(N)$ и $P_2(N)$ – соответственно первое и второе слагаемые получившегося выражения.

Вычислим сначала $P_1(N)$. Заметим, что

$$P_1(N)=2\sum_{j=0}^{N-2}\varepsilon_0(j)\Bigg(\sum_{i=2j+3}^{2N-1}(i+1)(i+2)\widetilde{\varepsilon}_0(2N-2j-2,i-2j-2,2)\Bigg).$$

Как и в лемме 9, положим: $k=i-2j-2$; $N_j=N-j-1$. Тогда

$$\begin{aligned}P_1(N) &= 2\sum_{j=0}^{N-2}\varepsilon_0(j)\Bigg(\sum_{k=1}^{2N_j-1}(k+1+2j+2)(k+2+2j+2)\widetilde{\varepsilon}_0(2N_j,k,2)\Bigg)\\ &= 2\sum_{j=0}^{N-2}\varepsilon_0(j)\sum_{k=1}^{2N_j-1}(k+1)(k+2)\widetilde{\varepsilon}_0(2N_j,k,2)\\ &\quad+2\cdot 4\sum_{j=0}^{N-2}\varepsilon_0(j)(j+1)\sum_{k=1}^{2N_j-1}k\widetilde{\varepsilon}_0(2N_j,k,2)\\ &\quad+2\cdot 2\sum_{j=0}^{N-2}\varepsilon_0(j)(j+1)(2j+5)\sum_{k=1}^{2N_j-1}\widetilde{\varepsilon}_0(2N_j,k,2).\end{aligned}$$

Применяя индукционное предположение, а также формулы (32), (31), получим:

$$P_1(N)=2\sum_{j=0}^{N-2}\varepsilon_0(j)4^{N_j-2}R_j(N),$$

где

$$\begin{aligned}R_j(N) &= N_j(N_j+1)(5N_j+7)+16(j+1)N_j^2+8(j+1)(2j+5)N_j\\ &= N(N+1)(5N+7)+(N^2-N-24)(j+1)\\ &\quad -(N+27)(j+1)j-5(j+1)j(j-1).\end{aligned}$$

Применив формулы (3), (13), а также формулу (14) для $k=0,1,2$, имеем:

$$\begin{aligned}P_1(N) &= 2\sum_{j=0}^{N-2}\varepsilon_0(j)4^{N-j-3}R_j(N) = 2^{2N-5}\sum_{j=0}^{N-2}\frac{(2j)!}{4^j j!(j+1)!}R_j(N)\\ &= 2^{2N-5}N(N+1)(5N+7)\sum_{j=0}^{N-2}\frac{(2j)!}{4^j j!(j+1)!}\\ &\quad +2^{2N-5}(N^2-N-24)\sum_{j=0}^{N-2}\frac{(2j)!}{4^j j!j!}\\ &\quad -2^{2N-5}(N+27)\sum_{j=1}^{N-2}\frac{(2j)!}{4^j j!(j-1)!}-2^{2N-5}\cdot 5\sum_{j=2}^{N-2}\frac{(2j)!}{4^j j!(j-2)!}\\ &= 2^{2N-5}N(N+1)(5N+7)\left(2-\frac{2N(2N-2)!}{4^{N-1}(N-1)!N!}\right)+\\ &\quad +2^{2N-5}(N^2-N-24)\frac{2(N-1)(2N-2)!}{4^{N-1}(N-1)!(N-1)!}\\ &\quad -2^{2N-5}(N+27)\frac{2(N-1)(N-2)(2N-2)!}{3\cdot 4^{N-1}(N-1)!(N-1)!}\\ &\quad -2^{2N-5}\frac{5\cdot 2(N-1)(N-2)(N-3)(2N-2)!}{5\cdot 4^{N-1}(N-1)!(N-1)!}\\ &= 4^{N-2}N(N+1)(5N+7)-\frac{(2N-2)!}{4(N-1)!N!}R(N),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}R(N) &= N^2(N+1)(5N+7)-(N^2-N-24)(N-1)N\\ &\quad +\frac{1}{3}(N+27)(N-2)(N-1)N+(N-3)(N-2)(N-1)N\\ &= 4N\left(\frac{4}{3}N^3+4N^2+\frac{11}{3}N-3\right).\end{aligned}$$

Учитывая формулу (3), окончательно получаем:

$$P_1(N) = 4^{N-2}N(N+1)(5N+7) \\ - \varepsilon_0(N-1)N\left(\frac{4}{3}N^3 + 4N^2 + \frac{11}{3}N - 3\right).$$

Далее, вычислим $P_2(N)$.

$$P_2(N) = \sum_{i=1}^{2N-1} (i+1)(i+2)(2N-i)\varepsilon_0(N-1) \\ = \varepsilon_0(N-1)\sum_{i=1}^{2N-1}\left(4N + (6N-2)i + (2N-3)i^2 - i^3\right) \\ = \varepsilon_0(N-1)N\left(\frac{4}{3}N^3 + 4N^2 + \frac{11}{3}N - 3\right).$$

Складывая полученные выражения для $P_1(N)$ и $P_2(N)$, получаем требуемую формулу. □

Теорема 6. *Числа $\varepsilon_0(N,3)$ при $N \geqslant 1$ удовлетворяют следующему соотношению:*

$$\varepsilon_0(N,3) = \frac{(8N+5)(N-1)N(N+1)}{210}C_{2N+1}^N. \tag{34}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\widetilde{C}(N) = \frac{(8N+5)(N-1)N(N+1)}{210}C_{2N+1}^N.$$

Докажем утверждение $\varepsilon_0(N,3) = \widetilde{C}(N)$ по индукции.

База для $N = 1$ очевидна. При $N = 2$ при помощи формул (30) и (29) легко получить, что $\varepsilon_0(2,3) = 6 = \widetilde{C}(2)$.

Докажем переход. Пусть для всех $k \leqslant N$ выполнено утверждение $\varepsilon_0(k,3) = \widetilde{C}(k)$. Покажем, что тогда оно выполнено и для $N+1$. По формуле (30) имеем:

$$\varepsilon_0(N+1,3) = 2\sum_{i=0}^{N-1}\varepsilon_0(i)\varepsilon_0(N-i,3) + 2\sum_{i=0}^{N-1}\varepsilon_0(i,2)\varepsilon_0(N-i,2) \\ + \sum_{i=1}^{2N-1}(i+1)(i+2)\widetilde{\varepsilon}_0(2N,i,2) = S_1(N) + S_2(N) + S_3(N),$$

где $S_1(N)$, $S_2(N)$, $S_3(N)$ – соответственно первое, второе и третье слагаемые полученного выражения.

Используя формулу (33), заключаем:

$$S_3(N) = \sum_{i=1}^{2N-1} (i+1)(i+2)\widetilde{\varepsilon}_0(2N,i,2) = 4^{N-2}N(N+1)(5N+7). \quad (35)$$

Далее, применяя формулу (26), получаем:

$$\begin{aligned} S_2(N) &= 2\sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_0(i,2)\varepsilon_0(N-i,2) = 2\sum_{i=1}^{N-1} i4^{i-1}\cdot(N-i)4^{N-i-1} \\ &= 2\cdot 4^{N-2}\left(\frac{N^2(N-1)}{2} - \frac{(N-1)N(2N-1)}{6}\right) \qquad (36) \\ &= \frac{4^{N-2}}{3}(N-1)N(N+1). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим $S_1(N)$. Так как $\varepsilon_0(N-i,3) = 0$ при $i = N$, имеем:

$$S_1(N) = 2\sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_0(i)\varepsilon_0(N-i,3) = 2\sum_{i=0}^{N} \varepsilon_0(i)\varepsilon_0(N-i,3).$$

Применяя индукционное предположение для $\varepsilon_0(N-i,3)$ и формулу (3) получим:

$$\begin{aligned} S_1(N) &= \sum_{i=0}^{N} \frac{2(2i)!(8(N-i)+5)(N-i-1)(N-i)(N-i+1)}{i!(i+1)!\cdot 210} C_{2(N-i)+1}^{N-i} \\ &= \frac{1}{105}\sum_{i=0}^{N} R_i(N)\frac{C_{2i+1}^{i}\cdot C_{2N-2i+1}^{N-i}}{2i+1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_i(N) &= (8(N-i)+5)(N-i-1)(N-i)(N-i+1) \\ &= N(N+1)(N+2)(8N+13) - (i+1)N(N+1)(32N+31) \\ &\quad + i(i+1)N(48N+15) - (i-1)i(i+1)(32N-11) \\ &\quad + 8(i-2)(i-1)i(i+1). \end{aligned}$$

Далее, применяя формулу (15), а затем формулы (16-20), мы можем записать:

$$\begin{aligned}
105S_1(N) &= N(N+1)(N+2)(8N+13)D_0(N) \\
&\quad - N(N+1)(32N+31)D_1(N) + N(48N+15)D_2(N) \\
&\quad - (32N-11)D_3(N) + 8D_4(N) \\
&= N(N+1)(N+2)(8N+13)C_{2N+2}^{N} \\
&\quad - N(N+1)(32N+31)\left(2\cdot 4^N - \frac{1}{2}C_{2N+2}^{N+1}\right) \\
&\quad + N(48N+15)(N+1)\left(4^N - \frac{1}{2}C_{2N+2}^{N+1}\right) \\
&\quad - (32N-11)N(N+1)\left(3\cdot 4^{N-1} - \frac{1}{2}C_{2N+2}^{N+1}\right) \\
&\quad + 8(N-1)N(N+1)\left(10\cdot 4^{N-2} - \frac{1}{2}C_{2N+2}^{N+1}\right).
\end{aligned}$$

Заменим в первом слагаемом C_{2N+2}^{N} на следующее выражение:

$$C_{2N+2}^{N} = \frac{1}{2}C_{2N+3}^{N+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{C_{2N+2}^{N+1}}{N+2}.$$

Заметим, что при такой замене все слагаемые, содержащие множитель C_{2N+2}^{N+1}, сократятся. Преобразовав остальные слагаемые, получим следующую формулу:

$$\begin{aligned}
S_1(N) = \frac{1}{210}N(N+1)(N+2)(8N+13)C_{2N+3}^{N+1} \\
-\frac{4^{N-1}}{3}N(N+1)(4N+5).
\end{aligned} \tag{37}$$

Складывая полученные выражения для $S_1(N)$, $S_2(N)$ и $S_3(N)$ (формулы (37), (36) и (35)), имеем:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0(N+1,3) &= S_1(N) + S_2(N) + S_3(N) \\
&= \frac{1}{210}N(N+1)(N+2)(8N+13)C_{2N+3}^{N+1} = \widetilde{C}(N+1).
\end{aligned}$$

□

§5. Склейка тора из двух многоугольников

В данном разделе мы докажем рекуррентную и явную формулы для чисел $\varepsilon_1(N,2)$. Напомним, что $\varepsilon_1(N,2)$ – это количество помеченных карт на торе (поверхности рода 1), содержащих N ребер и 2 страны.

Теорема 7. *Числа $\varepsilon_1(N,2)$ при $N \geqslant 3$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:*

$$\varepsilon_1(N,2) = 2\sum_{i=0}^{N-3}\Big(\varepsilon_0(i)\varepsilon_1(N-i-1,2) + \varepsilon_0(i,2)\varepsilon_1(N-i-1)\Big) \\ +N(2N-1)\varepsilon_1(N-1) + \varepsilon_0(N-1,3). \tag{38}$$

Доказательство. Рассмотрим всевозможные помеченные карты на торе, содержащие $N > 2$ ребер и две страны, и применим к каждой из них операцию удаления ребра. Для каждой из карт имеет место ровно один из следующих четырех случаев.

1. *Дуги удаленного ребра $\widetilde{e}_1$ принадлежат разным странам.* В этом случае мы получим помеченную карту на торе с $N-1$ ребром и одной страной. По лемме 1 любая из $\varepsilon_1(N-1)$ таких карт будет получена $N(2N-1)$ способами. Таким образом, случай **1** возникает для

$$N(2N-1)\varepsilon_1(N-1)$$

исходных карт.

2. *Обе дуги удаленного ребра принадлежат первой стране и являются в ней последовательными.* В этом случае мы получим помеченную карту на торе с $N-1$ ребром и двумя странами. По лемме 2 любая из $\varepsilon_1(N-1,2)$ таких карт будет получена двумя способами. Таким образом, случай **2** возможен для $2\varepsilon_1(N-1,2)$ исходных карт.

3. *Обе дуги удаленного ребра принадлежат первой стране и не являются в ней последовательными, а граф, получающийся после удаления ребра, связен.* В этом случае мы получим помеченную карту на сфере с $N-1$ ребром и тремя странами. По лемме 3 любая из $\varepsilon_0(N-1,3)$ таких карт будет получена единственным способом. Таким образом, случай **3** возможен для $\varepsilon_0(N-1,3)$ исходных карт.

4. *Обе дуги удаленного ребра принадлежат первой стране и не являются в ней последовательными, а граф, получающийся после удаления ребра, несвязен.* В этом случае мы получим упорядоченную пару

карт, суммарно содержащих $N-1$ ребро и три страны. По лемме 4 любая из таких пар карт будет получена единственным способом. Суммарный род входящих в одну пару карт равен 1, то есть одна из них изображена на торе, а другая – на сфере. Кроме того, одна из этих карт содержит одну страну, а другая – две. Таким образом, возможны следующие два подслучая: входящая в пару карта рода 0 может содержать одну или две страны. Подсчитаем количество пар для каждого из этих случаев.

4.1. *Карта рода* 0 *содержит одну страну.* Пусть эта карта содержит i ребер. По замечанию 3 другая карта содержит хотя бы 3 ребра, следовательно, $1 \leqslant i \leqslant N-4$. Очевидно, что таких упорядоченных пар $2\varepsilon_0(i)\varepsilon_1(N-i-1,2)$. Таким образом, случай **4.1** возможен для $2\sum_{i=1}^{N-4}\varepsilon_0(i)\varepsilon_1(N-i-1,2)$ исходных карт.

4.2. *Карта рода* 0 *содержит две страны.* Пусть эта карта содержит i ребер. По замечанию 3 другая карта содержит хотя бы 2 ребра, следовательно, $1 \leqslant i \leqslant N-3$. Очевидно, что таких пар $2\varepsilon_0(i,2)\varepsilon_1(N-i-1)$. Таким образом, случай **4.2** возможен для

$$2\sum_{i=1}^{N-3}\varepsilon_0(i,2)\varepsilon_1(N-i-1)$$

исходных карт.

Складывая полученные результаты и учитывая, что $\varepsilon_0(0)=1$ и $\varepsilon_0(0,2)=\varepsilon_1(2,2)=0$, получаем требуемую формулу. □

Теорема 8. *Числа* $\varepsilon_1(N,2)$ *при* $N \geqslant 1$ *удовлетворяют следующему соотношению:*

$$\varepsilon_1(N,2)=4^{N-4}\frac{N(N-1)(N-2)(13N+3)}{3}. \tag{39}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$F(N)=4^{N-4}\frac{N(N-1)(N-2)(13N+3)}{3}.$$

Докажем утверждение $\varepsilon_1(N,2)=F(N)$ по индукции.

База для $N=1,2$ непосредственно следует из замечания 3, а именно, $\varepsilon_1(1,2)=F(1)=\varepsilon_1(2,2)=F(2)=0$. Докажем переход. Пусть для всех $k<N$ верно утверждение $\varepsilon_1(k,2)=F(k)$. Покажем, что тогда

оно верно и для N. По формуле (38) имеем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(N,2) &= 2\sum_{i=0}^{N-3}\varepsilon_0(i)\varepsilon_1(N-i-1,2) + 2\sum_{i=0}^{N-3}\varepsilon_0(i,2)\varepsilon_1(N-i-1)\\ &\quad + \Big(N(2N-1)\varepsilon_1(N-1) + \varepsilon_0(N-1,3)\Big)\\ &= S_1(N) + S_2(N) + S_3(N),\end{aligned}$$

где $S_1(N)$, $S_2(N)$, $S_3(N)$ – соответственно первое, второе и третье слагаемые полученного выражения.

Вычислим сначала $S_3(N)$. Применяя формулы (4) и (34) получим:

$$\begin{aligned}S_3(N) &= N(2N-1)\varepsilon_1(N-1) + \varepsilon_0(N-1,3)\\ &= \frac{N(2N-1)(2N-2)!}{12(N-1)!(N-3)!} + \frac{(8(N-1)+5)(N-2)(N-1)N}{210}C_{2N-1}^{N-1}\\ &= \frac{(51N-6)(2N-1)!}{420(N-1)!(N-3)!}. \qquad (40)\end{aligned}$$

Преобразуем теперь сумму $S_2(N)$, принимая во внимание $\varepsilon_0(0,2)=0$. Сделаем замену, положив: $j = N-1-i$. Учитывая формулы (26), (4) и формулу (14) для $k = 2,3$, получаем:

$$\begin{aligned}S_2(N) &= 2\sum_{i=1}^{N-3}\varepsilon_0(i,2)\varepsilon_1(N-i-1) = 2\sum_{j=2}^{N-2}\varepsilon_0(N-1-j,2)\varepsilon_1(j)\\ &= 2\sum_{j=2}^{N-2}(N-1-j)4^{N-1-j-1}\frac{(2j)!}{12j!(j-2)!}\\ &= \frac{2^{2N-5}}{3}\left((N-3)\sum_{j=2}^{N-2}\frac{(2j)!}{4^j j!(j-2)!} - \sum_{j=3}^{N-2}\frac{(2j)!}{4^j j!(j-3)!}\right)\\ &= \frac{2^{2N-5}}{3}\left((N-3)\frac{2(N-3)(N-2)(N-1)(2N-2)!}{5\cdot 4^{N-1}(N-1)!(N-1)!}\right.\\ &\qquad\left. - \frac{2(N-4)(N-3)(N-2)(N-1)(2N-2)!}{7\cdot 4^{N-1}(N-1)!(N-1)!}\right)\\ &= \frac{(N-3)(2N-1)!}{420(N-1)!(N-3)!}. \qquad (41)\end{aligned}$$

Теперь преобразуем $S_1(N)$. По индукционному предположению:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(N-1-i,2)&\\ &= (N-i-1)(N-i-2)(N-i-3)(13N-13i-10)\frac{4^{N-i-5}}{3}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = s_i(N)\frac{2^{2N-10}}{3\cdot 4^i},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}s_i(N) &= (N-i-1)(N-i-2)(N-i-3)(13N-13i-10)\\ &= N(N-1)(N-2)(13N+3)-(N-1)(N-2)(52N-30)(i+1)\\ &\quad +3(N-2)(26N-36)i(i+1)-(52N-114)(i-1)i(i+1)\\ &\quad +13(i-2)(i-1)i(i+1).\end{aligned}$$

Учитывая введенное выше обозначение, а также формулу (3) и тот факт, что $\varepsilon_1(N-1-i,2)=0$ при $i=N-3$, получим:

$$S_1(N) = 2\sum_{i=0}^{N-4}\varepsilon_0(i)\varepsilon_1(N-i-1,2) = \frac{2^{2N-9}}{3}\sum_{i=0}^{N-4}\frac{(2i)!}{4^i i!(i+1)!}s_i(N).$$

Подставим в полученное выражение формулу для $s_i(N)$ и применим формулы (13) и (14) для $k=0,\dots,3$:

$$\begin{aligned}\frac{3S_1(N)}{2^{2N-9}} &= N(N-1)(N-2)(13N+3)\sum_{i=0}^{N-4}\frac{(2i)!}{4^i i!(i+1)!}\\ &\quad -(N-1)(N-2)(52N-30)\sum_{i=0}^{N-4}\frac{(2i)!}{4^i i!i!}\\ &\quad +3(N-2)(26N-36)\sum_{i=1}^{N-4}\frac{(2i)!}{4^i i!(i-1)!}\\ &\quad -(52N-114)\sum_{i=2}^{N-4}\frac{(2i)!}{4^i i!(i-2)!}+13\sum_{i=3}^{N-4}\frac{(2i)!}{4^i i!(i-3)!}\\ &= N(N-1)(N-2)(13N+3)\left(2-\frac{2(N-2)(2N-6)!}{4^{N-3}(N-3)!(N-2)!}\right)\\ &\quad -(N-1)(N-2)(52N-30)\frac{2(N-3)(2N-6)!}{4^{N-3}(N-3)!(N-3)!}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+3(N-2)(26N-36)\frac{2(N-4)(N-3)(2N-6)!}{3\cdot 4^{N-3}(N-3)!(N-3)!}\\
&-(52N-114)\frac{2(N-5)(N-4)(N-3)(2N-6)!}{5\cdot 4^{N-3}(N-3)!(N-3)!}\\
&+13\frac{2(N-6)(N-5)(N-4)(N-3)(2N-6)!}{7\cdot 4^{N-3}(N-3)!(N-3)!}\\
&=2N(N-1)(N-2)(13N+3)-\frac{2(N-2)(N-1)(2N-6)!}{35\cdot 4^{N-3}(N-3)!(N-1)!}R(N),
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
R(N) = {}& 35N(N-1)(N-2)(13N+3)\\
&+35(N-1)(N-2)(N-3)(52N-30)\\
&-35(N-2)(N-3)(N-4)(26N-36)\\
&+7(N-3)(N-4)(N-5)(52N-114)\\
&-5\cdot 13(N-3)(N-4)(N-5)(N-6)\\
&=4(52N-9)(2N-5)(2N-3)(2N-1).
\end{aligned}
$$

Из этого следует, что

$$
S_1(N)=\frac{4^{N-4}}{3}N(N-1)(N-2)(13N+3)-\frac{(52N-9)(2N-1)!}{420(N-3)!(N-1)!}. \quad (42)
$$

Складывая полученные выражения для $S_1(N)$, $S_2(N)$ и $S_3(N)$ (формулы (42), (41) и (40)), имеем:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0(N,3) &= S_1(N)+S_2(N)+S_3(N)\\
&=\frac{4^{N-4}}{3}N(N-1)(N-2)(13N+3)=F(N).
\end{aligned}
$$

□

Литература

1. Н. М. Адрианов, *Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенных карт.* — Функц. анализ прилож. **31**, вып. 3, (1997), 1–9.
2. J. E. Andersen, R. C. Penner, C. M. Reidys, R R. Wang., *Linear chord diagrams on two intervals.* — (2010), `arXiv:1010.5857`.
3. R. Cori, A. Machì, *Maps, hypermaps and their automorphisms: a survey.* I, II, III. — Exposition. Math. **10**, No. 5, 1992, 403–427, 429–447, 449–467.
4. I. P. Goulden, A. Nica, *A direct bijection for the Harer–Zagier formula.* — J. Combin. Theory Ser. A **111**, No. 2, (2005), 224–238.

5. I. P. Goulden, W. Slofstra, *Annular embeddings of permutations for arbitrary genus.* — J. Combin. Theory Ser. A **117** (2010), 272–288.
6. Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики.* Москва, "Мир", 1998. (Перевод с английского. R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics. A foundation for computer science,* 1988.)
7. В. А. Гурвич, Г. Б. Шабат, *Решение уравнения Харера-Цагира.* — Успехи мат. наук **48**, вып. 1 (1993), 159–160.
8. J. Harer, D. Zagier, *The Euler characteristic of the moduli space of curves.* — Inv. Math. **85**, No. 3 (1986), 457–485.
9. D. M. Jackson, *Some combinatorial problems associated with products of conjugacy classes of the symmetric group.* — J. Combin. Theory Ser. A, **49** (1988), 363–369.
10. G. Schaeffer, E. Vassilieva, *A bijective proof of Jackson's formula for the number of factorizations of a cycle.* — J. Combin. Theory Ser. A, **115**, No. 6 (2008), 903–924.

Pastor A. V., Rodionova O. P. Some formulas for the number of gluings.

In this paper the number of ways to glue a surface of genus g has been investigated. We've proven formulas for the number of gluings sphere from three polygons and from two bicolored polygons. Moreover, we've given a new proofs on the formulas for the number of gluings sphere and torus from two polygons.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: avpastor@yandex.ru

Поступило 20 ноября 2012 г.

ENAC (l'Ecole Nationale de l'Aviation civile),
7 avenue Edouard Belin,
31400 Toulouse, France
E-mail: olga.13.13@gmail.com