Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 406, 2012 г.

Г. В. Ненашев

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕКРИТИЧЕСКИХ ВЕРШИН В ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ

§1. Введение

В статье мы рассматриваем орграф D. Предполагаем, что в орграфе D нет петель и нет кратных ребер, то есть между любыми двумя вершинами x и y не более двух ребер (по одному в каждую сторону).

Для подграфа T орграфа D под обозначением $V(T)$ мы понимаем множество вершин подграфа T, а под $\overline{V(T)}$ – множество вершин графа D, не вошедших в подграф T. Под обозначением $T-x$ мы понимаем подграф графа D, полученный из подграфа T удалением вершины x и всех инцидентных ей ребер.

Определение 1. *Орграф называется сильно связным, если от любой его вершины до любой другой существует путь.*

Определение 2. *Вершина сильно связного орграфа называется некритической, если при удалении этой вершины граф остается сильно связным.*

Определение 3. *Степенью вершины x (обозначение: $\deg(x)$) в орграфе мы называем количество вершин, с которыми x смежна. (Даже если вершины x и y соединяет более одного ребра, мы считаем вершину y один раз.)*

В 2006 году в работе [3] С. В. Савченко доказал, что в сильно связном орграфе D на n вершинах со степенью каждой вершины хотя бы $\frac{3n}{4}$ существуют две некритические вершины. Более сильных результатов даже в вопросе об одной некритической вершине нет. Мы докажем результат, из которого сразу же следует, что для существования некритической вершины достаточно, чтобы степень каждой вершины была хотя бы $\frac{n+1}{2}$, а для существования двух некритических вершин достаточно, чтобы степень была хотя бы $\frac{n+2}{2}$.

Нам, так же как и автору [3], понадобится лемма, сформулированная в работе [1].

Ключевые слова: орграф, сильная связность, некритическая вершина.

Лемма 1. *Пусть D – сильно связный орграф и S – его собственный сильно связный подграф. Тогда S является максимальным собственным сильно связным подграфом D, если и только если выполнены следующие три условия:*

1) *существует такая вершина $\omega_{\text{in}} \in \overline{V(S)}$, что любое ребро, выходящее из $V(S)$ в $\overline{V(S)}$, входит в ω_{in};*

2) *существует такая вершина $\omega_{\text{out}} \in \overline{V(S)}$, что любое ребро, входящее в $V(S)$ из $\overline{V(S)}$, выходит из ω_{out};*

3) *в графе D существует единственный простой путь от ω_{in} до ω_{out} и он проходит по всем вершинам из $\overline{V(S)}$ и только по ним* (*см. рисунок* 1).

§2. Поиск некритических вершин

Теорема 1. *Пусть D – сильно связный орграф с $n \geqslant 4$ вершинами такой, что для любых двух смежных вершин x и y выполнено неравенство $\deg(x) + \deg(y) \geqslant n + 1$. Тогда D имеет некритическую вершину.*

Доказательство. У нас будет две основных ситуации A и B: в ситуации A степени всех вершин хотя бы 3, а в ситуации B есть вершина степени меньше 3.

A. *Степень каждой вершины хотя бы* 3.

Рассмотрим любой максимальный собственный сильно связный подграф S графа D.

1° *Если $\overline{V(S)}$ состоит из одной вершины*, тогда она некритическая и теорема доказана.

Значит во всех оставшихся случаях $\overline{V(S)}$ состоит хотя бы из двух вершин, тогда вершины ω_{in} и ω_{out} различны.

2° *Пусть $\overline{V(S)}$ состоит хотя бы из четырех вершин.*

Значит в пути от ω_{in} до ω_{out} (он проходит по вершинам $\overline{V(S)}$), можно выбрать две последовательные вершины a_1 и a_2, отличные от ω_{in} и ω_{out} (см. рисунок 1).

Тогда, так как между a_i и S нет ребер, то степень a_i не больше $|\overline{V(S)}| - 1$.

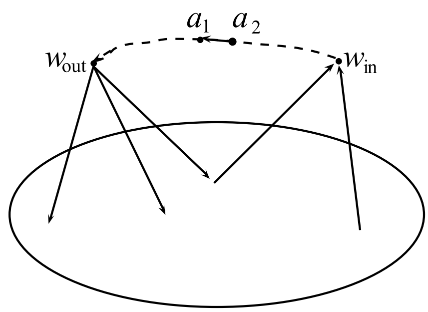

Рис. 1

Возьмем две смежные вершины $b_1, b_2 \in V(S)$. Эти вершины существуют, так как иначе в S ровно одна вершина и ее степень максимум 2. Степень b_i максимум $|V(S)| - 1 + 2 = |V(S)| + 1$ (количество вершин в S минус 1 плюс ω_{in} и ω_{out}).

Мы выбрали две пары смежных вершин и получаем неравенство:

$$\begin{aligned} 2(n+1) &\leqslant \deg(a_1) + \deg(a_2) + \deg(b_1) + \deg(b_2) \\ &\leqslant 2(|\overline{V(S)}| - 1) + 2(|V(S)| + 1) = 2|V(D)| = 2n, \end{aligned}$$

что невозможно.

3° *Пусть $\overline{V(S)}$ состоит из трех вершин.*

В этом случае есть третья вершина $a \in \overline{V(S)}$, смежная только с ω_{in} и ω_{out}, то есть $\deg(a) = 2$, противоречие.

4° *Пусть $\overline{V(S)}$ состоит из двух вершин*, то есть помимо S в графе D есть только ω_{in} и ω_{out}.

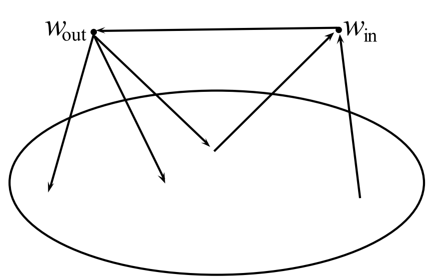

Рис. 2

Построим *входящее дерево* T_{in} вершины ω_{in} в подграфе $D - \omega_{\text{out}}$. Корнем этого дерева будет сама вершина ω_{in}, в первый уровень войдут вершины подграфа, из которых выходят рёбра в ω_{in}, и так далее: в k-й уровень войдут вершины подграфа, не вошедшие в предыдущие уровни, из которых выходят рёбра в вершины $(k-1)$-го уровня. Из сильной связности графа D следует, что из любой вершины S есть путь к ω_{in}, а следовательно, в эти уровни войдут все вершины S. Из каждой вершины, кроме ω_{in}, мы проведём одно ребро к вершине предыдущего уровня (см. рисунок 3).

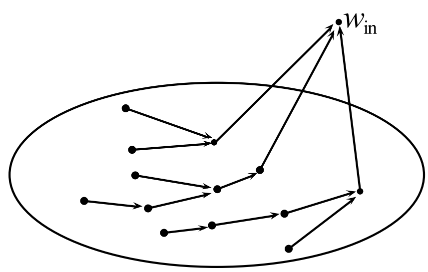

Рис. 3. Построенное входящее дерево.

Теперь рассмотрим T_{in} как неориентированное дерево. Будем называть *ветвью* компоненту связности $T_{\text{in}} - \omega_{\text{in}}$. Заметим, что в каждой ветви дерева будет висячая вершина, а количество ветвей равно $\deg(\omega_{\text{in}})-1$, так как в T_{in} вошли все ребра, инцидентные ω_{in}, кроме ребер между ω_{in} и ω_{out}. Обозначим множество висячих вершин T_{in} через A_{in}. Мы доказали, что $|A_{\text{in}}| \geqslant \deg(\omega_{\text{in}}) - 1$. Удалив любую вершину из A_{in}, мы сможем добраться по T_{in} из всех оставшихся вершин S в ω_{in}.

Таким же образом построим *исходящее дерево* вершины ω_{out} в подграфе $D-\omega_{\text{in}}$ и множество вершин A_{out}. При удалении любой вершины из A_{out} можно добраться из ω_{out} во все оставшиеся вершины S. По тем же соображениям в A_{out} хотя бы $\deg(\omega_{\text{out}}) - 1$ вершин, отсюда получаем:

$$|A_{\text{in}}| + |A_{\text{out}}| \geqslant \deg(\omega_{\text{in}}) - 1 + \deg(\omega_{\text{out}}) - 1 \geqslant n + 1 - 2 = n - 1.$$

Так как $|A_{\text{in}} \cup A_{\text{out}}| \leq |S| = n - 2$, существует вершина $x \in A_{\text{in}} \cap A_{\text{out}}$.

В графе $D - x$ мы можем из любой вершины из $S \setminus x$ прийти в ω_{in}, и в любую из них прийти из ω_{out}. Так как есть ребро из ω_{in} в ω_{out}, то граф $D - x$ – сильно связный, а вершина x – некритическая.

B. *Есть вершина, степень которой меньше* 3.

Пусть q – вершина степени меньше 3. Очевидно, существует вершина p_1, смежная с q. Мы знаем, что

$$\deg(q) + n - 1 \geqslant \deg(q) + \deg(p_1) \geqslant n + 1,$$

поэтому получаем, что $\deg(q) = 2$ и $\deg(p_1) = n - 1$. Следовательно, существует еще одна вершина p_2, смежная с q. Аналогично, $\deg(p_2) = n - 1$.

Так как $\deg(p_1) = \deg(p_2) = n - 1$, то есть ребро между p_1 и p_2 (возможно, есть два ребра разных направлений). Считаем, что в орграфе D есть ребро p_1p_2 (иначе аналогично). Мы предполагаем, что q не является некритической вершиной (иначе теорема доказана). Значит, граф $D - q$ не является сильно связным, а следовательно, между какими-то двумя вершинами любой путь в графе D обязательно проходит по q. Рассмотрим кратчайший путь P между этими двумя вершинами. Но тогда путь P должен проходить по p_1 и p_2, а значит P проходит по ребрам p_2q и qp_1 (иначе можно пройти напрямую по p_1p_2, минуя q).

Таким образом, мы построили ориентированный цикл qp_1p_2. Этот цикл проходит не по всем вершинам, значит есть максимальный собственный сильно связный подграф S, содержащий q, p_1 и p_2. Если $|\overline{V(S)}| > 2$, то тогда есть вершина $a \in \overline{S}$, отличная от $\omega_{\mathrm{in}}, \omega_{\mathrm{out}}$, а следовательно, нет ребра между p_1 и a, то есть $\deg(p_1) < n - 1$, противоречие. Остались случаи, когда $|\overline{V(S)}| = 1$ или 2, эти случаи разбираются аналогично случаям 1° и 4° ситуации A (В ситуации A мы пользовались отсутствием вершин степени 2 только в случаях 2° и 3°). □

Следствие 1. *Любой сильно связный орграф D с $n \geqslant 4$ вершинами, каждая из которых имеет степень хотя бы $\frac{n+1}{2}$, имеет некритическую вершину.*

Замечание 1. 1) Оценки $n + 1$ в Теореме 1 и $\frac{n+1}{2}$ в Следствии 1 не могут быть улучшены. Построим простой пример для четного n. Рассмотрим такой граф D (см. рисунок 4):

— $V(D) = \{a_1, \ldots, a_{n/2}, b_1, \ldots, b_{n/2}\}$.

— $E(D)$ состоит из ребер a_ib_i и рёбер b_ia_j, где $i \neq j$.

Очевидно, граф D сильно связен, степени всех вершин этого графа равны $\frac{n}{2}$, а некритических вершин нет.

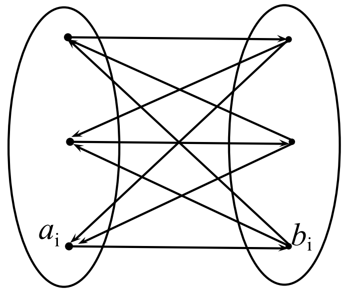

Рис. 4. Граф без некритических вершин.

2) Оценка $n + 1$ в Теореме 1 не может быть улучшена и при нечетных n. Построим более сложный пример, который подходит для всех $n \geq 6$. Рассмотрим такой орграф D (см. рисунок 5):

— $V(D) = \{a_1, \ldots, a_{n-4}, x_1, \ldots, x_4\}$.

— $E(D)$ состоит из ребер $a_i a_{i+1}$, $a_j a_i$ $(j > i+1)$, $a_i x_3$, $x_2 a_i$, $a_{n-4} x_1$, $x_1 x_2$, $x_2 x_3$, $x_3 x_4$, $x_4 a_1$ (здесь $i, j \in \{1, \ldots, n-4\}$).

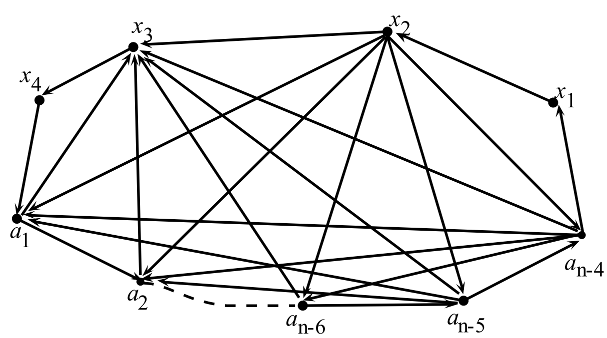

Рис. 5. Граф без некритических вершин.

Очевидно, орграф D – сильно связный. Теперь проверим условие о сумме степеней пар смежных вершин. У вершин x_1, x_4 – степень 2, у вершин a_1, a_{n-4}, x_2, x_3 – степень $n-2$, а у остальных – степень $n-3$. Каждая из двух вершин степени 2 соединена только с вершинами степени $n-2$, что дает нам сумму n. А у других пар вершин минимальная сумма степеней $2(n-3) = 2n-6 \geqslant n$.

Осталось показать отсутствие некритических вершин. Если удалить вершину a_i $(i > 1)$, то тогда ребра из вершин $x_3, x_4, a_1, \ldots, a_{i-1}$ будут попадать только в эти же вершины, значит до x_1 нет пути из вершин $x_3, x_4, a_1, \ldots, a_{i-1}$.

Если удалить x_1, то не будет входящих ребер в x_2. Если удалить x_2, то не будет исходящих ребер из x_1. Если удалить x_3, то не будет входящих ребер в x_4. Если удалить x_4, то не будет исходящих ребер из x_3. Если удалить a_1, то не будет исходящих ребер из x_4. Значит, некритических вершин в графе D нет.

Следствие 2. *Пусть D — сильно связный орграф с $n \geqslant 4$ вершинами такой, что для любых двух смежных вершин x и y выполнено неравенство $\deg(x) + \deg(y) \geqslant n + 2$. Тогда D имеет хотя бы две некритические вершины.*

Доказательство. Во-первых, степень каждой вершины хотя бы 3 (иначе, если есть вершина степени 2 или 1, то у смежной с ней вершины должна быть степень хотя бы n, но согласно нашему определению, степень вершины не может быть больше $n - 1$). Значит, у нас ситуация A.

1° *Для любого максимального собственного сильно связного подграфа S выполняется $|\overline{V(S)}| = 1$.*

По уже доказанной теореме существует некритическая вершина x_1. Рассмотрим максимальный собственный сильно связный подграф, содержащий x_1. Пусть он не содержит x_2. Тогда мы получили две различные некритические вершины x_1 и x_2.

2° *Существует максимальный сильно связный подграф S, такой что $|\overline{V(S)}| \geqslant 2$.*

Тогда по доказанному в теореме 1 возможен только случай, когда $|\overline{V(S)}| = 2$. Рассмотрим множества A_{in} и A_{out}, построенные в доказательстве теоремы 1 (случай 4° ситуации A). Так как теперь верно

$$|A_{\text{in}}| + |A_{\text{out}}| \geqslant \deg(\omega_{\text{in}}) - 1 + \deg(\omega_{\text{out}}) - 1 \geqslant n + 2 - 2 = n,$$

а в $A_{\text{in}} \cup A_{\text{out}}$ по прежнему максимум $n - 2$ вершины, значит A_{in} и A_{out} пересекаются хотя бы по двум вершинам, и эти вершины будут некритическими. □

Следствие 3. *Любой сильно связный орграф D с $n \geqslant 4$ вершинами, каждая из которых имеет степень хотя бы $\frac{n+2}{2}$, имеет хотя бы две некритические вершины*

Замечание 2. 1) Оценки $n+2$ в Следствии 2 и $\frac{n+2}{2}$ в Следствии 3 не могут быть улучшены. Построим пример для нечетного n. Рассмотрим такой граф D (см. рисунок 6):

– $V(D) = \{a_1, \dots, a_{(n-1)/2}, b_1, \dots, b_{(n-1)/2}, x\}$.

– $E(D)$ состоит из ребер вида a_ib_i и b_ia_j, где $i \neq j$, а также ребер вида xa_i и b_ix.

Очевидно, степени всех вершин этого графа не менее $\frac{n+1}{2}$, а x – его единственная некритическая вершина.

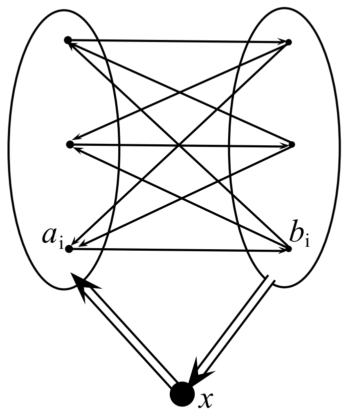

Рис. 6. Граф с одной некритической вершиной.

2) Оценка $n+2$ в Следствии 2 не может быть улучшена и при четных n. Построим пример, который подходит для всех $n \geqslant 5$. Рассмотрим такой орграф D (см. рисунок 7):

– $V(D) = \{a_1, \dots, a_{n-1}, x\}$.

– $E(D)$ состоит из ребер a_ia_{i+1}, a_ja_i $(j > i+1)$, xa_1, $a_{n-1}x$ (здесь $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$).

Очевидно, орграф D – сильно связный. Теперь проверим условие о сумме степеней пар смежных вершин. В графе с вершиной x степени 2 соединены вершины степени $n-1$, что дает в сумме $n+1$. У остальных вершин степень $n-2$, значит в остальных парах вершин минимальная сумма степеней $2(n-2) = 2n-4 \geqslant n+1$.

Надо проверить, что x – единственная некритическая вершина. Если удалить вершину a_i $(i > 1)$, то тогда ребра из вершин $a_1, \dots, a_{i-1}$ будут попадать только в эти же вершины, значит до x нет пути из

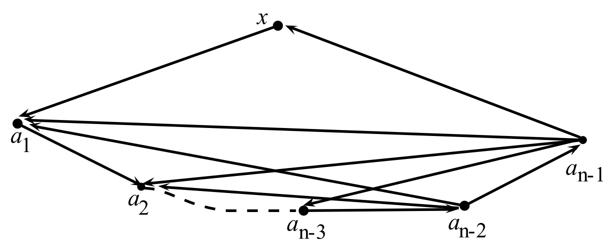

Рис. 7. Граф с одной некритической вершиной.

вершин $a_1, \ldots, a_{i-1}$. Если удалить вершину a_1, то тогда из x не будет исходящих ребер. Значит, некритических вершин кроме x в орграфе D нет.

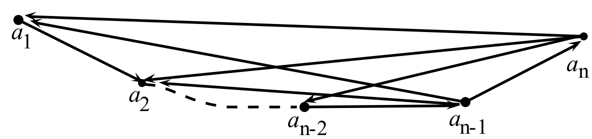

Рис. 8. Турнирный граф с двумя некритическими вершинами.

Замечание 3. Доказательство Теоремы 1 в случае, когда $|\overline{V(S)}| > 1$ и минимальная степень равна d, дает нам хотя бы $2d - n$ некритических вершин. Несмотря на это, никакое ограничение снизу на минимальную степень d не дает возможности доказать наличие даже трех некритических вершин в графе D.

Для любого n существует сильно связный турнирный граф (полный граф, где для каждого ребра выбрали одно направление) ровно с двумя некритическими вершинами. Построим этот турнирный граф на n вершинах (см. рисунок 8), он имеет ребра вида $a_i a_{i+1}$ $(i < n)$ и ребра вида $a_i a_j$, для всех пар i, j, где $i > j + 1$.

Литература

1. W. Mader, *Critically n-connected digraphs.* — Graph Theory, Combinatorics, and Applications **2** (1991), 811–829.
2. J. Bang-Jensen, G. Gutin, *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications.* 2000.
3. С. В. Савченко, *О числе некритических вершин в сильно связных орграфах.* — Мат. Заметки **79** (2006), 743–755.

4. S. V. Savchenko, *On the number of non-critical vertices in strong tournaments of order N with minimum out-degree δ^+ and in-degree δ^-*. — Discrete Math. **310** (2010), 1177–1183.

Nenashev G. V. On existence of noncritical vertices in digraphs.

Let D be a strongly connected digraph on $n \geq 4$ vertices. A vertex v of D is noncritical, if the digraph $D - v$ is strongly connected. We prove, that if sum of the degrees of any two adjacent vertices of D is at least $n+1$, then there exists a noncritical vertex in D, and if sum of the degrees of any two adjacent vertices of D is at least $n+2$, then there exist two noncritical vertices in D. A series of examples confirm that these bounds are tight.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: glebnen@mail.ru

Поступило 21 июня 2012 г.