Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 406, 2012 г.

Г. В. Ненашев

ОЦЕНКА ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ПОЧТИ ПЛАНАРНОГО ГРАФА

§1. Введение

Задачи о том, как связаны между собой возможность нарисовать граф на различных типах поверхностей без пересечения ребер и хроматические характеристики графа, являются одними из самых старых в теории графов. Самая известная задача подобного рода – проблема четырех красок. В общей постановке задачи наиболее сильный из полученных результатов – это найденная в [4] верхняя оценка хроматического числа графа, который можно изобразить без пересечений на поверхности рода g ($g > 1$). П. Дж. Хивуд доказал, что хроматическое число такого графа не превосходит $\frac{7+\sqrt{1+48g}}{2}$. Более того, в [7] показано, что эти оценки точные. С другой стороны, ранее не было известно никаких аналогичных результатов для также активно изучаемого класса графов, а именно – k-почти планарных графов.

В работе рассмотрена ситуация, когда в изображении графа возможны пересечения, но каждое ребро может пересекаться не более чем с одним другим ребром.

Определение 1. *Пусть k – неотрицательное целое число. Назовём граф k-почти планарным, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы каждое ребро пересекало не более, чем k других. При $k = 1$ мы будем называть такой граф просто почти планарным.*

Определение 2. *Пусть k, g – неотрицательные целые числа. Тогда класс графов $\mathcal{A}(k, g)$ – это графы без петель и кратных ребер, которые можно изобразить на поверхности рода g так, что каждое ребро пересекает не более, чем k других.*

Изображением графа, принадлежащего $\mathcal{A}(k, g)$, мы будем называть только изображение этого графа на поверхности рода g, такое что

Ключевые слова: хроматическое число.

Исследования поддержаны ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013г.

каждое ребро пересекает не более k других. Аналогично будет использоваться и термин изобразить.

В работе будут использоваться стандартные обозначения. Количество вершин графа G мы будем обозначать через $v(G)$, количество рёбер – через $e(G)$.

Через $\chi(G)$ мы будем обозначать хроматическое число графа G, то есть минимальное возможное число цветов в правильной раскраске его вершин. Обозначим минимальное число цветов, в которое можно покрасить правильным образом любой граф из $\mathcal{A}(1,g)$ через $\chi(\mathcal{A}(1,g))$.

В этой статье мы обобщаем на случай "почти планарных" графов на поверхности произвольного рода результаты, полученные в [4]. Для почти планарного графа G будет доказана оценка $\chi(G) \leqslant 7$, а для графа $G \in \mathcal{A}(1,g)$ мы докажем оценку $\chi(G) \leqslant \frac{9+\sqrt{17+64g}}{2}$. Также в разделе 5 будет показано, что найденная оценка точна для класса $\mathcal{A}(1,1)$.

Полученная при доказательстве верхних оценок на хроматическое число графов $G \in \mathcal{A}(1,g)$ формула $e(G) \leqslant 4(v(G) - 2 + 2g)$ может также представлять и независимый интерес. Частный случай этого неравенства (для случая $g = 0$) можно найти в работе [6].

Определение 3. *Будем называть ребро простым в данном изображении, если оно не пересекает ни одного другого ребра.*

Определение 4. *Будем называть пару ребер параллельными в данном изображении, если выполнены условия:*

1) *ребра кратные;*

2) *не пересекаются между собой и ни с какими другими ребрами графа;*

3) *вместе ограничивают область на поверхности, которая не содержит вершин.*

Определение 5. *Назовем ребра AB и AC соседними в данном изображении относительно вершины A, если между их выходами из вершины A нет выходов других ребер. (Другими словами, существует достаточно малая окрестность вершины A, такая что внутренность косоугольного треугольника, образованного частью ее границы и ребрами AB и AC, не содержит изображений ни ребер, ни вершин графа.)*

В дальнейшем изображение, о котором идет речь, определяется однозначно и его упоминание будет опускаться.

§2. Верхняя оценка на количество ребер в графах из $\mathcal{A}(1, g)$

Теорема 1. *Для любого графа $G \in \mathcal{A}(1, g)$ выполняется неравенство*

$$e(G) \leqslant 4(v(G) - 2 + 2g).$$

Доказательство. Предположим, что невозможно изобразить наш граф на поверхности рода меньше g (иначе просто уменьшим g).

Теперь рассмотрим произвольное изображение графа G на поверхности рода g, удовлетворяющее следующим условиям:

1°. *Каждое ребро пересекает не более чем одно другое.*

2°. *Никакие два пересекающихся ребра не имеют общего конца.*

3°. *Любые два пересекающихся ребра пересекаются ровно один раз.*

4°. *Граф изображен без самопересечений рёбер.*

Существование такого изображения для почти планарного графа доказано в лемме 1 работы [5]. Это доказательство очевидным образом переносится на случай графов из $\mathcal{A}(1, g)$.

Далее вместо графа рассматривается только его изображение на поверхности рода g, которое удовлетворяет условиям $1° - 4°$. Добавим еще два условия:

5° *В графе нет параллельных ребер.*

6° *В графе нет петель.*

Для графов без петель и кратных ребер условия 5° и 6° выполнены, поэтому их изображения удовлетворяют условиям $1° - 6°$.

Далее мы будем добавлять ребра в изображение с сохранением условий $1° - 6°$. Опишем три конструкции, с помощью которых мы добавляем ребра (При этом могут появляться кратные ребра, но не петли).

Конструкция 1. *Если есть пересекающиеся ребра AC и BD, то мы добавим те из ребер AB, BC, CD, DA вдоль частей ребер AC и BD (см. рисунок 1a), для которых еще нет параллельных.*

Так как изображение удовлетворяло условию 2°, то все вершины A, B, C и D различны, и, следовательно, петли к изображению не добавились. Остальные условия, очевидно, по-прежнему будут выполняться.

Конструкция 2. *Если есть простые ребра AB и AC, соседние по вершине A, причем вершины B и C различны, то мы добавим ребро BC вдоль этих ребер (см. рисунок 1b), если эта операция не приведет к появлению параллельных ребер.*

Очевидно, что все условия по-прежнему выполняются.

Конструкция 3. *Если есть два треугольника ABC и ABD, такие что:*

- *C и D различны,*
- *ребро AB у них общее,*
- *внутри треугольников нет вершин и ребер,*

то мы добавим ребро CD внутри треугольников (см. рисунок 1c).

Очевидно, что все условия по-прежнему выполняются.

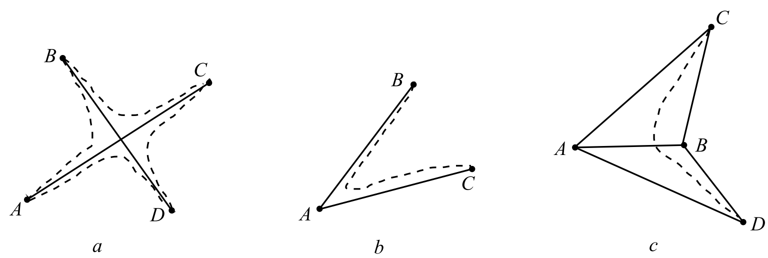

Рис. 1. Конструкции 1, 2 и 3.

Используя эти конструкции будем добавлять ребра в изображение, пока это возможно. Процесс добавления ребер остановится, поскольку любое изображение, полученное при добавлении ребер, очевидным образом разбивается на два графа, изображенных на поверхности рода g без пересечений, а количество ребер в таких графах ограничено.

Обозначим полученный после остановки процесса добавления ребер граф через $\widetilde{G}$. Заметим, что $e(G) \leqslant e(\widetilde{G})$, и, таким образом, достаточно доказать верхнюю оценку для $e(\widetilde{G})$.

Пусть в графе $\widetilde{G}$ ровно e ребер, v вершин и t пересечений. Удалим по одному ребру из каждой пары пересекающихся ребер (всего будет удалено t ребер) и полученный плоский граф обозначим G'.

По формуле Эйлера

$$e' = e(G') \leqslant 3(v(G') - 2 + 2g). \qquad (1)$$

Обозначим за p количество простых ребер в графе $\widetilde{G}$ ($p = e - 2t$). Каждому пересечению мы поставим в соответствие 4 простых ребра вокруг этого пересечения (см. рисунок 1a). Следовательно,

$$t \leqslant 2p/4 = p/2,$$

так как каждому простому ребру в соответствие могли поставить не более двух пересечений. Таким образом, $2t \leqslant p$, а также

$$3t \leqslant p + t = e'$$

$$e = e' + t \leqslant e' + e'/3 = 4e'/3.$$

Откуда в силу (1) получаем,

$$e(G) = e \leqslant 4e'/3 \leqslant 4(v(G') - 2 + 2g).$$

□

§3. Верхняя оценка на хроматическое число для почти планарных графов

Теорема 2. *Вершины любого почти планарного графа можно покрасить правильным образом в 7 цветов.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по количеству вершин.

База. Вершин не более 7, доказательство очевидно.

Переход. Рассмотрим изображение 1-почти планарного графа G, удовлетворяющее условиям $1^\circ - 6^\circ$.

Будем добавлять ребра в рассматриваемое изображение с помощью конструкций 1, 2 и 3, пока это возможно. Как уже упоминалось выше, этот процесс обязательно остановится. Полученное изображение обозначим G'.

Лемма 1. *Если в изображении G' есть кратные ребра, то граф G можно раскрасить правильным образом в 7 цветов.*

Доказательство. Пусть между вершинами A и B проведено два ребра l_1 и l_2. Эти ребра между собой не пересекаются по условию 2°.

Если эти два ребра ни с какими ребрами не пересекаются, то можно раскрасить по предположению индукции по отдельности внутреннюю и внешнюю области, ограниченные ребрами l_1, l_2, и согласовать цвета так, чтобы у A был цвет 1 в обеих частях, а у B – цвет 2.

Теперь рассмотрим случай, когда существует ребро, пересекающее l_1 или l_2. Такое ребро имеет один конец во внутренней области, а второй – во внешней. Так как каждое l_i пересекает не более одного ребра, то таких ребер не более двух. Пусть C_iD_i – это ребро, которое пересекает l_i, причем вершина C_i лежит во внутренней области, а D_i – во внешней (возможно, ребра C_iD_i нет).

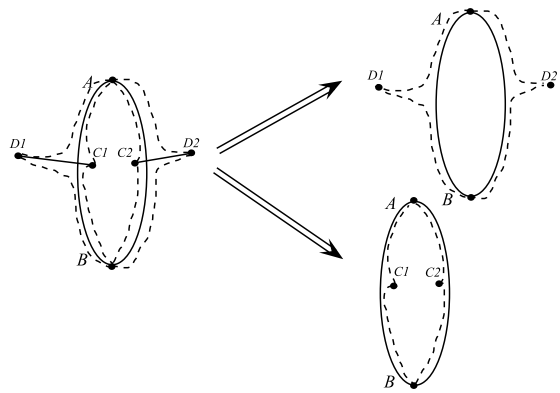

Рис. 2. Разбиение графа на две части в случае кратных ребер.

Определение 6. *Внутренний (внешний) граф – это подграф на вершинах A, B и вершинах из внутренней (внешней) области, отделенной ребрами l_1 и l_2.*

Теперь мы рассмотрим внутренний и внешний графы по отдельности. Если ребро C_iD_i существует, то оно пересекает l_i, а значит во внутренней области по конструкции 1 есть ребра C_iA и C_iB, а во внешней – D_iA и D_iB. Раскрасим по отдельности внутреннюю область и внешнюю. Это возможно по предположению индукции, так как внутренний и внешний графы являются почти планарными с меньшим, чем у графа G, числом вершин.

Теперь согласуем цвета вершин в этих двух графах.

Рассмотрим получившуюся раскраску внутреннего графа.

1) Считаем, что вершины A и B покрашены в 1 и 2 цвета соответственно (они разного цвета, так как есть ребро l_1).

2) Вершины C_i не могут быть покрашены в 1 и 2 цвета, так как каждая C_i соединена и с A, и с B, поэтому можно считать, что эти вершины покрашены в цвета 3 и 4 (при этом возможно, что обе C_i одного цвета).

Рассмотрим получившуюся раскраску внутреннего графа.

1) Считаем, что вершины A и B покрашены в 1 и 2 цвета соответственно (они разного цвета, так как есть ребро l_1).

2) Вершины D_i не могут быть покрашены в 1 и 2 цвета, так как каждая D_i соединена и с A, и с B, поэтому можно считать, что эти вершины покрашены в цвета 5 и 6 (при этом возможно, что обе D_i одного цвета).

Рассмотрим раскраску графа G, индуцирующую на внешнем и внутреннем графе эти две раскраски. Очевидно, что после согласования цветов вершин такая раскраска существует. Отметим, что в рассматриваемой раскраске ребра C_iD_i соединяют вершины разного цвета, а значит, эта раскраска – правильная.

□

То есть мы доказали, что можно сделать переход индукции, когда есть кратные ребра. Следовательно, для завершения доказательства достаточно разобрать случай, когда в изображении G' нет кратных ребер.

Лемма 2. *Предположим, что ребра AB и AC – соседние для вершины A. Тогда есть ребро BC. Более того,*

1) *в области, ограниченной ребрами AB, AC и BC, нет вершин, и, следовательно,*

2) *ребро BC – простое.*

Доказательство. Вершины A, B, C – различные, так как в графе нет петель и кратных ребер. Если ребра AB и AC – простые, то в изображении G' есть ребро BC (иначе можно добавить ребро, используя конструкцию 2), и в этом “треугольнике” нет вершин. То есть, утверждение леммы выполняется.

Теперь рассмотрим оставшийся случай, когда хотя бы одно из ребер AB и AC – непростое. Пусть AB пересекается с ребром XY (иначе аналогично).

Так как невозможно больше добавлять ребра конструкцией 1, у нас уже есть ребра AX и AY и они будут соседними с AB. Так как у ребра AB не может быть больше двух соседних по вершине A ребер по определению, то вершина C совпадает либо с X, либо с Y. Пусть с Y (иначе аналогично).

Так как есть ребро XC, которое пересекает AB (см. рисунок 3), из предположения, что нельзя добавить ребра конструкцией 1, следует, что есть ребра BC и AC вдоль ребер BA и XC. Таким образом, мы получили ребро BC, а также “треугольник” ABC в котором нет вершин. Причем, ребра треугольника именно те, о которых говорилось в утверждении леммы, поскольку в изображении G' нет кратных ребер. Лемма полностью доказана.

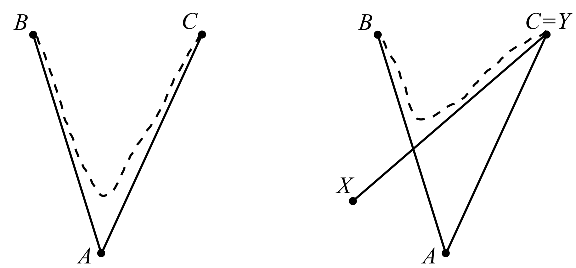

Рис. 3

$\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Как мы уже отмечали, для изображения G' верно неравенство $e(G') \leqslant 4(v(G')-2)$, и, следовательно, сумма степеней вершин графа G' не превосходит $8(v(G')-2)$. Отсюда получаем, что среднее арифметическое степеней вершин изображения G' меньше 8. Значит, в изображении G' есть вершина степени 7 или меньше.

Очевидно, что если есть вершина степени 6 или меньшей степени, то можно будет покрасить граф без нее по предположению индукции, а эту вершину докрасить потом. Следовательно, для графов, в которых есть вершина степени не выше 6, переход доказан.

Осталось рассмотреть случай, когда в изображении есть вершина степени 7. Обозначим ее A. Пусть ребра из нее ведут в вершины $B_1, \ldots, B_7$. Заметим, что эти вершины различны, так как в изображении нет кратных ребер. Мы считаем, что B_j упорядочены так же, как и выходы соответствующих ребер из вершины A.

Тогда по лемме 2 у нас есть все ребра B_jB_{j+1} (индексы рассматриваются по модулю 7), причем в “треугольниках” AB_jB_{j+1} нет вершин. Рассмотрим область, ограниченную “многоугольником” $B_1 \ldots B_7$, в которой лежит вершина A.

Докажем, что внутри этой области проведено ровно 3 ребра. Больше трех ребер не может быть, так как каждое такое ребро проходит ровно по двум соседним треугольникам AB_iB_{i+1}, и по каждому треугольнику проходит максимум одно ребро. Меньше трех ребер тоже не может быть, так как тогда есть три треугольника, внутри которых не проходят ребра, и среди них есть два соседних треугольника. В этом случае можно добавить ребро, используя конструкцию 3, противоречие.

Пусть внутри проведены ребра B_1B_3, B_3B_5 и B_5B_7 (см. рисунок 4), остальные случаи аналогичны (меняются только номера вершин).

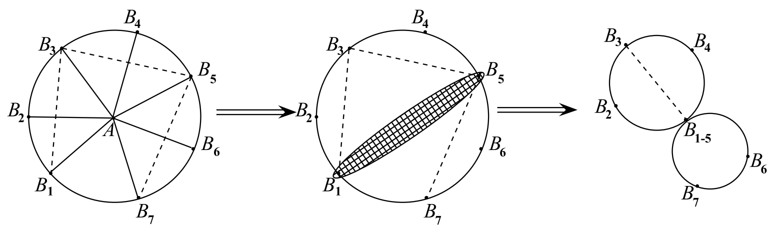

Рис. 4. Стягивание вершин B_1 и B_5.

Если в графе нет ребра B_1B_5, то удалим вершину A и склеим вершины B_1 и B_5 (см. рисунок 4). После этой операции получился новый почти планарный граф, вершины которого возможно покрасить в 7 цветов по индукционному предположению. Покрасим исходный граф в соответствии с этой раскраской, при этом вершины B_1 и B_5 окажутся одного цвета, а значит, можно выбрать цвет для вершины A, отличный от цветов вершин B_i.

Аналогично рассмотрим случай отсутствия ребра B_3B_7.

Для завершения доказательства осталось рассмотреть случай, когда есть оба ребра B_1B_5 и B_3B_7. Эти два ребра проведены вне многоугольника $B_1 \dots B_7$ (см. рисунок 5). Значит, они пересекаются. Тогда у нас есть вне многоугольника ребро B_3B_5, так как нельзя добавить ребро по конструкции 1. Следовательно, в графе два ребра B_3B_5; полученное противоречит с отсутствием кратных ребер. Теорема доказана.

□

§4. Верхняя оценка на хроматическое число для графов из $\mathcal{A}(1, g)$

Теорема 3. *Пусть граф $G \in \mathcal{A}(1, g)$, $g \geqslant 1$. Тогда выполняется неравенство $\chi(G) \leqslant \frac{9+\sqrt{17+64g}}{2}$.*

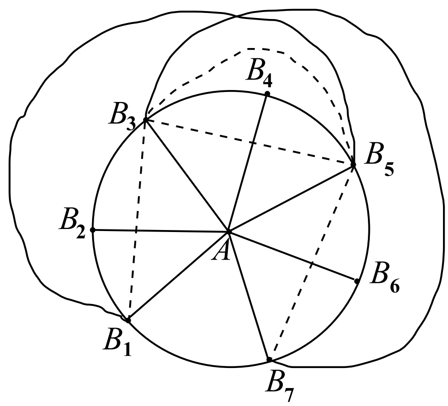

Рис. 5

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно и рассмотрим минимальный контрпример, пусть это граф G. Пусть $v = v(G)$.

Мы доказали, что $e(G) \leqslant 4(v-2+2g)$, следовательно, в графе G есть вершина степени не более, чем $min(v-1, \frac{8(v-2+2g)}{v})$.

Рассмотрим функцию $f(x) = min(x-1, \frac{8(x-2+2g)}{x})$ и найдем ее максимум. Так как первая часть возрастает, а вторая – не возрастает при $g \geqslant 1$, то тогда максимум достигается при таком x, что $x - 1 = \frac{8(x-2+2g)}{x}$. Решая это уравнение, получаем корень $\frac{9+\sqrt{17+64g}}{2}$ (нас интересует только положительный корень). Следовательно, при $x < \frac{9+\sqrt{17+64g}}{2}$ функция $f(x)$ возрастает, а при $x > \frac{9+\sqrt{17+64g}}{2}$ убывает. Значит, максимум $f(x)$ достигается при $x = \frac{9+\sqrt{17+64g}}{2}$, то есть, равен $f(\frac{9+\sqrt{17+64g}}{2}) = \frac{9+\sqrt{17+64g}}{2} - 1$.

Отсюда получаем, что в графе G есть вершина степени не более $f(v) \leqslant \frac{9+\sqrt{17+64g}}{2} - 1$. Таким образом, граф G не может быть минимальным контрпримером.

□

§5. Нижние оценки для чисел $\chi(\mathcal{A}(1,0))$ и $\chi(\mathcal{A}(1,1))$

Выше мы исследовали верхние оценки для $\chi(\mathcal{A}(1,g))$, теперь получим нижние оценки для $g = 1, 2$.

Рассмотрим класс $\mathcal{A}(1,0)$, то есть почти планарные графы. Легко заметить, что граф K_7 в рассматриваемое множество не входит, так как $e(K_7) = \frac{7\cdot 6}{2} > 4(7-2)$. С другой стороны, граф K_6 является почти планарным (для его изображения на сфере надо взять треугольную призму и провести на каждой боковой грани обе диагонали (см. рисунок 6 слева)). Тем самым, существует почти планарный граф с хроматическим числом 6. Однако, при попытке доказать верхнюю оценку 6 для $\chi(\mathcal{A}(1,0))$ возникает множество проблем. В частности, для минимального контрпримера неочевидно даже то, что в нем нет вершин степени 6.

Таким образом, получены оценки: $6 \leqslant \chi(\mathcal{A}(1,0)) \leqslant 7$.

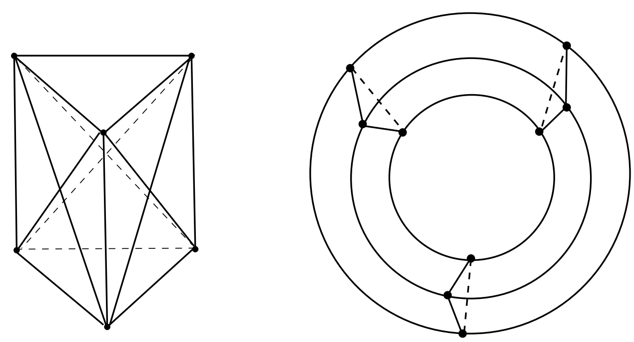

Рис. 6. K_6 и K_9.

Рассмотрим $\mathcal{A}(1,1)$, то есть графы, которые можно изобразить на торе так, что каждое ребро пересекается не более чем с одним другим ребром. Для графов без пересечений на торе известно, что хроматическое число не превосходит 7. Также известно, что существует изображение графа K_7 на торе без пересечений. Тем самым, для графов без пересечений на торе оценка точна. В нашем случае (для графов класса $\mathcal{A}(1,1)$) оценка тоже получается точная. Мы доказали, что хроматическое число у таких графов не больше чем $\frac{9+\sqrt{17+64}}{2} = 9$.

Можно легко изобразить граф K_9 на торе так, что каждое ребро пересекается не более чем с одним другим ребром, для этого надо взять три треугольные призмы с боковыми диагоналями и склеить их по треугольным граням в тор (см. рисунок 6).

Тем самым получаем, что $\chi(\mathcal{A}(1,1)) = 9$.

Литература

1. K. Appel, W. Haken, *Every Planar Map Is Four Colorable.* — A.M.S. Contemp. Math. **98** (1989).
2. K. Appel, W. Haken, *Every map is four colourable, Part I: Discharging.* — Illinois J. Math. **21** (1977), 429–490.
3. K. Appel, W. Haken, *Every map is four colourable, Part II: Reducibility.* — Illinois J. Math. **21** (1977), 491–567.
4. P. J. Heawood, *Map colour theorem.* — Quart. J. Math. **24** (1890), 332–338.
5. Д. В. Карпов, *Верхняя оценка количества рёбер в двудольном почти планарном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **406** (2012), 12–30.
6. J. Pach, G. Tóth, *Graphs drawn with few crossing per edge.* — Combinatorica **17**, No. 3 (1997), 427–439.
7. G. Ringel, J. W. T. Youngs, *Solution of the Heawood map-coloring problem.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **60**, No. 2 (1968), 438–445.
8. N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas, *The Four-Colour Theorem.* — J. Comb. Theory, Ser. B **70** (1997), 2–44.

Nenashev G. V. On a bound on the chromatic number of almost planar graph.

Let G be a graph, which can be drawn on the plane such that any edge intersects at most one other edge. We prove, that the chromatic number of G does not exceed 7. We also prove the bound $\chi(G) \leqslant \frac{9+\sqrt{17+64g}}{2}$ for a graph G, which can be drawn on the surface of genus g, such that any edge intersects at most one other edge.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: glebnen@mail.ru

Поступило 3 ноября 2012 г.