Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 406, 2012 г.

Д. В. Карпов

ОСТОВНЫЕ ДЕРЕВЬЯ С БОЛЬШИМ КОЛИЧЕСТВОМ ВИСЯЧИХ ВЕРШИН: НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ЧЕРЕЗ КОЛИЧЕСТВО ВЕРШИН СТЕПЕНЕЙ 1, 3 И НЕ МЕНЕЕ 4

§1. Введение. Основные обозначения

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных рёбер. В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, пусть $v(G) = |V(G)|$. Множество рёбер графа G мы будем обозначать через $E(G)$.

Для $E \subset E(G)$ через $G - E$ будем обозначать граф, полученный из G в результате удаления рёбер множества E. Для $V \subset V(G)$ мы будем обозначать через $G - V$ граф, полученный из G в результате удаления вершин множества V и всех инцидентных им рёбер.

Через $d_G(x)$ обозначим степень вершины x в графе G, минимальную степень вершины графа G, как обычно, обозначим через $\delta(G)$. Окрестность вершины $x \in V(G)$ (то есть, множество всех вершин графа G, смежных с x) обозначим через $\mathrm{N}_G(x)$.

Для ребра $e \in E(G)$ через $G \cdot e$ мы обозначим граф, полученный в результате *стягивания* ребра e (концы ребра e стягиваются в новую вершину, с которой в графе $G \cdot e$ будут смежны все отличные от концов e вершины, смежные в G хотя бы с одним из концов ребра e).

Определение 1. *Для связного графа G обозначим через $u(G)$ максимально возможное количество висячих вершин в остовном дереве графа G.*

Замечание 1. Если F – дерево, то нетрудно понять, что $u(F)$ – количество его висячих вершин.

Ключевые слова: остовное дерево, висячие вершины, количество висячих вершин.

Исследования выполнены при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН, гранта Президента РФ НШ-5282.2010.1 и гранта РФФИ No. 11-01-00760-а.

С 1981 года, когда Сторер [1] предположил, что при $\delta(G) \geqslant 3$ выполняется $u(G) > \frac{v(G)}{4}$, было опубликовано немало работ об оценках $u(G)$. Подробнее об истории вопроса можно прочитать в [11]. Мы же приведем лишь результаты и предположения, непосредственно связанные с нашей работой.

В 1981 году Линиал высказал гипотезу:

$$u(G) \geqslant \frac{d-2}{d+1}v(G) + c \quad \text{при} \quad \delta(G) \geqslant d \geqslant 3,$$

где константа $c > 0$ зависит только от d. Эта гипотеза появилась не на пустом месте: для любого $d \geqslant 3$ легко придумать бесконечную серию примеров графов с минимальной степенью d, для которых $\frac{u(G)}{v(G)}$ стремится к $\frac{d-2}{d+1}$. Из работы Алона ([4], 1990) следует, что для достаточно больших d гипотеза Линиала неверна. Однако, нам интересны как раз случаи малых d.

В 1991 году Клейтман и Вест [2] доказали, что $u(G) \geqslant \frac{1}{4} \cdot v(G) + 2$ при $\delta(G) \geqslant 3$ и $u(G) \geqslant \frac{2}{5} \cdot v(G) + \frac{8}{5}$ при $\delta(G) \geqslant 4$. В 1996 году Григгс и Ву [3] еще раз доказали утверждение для $\delta(G) \geqslant 4$ и доказали, что $u(G) \geqslant \frac{1}{2} \cdot v(G) + 2$ при $\delta(G) \geqslant 5$. Таким образом, гипотеза Линиала доказана для $d = 3$, $d = 4$ и $d = 5$. Для $d > 5$ вопрос остается открытым.

В работе [2] сказано о еще одной, более сильной гипотезе Линиала: $u(G) \geqslant \sum\limits_{x \in V(G)} \frac{d_G(x)-2}{d_G(x)+1}$ для связного графа G с $\delta(G) \geqslant 2$. Понятно, что раз для больших степеней неверна более слабая гипотеза, то неверна и эта. Однако, она стимулирует попытки получить оценку на $u(G)$, в которую каждая вершина вносит вклад, зависящий от ее степени.

В работе [13] автор доказал, что для связного графа G с более, чем одной вершиной, s вершинами степени 3 и t вершинами степени не менее 4 имеет место оценка $u(G) \geqslant \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}s + 2$ (кроме трёх графов-исключений). В этой работе допускается наличие в графе вершин степени 1 и 2. Приведена бесконечная серия примеров графов, для которых достигается равенство.

В работах [11, 12] доказаны оценки на $u(G)$, в которых учитываются вершины степени 1. Пусть G – связный граф, в котором более одной вершины и s вершин степени, отличной от 2. В [11] автор и А. В. Банкевич доказали, что $u(G) \geqslant \frac{1}{4}s + \frac{3}{2}$, а в [12] А. В. Банкевич доказал, что $u(G) \geqslant \frac{1}{3}s + \frac{4}{3}$ для графа G без треугольников. Все эти оценки точные, что подтверждено бесконечными сериями примеров.

На этом фоне естественно возникает основной результат нашей работы.

Теорема 1. *Пусть G – связный граф с более чем одной вершиной, s – количество его вершин степеней 1 и 3, а t – количество его вершин степени не менее 4. Тогда $u(G) \geqslant \frac{1}{3}t + \frac{1}{4}s + \frac{3}{2}$.*

Отметим, что эта оценка оптимальна по всем трём константам. Существуют бесконечные серии примеров графов, для которых оценка достигается. В конце работы мы приведём серию примеров, в которой графы содержат только вершины степеней 1, 3 и 4.

Наше доказательство использует целый ряд методов построения остовного дерева с большим количеством висячих вершин. Используется редукционная техника, разработанная в [11]. В случае $R6$ доказательства теоремы мы применяем в редукционном переходе технику удаления из графа рёбер некоторого маршрута, придуманную А. В. Банкевичем в [12]. Впрочем, методы приходится существенно изменить, чтобы они позволяли отдельно учитывать вершины степени 4 и более. К сожалению, только редукционными методами, как в [11,12], в нашем случае обойтись не удаётся.

В оставшихся после редукции случаях мы используем классический метод *мёртвых вершин* [2,3,13]. Однако, этот метод не позволяет учитывать в оценке вершины степени 1, именно поэтому нам нужно все такие вершины включить в базу построения. Наша базовая конструкция будет не деревом, как в указанных работах, а лесом. Такую идею можно увидеть в работе [9] Н. В. Гравина, но в сочетании с другим методом.

§2. Доказательство теоремы 1

Как всегда, при построении искомого остовного дерева для графа G мы будем считать, что для всех меньших графов (то есть, графов, имеющих меньше вершин или столько же вершин, но меньше рёбер) теорема уже доказана.

Пусть $S(G)$ – множество вершин степеней 1 и 3, а $T(G)$ – множество вершин степени не менее 4 в графе G, $s(G) = |S(G)|$, $t(G) = |T(G)|$.

Определение 2. *Будем считать, что цена вершины $x \in T(G)$ – это $c_G(x) = \frac{1}{3}$, цена вершины $x \in S(G)$ – это $c_G(x) = \frac{1}{4}$, цена любой другой* *вершины* 0. *Стоимостью графа* G *назовём величину*

$$c(G) = \frac{1}{3}t(G) + \frac{1}{4}s(G) = \sum_{x\in V(G)} c_G(x).$$

Для любого подграфа F *графа* G *определим его стоимость в графе* G, *как*

$$c_G(F) = \sum_{x\in V(F)} c_G(x).$$

Мы хотим доказать неравенство $u(G) \geqslant c(G) + \frac{3}{2}$, очевидно, эквивалентное утверждению нашей теоремы.

2.1. Редукция. В некоторых случаях мы будем сводить задачу к меньшему графу. Эта часть идейно повторяет изложенное в работе [11] с одним отличием: теперь нам нужно отдельно учитывать вершины степени 4 и более, которые стоят дороже вершин степеней 1 и 3.

Сформулируем определение и две леммы из работы [11], которые нам понадобятся.

Определение 3. *Пусть даны два графа* G_1 *и* G_2, *в которых выделены вершины* $x_1 \in V(G_1)$ *и* $x_2 \in V(G_2)$ *соответственно,* $V(G_1)\cap V(G_2) = \varnothing$. *Склеить графы* G_1 *и* G_2 *по вершинам* x_1 *и* x_2 *значит склеить две вершины* x_1 *и* x_2 *в одну вершину* x, *которой будут переданы все выходящие из* x_1 *и* x_2 *рёбра обоих графов. Остальные вершины и рёбра графов* G_1 *и* G_2 *войдут в полученный при склейке граф без изменений.*

Лемма 1. *Пусть* G_1 *и* G_2 – *связные графы с* $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$ *и висячими вершинами* x_1 *и* x_2. *Пусть* G – *граф, полученный из* G_1 *и* G_2 *склеиванием по вершинам* x_1 *и* x_2 *и последующим стягиванием нескольких мостов, не инцидентных висячим вершинам. Тогда* $u(G) = u(G_1) + u(G_2) - 2$.

Лемма 2. *Пусть* $a, b \in V(G)$ – *смежные вершины, а подграф* G' – *компонента связности графа* $G - a$, *содержащая вершину* b. *Тогда, если* b – *точка сочленения графа* G', *то* $u(G) \geqslant u(G') + 1$.

Опишем редукционные правила. В каждом следующем пункте мы считаем, что не выполняются условия ни одного из предыдущих.

R1. *В графе G есть вершина a степени* 2.
Если a – точка сочленения, то, стянув инцидентное ей ребро, мы получим меньший граф G' с $c(G') = c(G)$ и $u(G') = u(G)$.

Если же a – не точка сочленения, то инцидентное ей ребро ab – не мост и граф $G' = G - ab$ связен. Очевидно,

$$c_{G'}(a) - c_G(a) = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad c_G(b) - c_{G'}(b) \leqslant \frac{1}{4},$$

поэтому $c(G') \geqslant c(G)$. Так как любое остовное дерево графа G' является остовным деревом графа G, мы имеем $u(G') \leqslant u(G)$. В обоих случаях утверждение теоремы для графа G следует из утверждения теоремы для меньшего графа G'.

Замечание 2. Далее мы будем считать, что в графе G нет вершин степени 2.

Пусть U – множество всех висячих вершин графа G. Мы будем считать, что $U \neq \varnothing$ (случай графа без висячих вершин мы разберём в следующем разделе).

Если какие-то две вершины из U смежны, то в графе есть только эти две вершины, а для графа из двух вершин утверждение теоремы 1 очевидно. Далее мы будем считать, что в графе более двух вершин, поэтому никакие две вершины из U не смежны.

Пусть $W \subset V(G)$ – множество всех вершин, смежных с висячими, а $X \subset V(G)$ – множество всех не вошедших в U и W вершин, смежных с W.

Пусть $H = G - U$. Понятно, что граф H связен.

R2. *Граф H не двусвязен.*

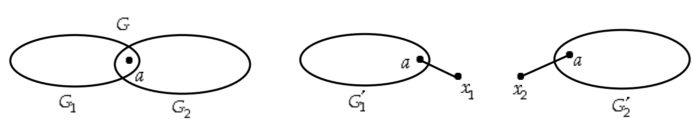

Рис. 1. Редукция $R2$.

Пусть a – точка сочленения графа H. Тогда a – точка сочленения графа G и существуют такие связные графы G_1 и G_2, что

$$V(G_1) \cup V(G_2) = V(G), \quad V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\} \quad \text{и} \quad v(G_1), v(G_2) > 2.$$

Для $i \in \{1,2\}$ рассмотрим граф G'_i, полученный из G_i присоединением новой висячей вершины x_i к вершине a (см. рисунок 1). Тогда граф G получается из G'_1 и G'_2 склейкой вершин x_1 и x_2 в одну вершину x и последующим стягиванием двух инцидентных x мостов (при этом две копии вершины a в графах G'_1 и G'_2 склеятся в вершину a графа G). Таким образом, выполняются условия леммы 1 и мы имеем $u(G) = u(G'_1) + u(G'_2) - 2$.

Поскольку $d_G(a) = d_{G'_1}(a) + d_{G'_2}(a) - 2$, то несложно проверить, что $c_G(a) \leqslant c_{G'_1}(a) + c_{G'_2}(a)$. Так как вершины $x_1 \in V(G'_1)$ и $x_2 \in V(G'_2)$ (которые стоят по $\frac{1}{4}$) не принадлежат $V(G)$, а все отличные от a вершины графа G входят ровно в один из графов G'_1 и G'_2 и имеют в этом графе такую же степень, как в графе G, мы имеем $c(G) \leqslant c(G'_1) + c(G'_2) - 2 \cdot \frac{1}{4}$.

Нетрудно понять, что $v(G'_1) < v(G)$ и $v(G'_2) < v(G)$. Тогда по индукционному предположению $u(G'_1) \geqslant c(G'_1) + \frac{3}{2}$ и $u(G'_2) \geqslant c(G'_2) + \frac{3}{2}$. Таким образом,

$$u(G) = u(G'_1) + u(G'_2) - 2 \geqslant c(G'_1) + c(G'_2) - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \geqslant c(G) + \frac{3}{2},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 3. В дальнейшем мы будем считать, что в графе H нет точек сочленения. Это означает, что все точки сочленения графа G – это вершины множества W (каждая такая вершина отделяет смежные с ней висячие вершины от остальных вершин графа).

R3. *Существуют такие смежные вершины $x, y \in V(G)$, что $d_G(x) \geqslant 5$ и $d_G(y) \geqslant 5$.*
Тогда рассмотрим граф $G' = G - xy$. Из двусвязности графа $H = G - U$ очевидно следует связность графа G', для него утверждение теоремы уже доказано. Очевидно, $d_{G'}(x) \geqslant 4$ и $d_{G'}(y) \geqslant 4$, поэтому $c_G(x) = c_{G'}(x)$ и $c_G(y) = c_{G'}(y)$. Следовательно, $c(G') = c(G)$. Так как остовное дерево графа G' является остовным деревом G, утверждение теоремы доказано и для G.

R4. *Существуют такие смежные вершины $a, b \in V(G)$, что b – точка сочленения в содержащей ее компоненте связности G' графа $G - a$ и $c(G') \geqslant c(G) - 1$.*

Так как вершина $b \in \mathrm{N}_{G'}(a)$ является точкой сочленения графа G', по лемме 2 мы имеем $u(G) \geqslant u(G')+1$. Для меньшего графа G' утверждение уже доказано, поэтому

$$u(G) \geqslant u(G')+1 \geqslant c(G')+1+\frac{3}{2} \geqslant c(G)+\frac{3}{2},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Если граф удовлетворяет одному из следующих условий, то можно провести редукцию $R4$.*

1° *Существуют такие смежные вершины $a, b \in V(G)$, что b – точка сочленения в содержащей ее компоненте связности G' графа $G-a$ и $d_G(a) \leqslant 3$.*

2° *Существует смежная с $w \in W$ вершина x такая, что $d_G(x)=3$.*

3° *Существуют две вершины $x, y \in U$, смежные с одной вершиной $w \in W$.*

4° *Существует смежная с W вершина x такая, что $d_G(x) \leqslant 6$ и x смежна не более, чем с одной вершиной из $S(G)$.*

5° *Существует смежная с W вершина x такая, что $d_G(x)=4$ и x смежна не более, чем с двумя вершинами из $S(G)$.*

Доказательство. 1° Из двусвязности H следует, что в G' входят все вершины графа $G-a$, кроме смежных с a висячих вершин (в случае $a \in W$). От уменьшения степени на 1 цена вершины уменьшается не более, чем на $\frac{1}{4}$, поэтому

$$c(G)-c(G') \leqslant c_G(a)+\sum_{v \in \mathrm{N}_G(a)} (c_G(v)-c_{G'}(v)) \leqslant \frac{1}{4}+3 \cdot \frac{1}{4}=1$$

и условие $R4$ для вершин a и b выполнено.

2° и 3°. В обоих случаях рассмотрим компоненту связности G' графа $G-x$, содержащую w. Очевидно, w – точка сочленения графа G', так как отделяет смежную с ней висячую вершину (отличную от x) от остальных вершин графа G. Следовательно, граф удовлетворяет условию 1° для $a=x$ и $b=w$.

4° и 5°. Пусть $w \in W$ – вершина, смежная с x. В обоих случаях рассмотрим компоненту связности G' графа $G-x$, содержащую w. Как и выше нетрудно понять, что G' содержит все вершины графа $G-x$, кроме смежных с x висячих вершин, а w – точка сочленения графа G'.

Осталось показать, что $c(G)-c(G') \leqslant 1$. От уменьшения степени на 1 цена вершины из $S(G)$ уменьшается на $\frac{1}{4}$, а цена любой другой вершины – не более, чем на $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$. Напишем оценку для случая 4°:

$$c(G)-c(G')\leqslant c_G(x)+\sum_{y\in \mathrm{N}_G(x)}(c_G(y)-c_{G'}(y))\leqslant \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{12}=1.$$

Аналогичная оценка верна и в случае 5°:

$$c(G)-c(G')\leqslant c_G(x)+\sum_{y\in \mathrm{N}_G(x)}(c_G(y)-c_{G'}(y))\leqslant \frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{12}=1.$$

Теперь мы видим, что условия $R4$ для $a=x$ и $b=w$ выполнены. □

Замечание 4. В дальнейшем мы считаем, что граф не удовлетворяет ни одному из условий $1^\circ-5^\circ$ леммы 3.

Лемма 4. *Если нельзя применить правила $R1-R4$, то никакие две вершины из W не смежны в графе G.*

Доказательство. Предположим противное, пусть существуют две смежные вершины $w,w'\in W$, $d_G(w)\leqslant d_G(w')$. Тогда $d_G(w)\leqslant 4$ (иначе можно было бы выполнить $R3$). Более того, $d_G(w)=4$ (иначе w и w' удовлетворяют условию 2° леммы 3). Все смежные с w вершины, кроме одной висячей, имеют степень не менее 4, иначе граф удовлетворяет одному из условий 2° или 3° леммы 3. Но в таком случае выполняется условие 4° леммы 3 для $x=w$, противоречие. □

Замечание 5. Таким образом, каждая вершина $w\in W$ смежна с одной вершиной из U и $d_G(w)-1$ вершинами множества X. В частности, отсюда следует, что $X\neq\varnothing$. Так как не выполняется условие 2° леммы 3, все вершины множества X имеют в графе G степень хотя бы 4.

R5. *Существует вершина $x\in X$, смежная с вершинами w,w', причём $w\in W$, $d_G(w)=d_G(w')=3$ и в $\mathrm{N}_G(w')$ не более одной вершины из $S(G)$.*

Замечание 6. Так как $X\cap S(G)=\varnothing$, в случае $w'\in W$ условие **R5** выполнено.

Пусть $\mathrm{N}_G(w)=\{x,y,u\}$, где $u\in U$. По замечанию 5, мы имеем $d_G(y)\geqslant 4$. Легко понять, что граф $G'=G\cdot wx$ связен. Пусть вершина $x'\in V(G')$ образована при стягивании x и w (см. рисунок 2).

Замечание 7. Любая точка сочленения $v\neq x'$ графа G' является точкой сочленения графа G. Более того, пусть K – компонента связности графа $G' - v$. Если K не содержит x', то K является компонентой связности графа G. Если же K содержит x', то $K \cup \{x, w\} \setminus \{x'\}$ – компонента связности графа G.

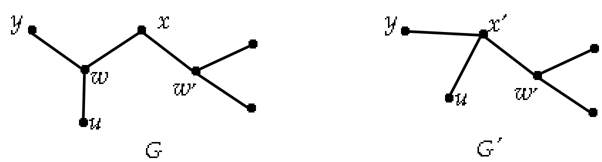

Рис. 2. Графы G и G'.

Если $w' \in W$, то граф $G' - w'$ имеет две компоненты связности, причем одна из них состоит из висячей вершины, смежной с w'. Пусть G^* – другая компонента связности $G' - w'$, которая содержит все остальные вершины. Если $w' \notin W$, то граф $G' - w'$ связен. Тогда положим $G^* = G' - w'$. Очевидно, в обоих случаях $c(G^*) = c(G' - w')$. Так как связный граф G^* меньше G, для этого графа выполнено утверждение теоремы.

Вершина x' – точка сочленения графа G^* (с ней смежна висячая вершина u), поэтому в силу леммы 2

$$u(G) \geqslant u(G') \geqslant u(G^*) + 1 \geqslant c(G^*) + 1 + \frac{3}{2}.$$

Осталось доказать, что $c(G^*) = c(G' - w') \geqslant c(G) - 1$. Отметим, что $d_{G'}(x') \geqslant 4$, поэтому $c_{G'}(x') = \frac{1}{3} = c_G(x)$.

При стягивании ребра xw степень отличной от x и w вершины могла уменьшиться только на 1 (в случае, когда эта вершина смежна в графе G и с x, и с w). Такой вершиной может быть только y, поэтому $c_{G'}(y) \geqslant c_G(y) - \frac{1}{12}$ (так как $y \in X \subset T(G)$). Степени отличных от x, y, w вершин в графах G и G' одинаковы. Следовательно, $c(G') \geqslant c(G) - \frac{1}{3}$. Поскольку $d_{G'}(x') \geqslant 4$, то $S(G) \supset S(G')$. Остается заметить, что в $\mathrm{N}_G(w')$ не более одной вершины из $S(G)$, поэтому в $\mathrm{N}_{G'}(w')$ не более одной вершины из $S(G')$. Следовательно,

$$\begin{aligned} c(G' - w') &= c(G') - c_{G'}(w') - \sum_{v \in \mathrm{N}_{G'}(w')} (c_{G'}(v) - c_{G'-w'}(v)) \\ &\geqslant c(G') - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{12}\right) = c(G') - \frac{2}{3} \geqslant c(G) - 1, \end{aligned}$$

что для нас достаточно.

R6. *Существует вершина* $x \in X$, $d_G(x) \leqslant 6$.
Мы выберем вершину $x \in X$ наименьшей степени. Так как вершина x не должна удовлетворять условию 4° леммы 3, то она смежна хотя бы с двумя вершинами из $S(G)$. Так как $x \notin W$, обе эти вершины имеют степень 3. Поскольку нельзя выполнить $R5$, то хотя бы одна из этих двух вершин не принадлежит W (см. замечание 6) и имеет двух соседей из $S(G)$. Обозначим эту вершину через y, пусть $\mathrm{N}_G(y) = \{x, z, z'\}$. Тогда, так как $y \notin W$, мы имеем $d_G(z) = d_G(z') = 3$.

Пусть вершина $w \in W$ смежна с x. Рассмотрим два случая.

R6.1. $d_G(x) = 4$, $d_G(w) \geqslant 4$.
Пусть $N_G(x) = \{w, y, y_1, y_2\}$. Тогда $d_G(y) = d_G(y_1) = d_G(y_2) = 3$, иначе выполняется условие 5° леммы 3.

Наша первая цель – построить в графе G простой путь P от вершины y до некоторой вершины q (где $q \notin S(G) \cup \mathrm{N}_G(x)$ или $q \in \{y_1, y_2\}$), все внутренние вершины которого лежат в $S(G)$ и не лежат в $\mathrm{N}_G(x)$, а граф $G - E(P) - x$ связен.

Рассмотрим $z \in \mathrm{N}_G(y)$, $z \neq x$. По замечанию 5 из $d_G(y) = 3$ следует, что $y \notin X$, то есть, y не может быть смежна с $w \in W$. Значит, $z \neq w$. Если ребро yz – мост в $G - x$, то x – точка сочленения в графе $G - y$ и выполнено условие 1° леммы 3 для вершин y и x, противоречие. Значит, ребро yz – не мост в $G - x$.

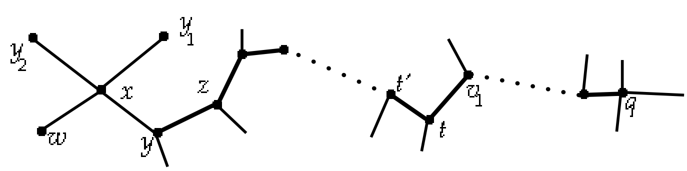

Рис. 3. Редукция $R6.1$, путь P.

В начале построения мы рассмотрим путь P', содержащий единственное ребро yz. Отметим, что граф $G - yz - x$ связен и $d_G(z) \geqslant 3$.

Пусть в некоторый момент построен путь P' от y до t, причём граф $G - E(P') - x$ связен, $d_G(t) \geqslant 3$ и $t \neq w$ (в начале построения $t = z$ и все эти условия выполнены). Понятно, что $t \in S(G)$ (то есть, $d_G(t) = 3$) и $t \notin \{y_1, y_2\}$, иначе путь $P = P'$ нам подходит.

Пусть $\mathrm{N}_G(t) = \{t', v_1, v_2\}$, где t' – предыдущая вершина пути P'. Тогда $d_G(t') = 3$. Попробуем продлить путь P' на одно ребро.

Не умаляя общности можно считать, что $v_1 \neq w$. Очевидно, $v_1 \neq x$. Пусть tv_1 – мост графа $G - E(P') - x$. Тогда t – точка сочленения графа $G - E(P') - x - t'$ (который, очевидно, связен, так как получен из связного графа $G - E(P') - x$ удалением висячей вершины t'). Тогда

$$u(G) \geqslant u(G - E(P')) \geqslant u(G - E(P') - x - t') + 2$$

(в остовное дерево графа $G - E(P') - x - t'$ добавим две новые висячие вершины: x присоединим к точке сочленения w, а t' – к точке сочленения t).

Оценим $c(G) - c(G - E(P') - x - t')$. Удалены вершины x и t' суммарной стоимостью $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. Так как цена вершин степени 1 и 3 одинакова, то цена отличных от t' и t вершин пути P' не изменилась. Тогда в результате удаления $E(P')$, x и t из графа G' цена могла измениться лишь у трех вершин из $\mathrm{N}_G(x) \setminus \{y\}$ и двух вершин из $\mathrm{N}_G(t')$, что дает нам максимум $\frac{5}{4}$. Значит,

$$c(G - E(P') - x - t') \geqslant c(G) - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{5}{4} > c(G) - 2$$

и по индукционному предположению мы имеем

$$u(G) \geqslant u(G - E(P') - x - t') + 2 \geqslant c(G - E(P') - x - t') + 2 + \frac{3}{2} > c(G) + \frac{3}{2}.$$

В этом случае теорема доказана.

Остается случай, когда tv_1 – не мост графа $G - E(P') - x$. Тогда $d_{G-E(P')}(v_1) \geqslant 2$, следовательно, $v_1 \notin V(P')$ и $d_G(v_1) \geqslant 3$. Мы продлим путь P' на ребро tv_1 и продолжим рассуждения с новым путём и его концом v_1. Рано или поздно процесс ввиду конечности графа закончится и мы получим искомый путь P.

Теперь рассмотрим граф $G - E(P) - x$. Аналогично доказанному выше, $u(G) \geqslant u(G - E(P) - x) + 1$ и нам остается лишь оценить $c(G) - c(G - E(P) - x)$. Мы удалили вершину x ценой $\frac{1}{3}$. При $q \notin \{y_1, y_2\}$ мы уменьшили цену трех отличных от y вершин из $\mathrm{N}_G(x)$ (максимум на $2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$, так как $w \notin S(G)$) и вершины q (на $\frac{1}{12}$). При $q \in \{y_1, y_2\}$ мы уменьшили цену только двух отличных от y, q вершин из $\mathrm{N}_G(x)$, максимум на $\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$. В обоих случаях получаем

$$c(G) - c(G - E(P) - x) \leqslant 1$$

и

$$u(G) \geqslant u(G - E(P) - x) + 1 \geqslant c(G - E(P) - x) + 1 + \frac{3}{2} \geqslant c(G) + \frac{3}{2}.$$

R6.2. *Выполнено одно из двух условий:*
– $d_G(x) = 4$ *и* $d_G(w) = 3$;
– $d_G(x) > 4$.

Как и в пункте $R5$, мы рассмотрим граф $G' = G\cdot xw$ и полученную при стягивании x и w вершину $x' \in V(G')$ (см. рисунок 2). Понятно, что x' – точка сочленения графа G', она отделяет от остальных вершин висячую вершину. Легко видеть, что $d_{G'}(x') \geqslant d_G(x) \geqslant 4$: вершина x' смежна в графе G' со всеми вершинами из $\mathrm{N}_G(x)$, кроме w и, кроме того, смежна с висячей вершиной из $\mathrm{N}_G(w)$.

Замечание 8. 1) При стягивании ребра xw уменьшаются, причем ровно на 1, лишь степени вершин, входящих в треугольник с w и x, а такие вершины принадлежат X (в силу леммы 4) и имеют степень не менее 4 (иначе выполняется условие 2° леммы 3).

2) Поэтому, из $d_G(a) = 3$ и $a \neq w$ следует, что $d_{G'}(a) = 3$.

Если $d_G(w) = 3$, то $c(G') \geqslant c(G) - \frac{1}{3}$, как доказано в пункте $R5$.

Пусть $d_G(x) > 4$, тогда степень каждой вершины из X не менее 5. По замечанию 8, при стягивании ребра xw могут уменьшиться, причем ровно на 1, лишь степени вершин из множества X. В нашем случае степень таких вершин в графе G не менее 5, поэтому цена любой такой вершины в G и G' одна и та же. Таким образом, в этом случае $c(G) - c(G') = c_G(w) \leqslant \frac{1}{3}$.

Напомним, что y – такая смежная с x вершина графа G, что $y \notin W$, $\mathrm{N}_G(y) = \{x, z, z'\}$ и $d_G(z) = d_G(z') = 3$ (см. начало пункта $R6$). Отметим, что $\mathrm{N}_{G'}(y) = \{x', z, z'\}$.

Мы будем строить в графе G' простой путь P от вершины z до некоторой вершины q (где $q \notin S(G') \cup \mathrm{N}_G(y)$ или $q = z'$), все внутренние вершины которого лежат в $S(G')$ и не лежат в $\mathrm{N}_{G'}(x')$ и граф $G' - E(P) - y$ связен.

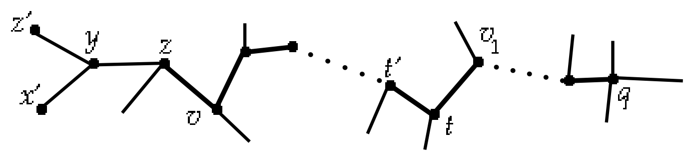

Рис. 4. Редукция $R6.2$: граф G' и путь P.

Пусть $v \in \mathrm{N}_{G'}(z)$, $v \notin \{y, x'\}$. Если ребро zv – мост в $G' - y$, то z – точка сочленения в $G' - y$. По замечанию 7, тогда z – точка сочленения в $G - y$, то есть, вершины y и z удовлетворяют условию 1° леммы 3, противоречие. Значит, ребро zv – не мост в $G' - y$.

В начале построения мы рассмотрим путь P', содержащий единственное ребро zv. Отметим, что граф $G' - E(P') - y$ связен и $d_{G'}(v) \geqslant 3$.

Пусть в некоторый момент построен простой путь P' от z до t, причём граф $G' - E(P') - y$ связен, $t \neq x'$ и $d_{G'}(t) \geqslant 3$ (в начале построения $t = v$ и все эти условия выполнены). Понятно, что $t \neq z'$ и $t \in S(G')$, иначе путь $P = P'$ нам подходит. Следовательно, $d_{G'}(t) = 3$.

Попробуем продлить путь P' на одно ребро. Пусть $\mathrm{N}_{G'}(t) = \{t', v_1, v_2\}$, где t' – предшествующая t вершина пути P' и $v_1 \neq x'$. Тогда $d_{G'}(t') = 3$.

Пусть tv_1 – мост графа $G' - E(P') - y$. Тогда t – точка сочленения связного графа $G' - E(P') - y - t'$ (этот граф связен, так как получен из связного графа $G' - E(P') - y$ удалением висячей вершины t'). Аналогично пункту 6.1 мы получим, что

$$u(G) \geqslant u(G') \geqslant u(G' - E(P')) \geqslant u(G' - E(P') - y - t') + 2.$$

Оценим $c(G) - c(G' - E(P') - y - t')$. Как мы знаем, $c(G) - c(G') \leqslant \frac{1}{3}$. Из графа G' удалены вершины y и t' суммарной стоимостью $\frac{1}{2}$. При удалении из G' вершин y и t' цена могла измениться у двух соседей y и двух соседей t' (степени соседей y и t', лежащих между ними на пути P', изменились с 3 на 1, что не меняет цену вершины). Это дает нам максимум $4 \cdot \frac{1}{4}$. Значит,

$$c(G' - E(P') - y - t') \geqslant c(G') - \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4} \geqslant c(G) - \frac{11}{6}$$

и по индукционному предположению имеем

$$u(G) \geqslant u(G' - E(P') - y - t') + 2 \geqslant c(G' - E(P') - y - t') + 2 + \frac{3}{2} > c(G) + \frac{3}{2}.$$

В этом случае теорема доказана.

Остается случай, когда tv_1 – не мост графа $G' - E(P') - y$. Тогда $d_{G' - E(P')}(v_1) \geqslant 2$, поэтому $v_1 \notin V(P')$ и $d_{G'}(v_1) \geqslant 3$. Мы продлим путь P' на ребро tv_1 и продолжим рассуждения с новым путём и его концом v_1. Рано или поздно процесс ввиду конечности графа закончится и мы получим искомый путь P.

Теперь рассмотрим граф $G' - E(P) - y$. Аналогично доказанному выше, $u(G) \geqslant u(G') \geqslant u(G' - E(P) - y) + 1$ и нам остается доказать,

что
$$c(G' - E(P) - y) \geqslant c(G') - \frac{2}{3} \geqslant c(G) - 1.$$
На этот раз мы удалили из G' вершину y ценой $\frac{1}{4}$. При $q \neq z'$ мы уменьшили цену двух отличных от z вершин из $\mathrm{N}_{G'}(y)$ (максимум на $\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$, так как $x' \notin S(G')$) и вершины q (на $\frac{1}{12}$). При $q = z'$ мы уменьшили только цену вершины x', причем не более, чем на $\frac{1}{12}$. В обоих случаях получаем $c(G') - c(G' - E(P) - x) \leqslant \frac{2}{3}$, что и требовалось доказать.

Лемма 5. *Если в связном графе G более двух вершин, есть висячие вершины и невозможно выполнить ни один из пунктов $R1 - R6$, то граф удовлетворяет следующим условиям.*

1° *Вершины множества X попарно несмежны и имеют степень хотя бы 7.*

2° *Вершины множества W попарно несмежны и имеют степень не более 4.*

3° *Каждая висячая вершина графа G смежна с вершиной множества W. Каждая вершина множества W смежна ровно с одной висячей вершиной графа G.*

Доказательство. Так как в графе хотя бы две вершины, то никакие две его висячие вершины не смежны. Значит, каждая висячая вершина смежна с вершиной из W.

Так как невозможно выполнить $R6$, все вершины множества X имеют степень хотя бы 7 и, следовательно, попарно несмежны. По лемме 4 вершины множества W попарно несмежны и, как мы знаем, они имеют степень хотя бы 3. Значит, каждая вершина множества W смежна с множеством X. Так как степени всех вершин из X хотя бы 7 и невозможно выполнить $R3$, то степени вершин множества W не превосходят 4. □

2.2. Метод мёртвых вершин. Пусть невозможно применить ни одно из правил редукции $R1 - R6$. В этом случае мы построим искомое остовное дерево в графе G с помощью *метода мёртвых вершин* (см. [2, 3, 13]).

Наша модификация будет отличаться от стандартного метода: мы начнем построение с леса (не обязательно дерева). Мы будем последовательно, по шагам добавлять к нему вершины и уменьшать количество компонент связности.

Для произвольного графа H мы будем обозначать через $k(H)$ количество компонент связности этого графа.

Пусть после нескольких шагов построения мы получили лес F (естественно, $V(F) \subset V(G)$, $E(F) \subset E(G)$). Все рёбра леса F останутся в нашем лесе на последующих этапах построения и войдут в итоговое остовное дерево.

Определение 4. *Висячую вершину x леса F назовем мертвой, если все вершины графа G, смежные с x, входят в лес F, причём в ту же компоненту связности, что и x.*

Для леса F через $b(F)$ обозначим количество его мёртвых вершин.

Замечание 9. Нетрудно заметить, что мертвые вершины останутся мертвыми висячими вершинами на всех последующих этапах построения. По окончании построения, когда будет построено остовное дерево, все его висячие вершины станут мёртвыми.

Для леса F мы определим

$$\alpha(F) = \frac{5}{6}u(F) + \frac{1}{6}b(F) - c_G(F) - 2(k(F) - 1). \qquad (1)$$

Введем обозначения $T = T(G)$ и $S = S(G)$. В нашем случае $V(G) = S \cup T$.

2.2.1. Начало построения.

Отдельно опишем начало построения. На этом этапе мы построим в графе G лес F^* с достаточно большим $\alpha(F^*)$, содержащий все висячие вершины графа G. Рассмотрим два случая.

B1. *В графе G нет висячих вершин.*
В этом случае мы будем считать, что в графе есть вершина a с $d_G(a) \geqslant 4$, иначе наша теорема следует из результата работы [2]. Мы начнём построение с базового дерева F^*, в котором a соединена с 4 вершинами из её окрестности. Тогда $\alpha(F^*) \geqslant \frac{5}{6} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$.

B2. *В графе G есть висячие вершины, то есть $U \neq \varnothing$.*
В этом случае выполняется утверждение леммы 5.

Пусть $Y \subset V(G)$ – множество всех вершин, смежных с X и не вошедших в W. Рассмотрим граф G^* на вершинах $W \cup X \cup U \cup Y$, все рёбра которого – это рёбра графа G, инцидентные W или X. Из леммы 5 понятно, что G^* – двудольный граф с долями $W \cup Y$ и $X \cup U$.

Пусть G' – компонента связности графа G^*. Мы построим в G' остовное дерево F' с $\alpha(F') \geqslant 2$. Для начала рассмотрим подграф $G'' =$

$G' - Y$, пусть в этом подграфе k компонент связности. Различные компоненты связности графа G'' соединяются друг с другом через вершины множества Y (см. рисунок 5).

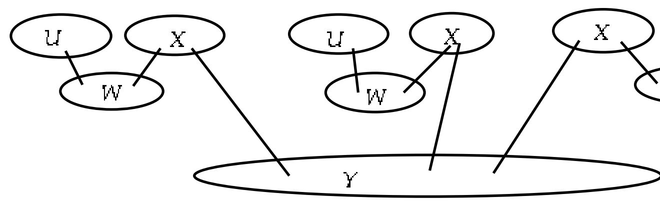

Рис. 5. База $B2$, граф G'.

Пусть $W' = W \cap V(G')$, $X' = X \cap V(G')$, $Y' = Y \cap V(G')$, $U' = U \cap V(G')$, $x = |X'|$. Каждая вершина множества X' смежна хотя бы с 7 вершинами из $W' \cup Y'$. Каждая вершина множества W' смежна ровно с одной вершиной из U и, следовательно, с 2 или 3 вершинами из X'. Обозначим через W'_2 и W'_3 множества вершин из W', смежных с 2 и 3 вершинами из X' соответственно. Понятно, что $W'_2 \subset S$ и $W'_3 \subset T$.

Каждая вершина множества Y' смежна с вершинами множества X', имеющими степень хотя бы 7. Так как нельзя выполнить $R3$, вершины из Y' имеют степень не более 4, то есть, каждая из них смежна не более, чем с 4 вершинами из X'. Обозначим через Y'_4 множество всех вершин из Y', смежных с 4 вершинами из X', пусть $Y'_3 = Y' \setminus Y'_4$. Введём обозначения $w_2 = |W'_2|$, $w_3 = |W'_3|$, $y_3 = |Y'_3|$, $y_4 = |Y'_4|$. Тогда

$$|U'| = w_2 + w_3, \quad x \leqslant \frac{2w_2 + 3w_3 + 3y_3 + 4y_4}{7}. \tag{2}$$

Выделим в графе G' остовный лес F', подвесив к $W' \cup X'$ вершины из $Y' \cup U'$ (эти вершины будут висячими, их количество равно $w_2 + w_3 + y_3 + y_4$). Нетрудно понять, что в таком лесу k компонент связности (столько же, сколько в графе $G'' = G' - Y$). Построим остовное дерево T' графа G', связав эти k компонент связности в одну, для чего проведём $k-1$ новое ребро между Y' и X'. В результате количество висячих вершин из $Y' \cup U'$ уменьшится не более, чем на $k-1$ и получится

$$u(T') \geqslant w_2 + w_3 + y_3 + y_4 - k + 1.$$

Оценим $\alpha(T')$. Стоимость

$$c_G(T') \leqslant \frac{1}{4}\cdot(2w_2+w_3)+\frac{1}{3}\cdot(w_3+x+y_3+y_4).$$

Все вершины из U', очевидно, являются мёртвыми вершинами дерева T'. Поскольку каждая вершина из Y имеет степень не более 4, то те вершины из Y_4', которые являются висячими вершинами в дереве T' – мёртвые вершины этого дерева. Таким образом, меньше всего мёртвых вершин у дерева T' в случае, когда все висячие вершины леса F', пропавшие при склейке компонент связности, лежали в Y_4' и мы имеем

$$b(T') \geqslant |U'|+y_4-k+1 = w_2+w_3+y_4-k+1.$$

Учитывая полученные выше неравенства, получаем

$$\begin{aligned}\alpha(T') &\geqslant w_2+w_3+y_4+\frac{5}{6}y_3-c_G(T')-k+1\\ &\geqslant w_2\cdot\frac{1}{2}+w_3\cdot\frac{5}{12}+y_3\cdot\frac{1}{2}+y_4\cdot\frac{2}{3}-x\cdot\frac{1}{3}-k+1. \qquad (3)\end{aligned}$$

Далее нам нужно оценить k. Рассмотрим компоненту связности G_0 графа G''. В G_0 есть вершина $v\in W_2'\cup W_3'$. Если $v\in W_2'$, то в G_0 хотя бы две вершины из X', а если $v\in W_3'$ – то хотя бы три вершины из X'. Таким образом,

$$2k\leqslant x. \qquad (4)$$

Пусть k_2 – количество компонент связности графа G'', содержащих по две вершины из X'. В каждой такой компоненте связности обязательно есть вершина из W_2', поэтому $k_2\leqslant w_2$. Тогда,

$$x\geqslant 3(k-k_2)+2k_2 = 3k-k_2\geqslant 3k-w_2,$$

что мы перепишем в виде

$$3k\leqslant x+w_2. \qquad (5)$$

Сложив умноженное на $\frac{3}{2}$ неравенство (4) и неравенство (5) и сократив на 6, получим

$$k\leqslant\frac{5}{12}x+\frac{1}{6}w_2. \qquad (6)$$

Отметим, что $X'\neq\varnothing$, а каждая вершина из X' смежна хотя бы с 7 вершинами из $W'\cup Y'$. Поэтому

$$w_2+w_3+y_3+y_4\geqslant 7. \qquad (7)$$

Теперь рассмотрим несколько случаев.

B2.1. $W_3' = \varnothing$.
Вернёмся к неравенству (3). С учетом $w_3 = 0$ и неравенства (4) получаем

$$\alpha(T') \geqslant w_2 \cdot \frac{1}{2} + y_3 \cdot \frac{1}{2} + y_4 \cdot \frac{2}{3} - x \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + 1.$$

Подставив оценку на x из (2) и учитывая (7), получим

$$\alpha(T') \geqslant w_2 \cdot \frac{11}{42} + y_3 \cdot \frac{1}{7} + y_4 \cdot \frac{4}{21} + 1 \geqslant (w_2 + y_3 + y_4) \cdot \frac{1}{7} + 1 \geqslant 2,$$

что и требовалось доказать.

B2.2. $W_2' = \varnothing$, $k = 1$.
Тогда из неравенства (3), $w_2 = 0$ и $k = 1$ получаем

$$\alpha(T') \geqslant w_3 \cdot \frac{5}{12} + y_3 \cdot \frac{1}{2} + y_4 \cdot \frac{2}{3} - x \cdot \frac{1}{3}.$$

Подставив оценку на x из (2), получим

$$\alpha(T') \geqslant w_3 \cdot \frac{23}{84} + y_3 \cdot \frac{5}{14} + y_4 \cdot \frac{10}{21} \geqslant w_3 \cdot \frac{23}{84} + (y_3 + y_4) \cdot \frac{5}{14}.$$

Если $y_3 = y_4 = 0$, то все висячие вершины дерева T' – мёртвые, то есть, $G = G'$. В этом случае из (7) имеем $w_3 \geqslant 7$ и

$$u(G) \geqslant u(T') \geqslant c(G) + \frac{23}{12},$$

теорема полностью доказана. Если же $y_3 + y_4 \geqslant 1$, то мы имеем

$$\alpha(T') \geqslant 6 \cdot \frac{23}{84} + \frac{5}{14} = 2,$$

что нас устраивает.

B2.3. $k \geqslant 2$.
В оставшимся случае можно считать $w_3 \neq 0$, иначе можно воспользоваться пунктом $B2.1$. В графе G'' хотя бы две компоненты связности. Среди них есть компонента, которая содержит вершины из W_3', в ней хотя бы 3 вершины из X'. В другой компоненте связности не менее, чем 2 вершины из X'. Таким образом, $x \geqslant 5$. Воспользуемся неравенством (3) и оценкой на k из (6):

$$\alpha(T') \geqslant w_2 \cdot \frac{1}{2} + w_3 \cdot \frac{5}{12} + y_3 \cdot \frac{1}{2} + y_4 \cdot \frac{2}{3} - x \cdot \frac{3}{4} - w_2 \cdot \frac{1}{6} + 1.$$

Воспользовавшись два раза оценкой на x из (2) и тем, что $x \geqslant 5$, получим

$$\alpha(T') \geqslant w_2 \cdot \frac{5}{42} + w_3 \cdot \frac{2}{21} + y_3 \cdot \frac{5}{28} + y_4 \cdot \frac{5}{21} + 1 \geqslant x \cdot \frac{2}{9} + 1 > 2.$$

Действуя таким образом, мы выделим в графе G^* остовный лес F^*, в котором каждая компонента связности F' имеет $\alpha(F') \geqslant 2$. Следовательно, $\alpha(F^*) \geqslant 2$. Отметим, что в этот лес вошли все висячие вершины графа G.

2.2.2. Шаг построения.

Опишем шаг алгоритма построения остовного дерева (назовём этот шаг A). Пусть перед шагом A мы имеем лес F – подграф графа G. (Перед первым шагом мы имеем лес $F = F^*$, построенный выше.)

Через Δu и Δb мы будем обозначать прирост количества висячих вершин и количества мертвых висячих вершин в лесе F на шаге A, через Δt и Δs — количество добавленных на этом шаге в лес F вершин из T и из S соответственно.

Пусть F_1 – лес, полученный после шага A. Введем обозначение $\Delta k = k(F) - k(F_1)$.

Назовём *доходом* шага A величину

$$p(A) = \frac{5}{6}\Delta u + \frac{1}{6}\Delta b + 2\Delta k - \frac{1}{3}\Delta t - \frac{1}{4}\Delta s.$$

Мы будем выполнять только шаги, для которых доход неотрицателен. Из формулы (1) нетрудно понять, что $\alpha(F_1) = \alpha(F) + p(A)$.

Опишем все возможные виды шагов. Для удобства мы в описании шага будем обозначать множество вершин, не вошедших в лес F, через Z. Вершины множества Z, смежные хотя бы с одной из вершин $V(F)$, назовем *вершинами уровня* 1. Для каждой вершины $x \in Z$ через $P(x)$ обозначим множество всех вершин из $V(F)$, смежных с x.

Замечание 10. 1) Отметим, что все не вошедшие в F вершины принадлежат $S \cup T$ и имеют степень не менее 3.

2) При оценке дохода шага мы будем считать, что все добавленные вершины, про которые не известна их принадлежность множеству S, принадлежат множеству T. Если какая-то добавленная вершина принадлежит S, то доход шага увеличится на $\frac{1}{12}$.

Далее мы представим несколько вариантов выполнения шага алгоритма. Мы будем пытаться выполнить очередной вариант шага алгоритма, только в случае, когда невозможно выполнить ни один из предыдущих. Дополнительно об этом упоминать в описании шагов мы не будем.

S1. *Существует ребро xy, концы которого – вершины разных компонент связности леса F.*
Добавим в F ребро xy, тем самым уменьшив количество компонент связности на 1. Таким образом, $\Delta k \geqslant 1$ и $\Delta u \geqslant -2$. Получаем

$$p(S1) \geqslant -2 \cdot \frac{5}{6} + 2 \geqslant \frac{1}{3}.$$

S2. *В F есть невисячая вершина x, смежная с вершиной $y \in Z$.*
Присоединим y к x. В этом случае $\Delta u = 1$, $c_G(y) \leqslant \frac{1}{3}$ и

$$p(S2) \geqslant \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Замечание 11. Далее мы будем считать, что не входящие в лес F рёбра не могут выходить из невисячих вершин F и не могут соединять разные компоненты связности леса F.

S3. *Существует вершина $x \in V(F)$, смежная с двумя вершинами из Z.*
Добавим эти две вершины в дерево, присоединив их к вершине x. Тогда $\Delta u = 1$, стоимость двух добавленных вершин не более $\frac{2}{3}$ и

$$p(S3) \geqslant \frac{5}{6} - \frac{2}{3} \geqslant \frac{1}{6}.$$

S4. *Существует вершина $x \in Z$, смежная с вершинами хотя бы двух компонент связности леса F.*
Тогда соединим эти две компоненты через x, проведя от каждой из них по одному ребру к x. Получим $\Delta u = -2$, $\Delta k = 1$ и, поскольку $c_G(x) \leqslant \frac{1}{3}$, то

$$p(S4) \geqslant -2 \cdot \frac{5}{6} + 2 - \frac{1}{3} \geqslant 0.$$

S5. *Существует вершина $x \in Z$, смежная с $m \geqslant 3$ вершинами из $V(F)$.*
Так как невозможно выполнить $S4$, вершина x смежна с тремя вершинами одной компоненты связности леса F. Присоединим x к одной из этих вершин, две другие станут мёртвыми. Тогда $\Delta u = \Delta k = 0$, $\Delta b \geqslant 2$ и, так как $c_G(x) \leqslant \frac{1}{3}$, мы получаем

$$p(S5) \geqslant 2 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = 0.$$

Замечание 12. Далее мы считаем, что каждая висячая вершина леса F смежна ровно с одной вершиной из Z и не смежна с другими компонентами связности леса F. Каждая вершина уровня 1 смежна не более, чем с двумя вершинами из $V(F)$ и, если таких вершин две, то они принадлежат одной компоненте связности леса F.

S6. *Существует вершина $x \in T$ уровня 1.*
По замечанию 12 вершина x смежна не более, чем с двумя вершинами из $V(F)$. Рассмотрим два случая.

S6.1. *Вершина x смежна с одной вершиной из $V(F)$.*
Тогда x смежна с тремя вершинами, не вошедшими в F, добавим x и эти три вершины в F. Получим $\Delta u = 2$, стоимость четырёх добавленных вершин не более $4 \cdot \frac{1}{3}$, поэтому

$$p(S6.1) \geqslant 2 \cdot \frac{5}{6} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

S6.2. *Вершина x смежна с двумя вершинами из $V(F)$.*
Тогда x смежна с двумя вершинами $y_1, y_2 \in Z$, добавим x, y_1, y_2 в лес F и получим $\Delta u = 1$. Две смежные с x вершины из $V(F)$ принадлежат одной компоненте связности, поэтому $\Delta b \geqslant 1$. Стоимость трёх добавленных в F вершин не более $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ и мы имеем

$$p(S6.2) \geqslant \frac{5}{6} + \frac{1}{6} - 1 = 0.$$

S7. *Существует вершина $x \in S$ уровня 1, смежная с одной вершиной из $V(F)$.*
Тогда x смежна с двумя не вошедшими в F вершинами y_1, y_2, добавим x, y_1, y_2 в лес F и получим $\Delta u = 1$. Разберём несколько случаев.

S7.1. $y_1, y_2 \in S$.
Тогда стоимость трёх добавленных вершин не более $3 \cdot \frac{1}{4}$ и в результате

$$p(S7.1) \geqslant \frac{5}{6} - 3 \cdot \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{12},$$

что нас устраивает.

S7.2. $y_1 \in T$.
Тогда стоимость трёх добавленных в F вершин не более $\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{12}$.

Пусть F_1 – компонента связности леса F, с которой смежна вершина x. Добавим в дерево F_1 вершины x, y_1, y_2, в результате получим

$$p(S7.2) \geqslant \frac{5}{6} - \frac{11}{12} = -\frac{1}{12},$$

что нам не подходит. Разберём несколько случаев, с чем может быть смежна вершина y_1 и в каждом из них продолжим шаг до тех пор, пока доход не станет неотрицательным.

S7.2.1. *Вершина y_1 смежна с $z \in V(F_1)$.*
Тогда z в результате сделанного шага стала мёртвой вершиной (см. рисунок 6a), то есть $\Delta b \geqslant 1$ и мы имеем

$$p(S7.2.1) \geqslant p(S7.2) + \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

S7.2.2. *Вершина y_1 смежна с $z \in V(F) \setminus V(F_1)$.*
Тогда добавим в F ребро zy_1, соединив две различные компоненты связности леса F в одну, фактически выполнив шаг $S1$ (см. рисунок 6b). В результате

$$p(S7.2.2) \geqslant p(S7.2) + p(S1) \geqslant \frac{1}{4}.$$

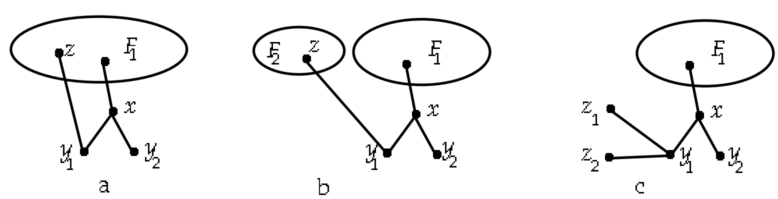

Рис. 6. Шаг $S7.2$.

S7.2.3. *Вершина y_1 несмежна с $V(F)$.*
Так как $d_G(y_1) \geqslant 4$, вершина y_1 смежна хотя бы с двумя еще не добавленными в F вершинами z_1, z_2. Добавим их в F, фактически выполнив шаг $S3$ (см. рисунок 6c) и получим

$$p(S7.2.3) \geqslant p(S7.2) + p(S3) \geqslant \frac{1}{12}.$$

S8. *Существует вершина $x \in S$ уровня 1, смежная с двумя вершинами из $V(F)$.*
Обе вершины из $P(x)$, как отмечалось ранее, лежат в одной компоненте связности F_1 леса F. Добавим x в дерево F_1, в результате одна из вершин $P(x)$ станет мёртвой. Пока что мы имеем $\Delta s = 1$, $\Delta b = 1$.

Вершина x смежна ровно с одной вершиной из Z, пусть это вершина y. Добавим y в лес. Получается

$$p(S8) \geqslant \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - c_G(y) \geqslant -\frac{1}{12} - c_G(y).$$

Разберём несколько случаев, с чем может быть смежна вершина y и в каждом из них продолжим шаг до тех пор, пока доход не станет неотрицательным.

S8.1. *Вершина y смежна с $V(F)$.*
Поскольку невозможно выполнить шаги $S1-S7$ с вершиной y, то $y \in S$ и y смежна с двумя вершинами одной компоненты связности F_2 леса F. Учитывая данные о вершине y, мы получим $c_G(y) = \frac{1}{4}$ и

$$p(S8) \geqslant -\frac{1}{3}.$$

Рассмотрим два случая.

S8.1.1. $F_2 = F_1$.
Тогда обе вершины из $P(y)$ и сама вершина y стали мёртвыми (см. рисунок 7a) и мы имеем

$$p(S8.1.1) \geqslant p(S8) + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

S8.1.2. $F_2 \neq F_1$.
Тогда соединим эти две компоненты связности, добавив ребро между y и одной из вершин $P(y)$, фактически выполнив шаг $S1$ (см. рисунок 7b). Получим

$$p(S8.1.2) \geqslant p(S8) + p(S1) \geqslant 0.$$

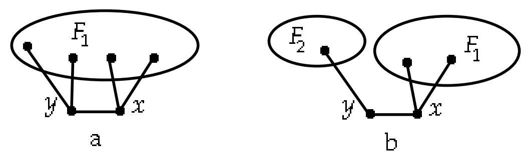

Рис. 7. Шаг $S8.1$.

S8.2. *Вершина y несмежна с $V(F)$.*
Тогда все смежные с y вершины, кроме x, еще не вошли в F. Разберём два случая.

S8.2.1. $y \in T$.
Тогда мы можем добавить в дерево F_1 три смежные с y вершины, фактически выполнив шаг $S3$ и шаг $S2$ (см. рисунок 8a). Учитывая, что $c_G(y) = \frac{1}{3}$, получим $p(S8) \geqslant -\frac{5}{12}$ и

$$p(S8.2.1) \geqslant p(S8) + p(S3) + p(S2) \geqslant \frac{1}{4}.$$

S8.2.2. $y \in S$.
В этом случае мы можем добавить в дерево F_1 только две смежные с y вершины z_1, z_2. Добавим их в дерево F_1, в результате выполнив шаг $S3$ (см. рис. 8b). Учитывая, что $c_G(y) = \frac{1}{4}$, получим $p(S8) \geqslant -\frac{1}{3}$ и

$$p(S8.2.2) \geqslant p(S8) + p(S3) \geqslant -\frac{1}{6}.$$

Продолжим рассматривать варианты.

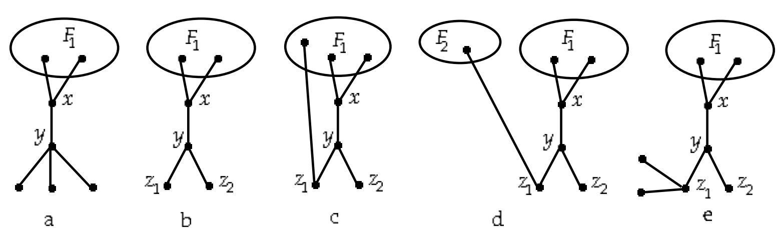

Рис. 8. Шаг $S8.2$.

S8.2.2.1. $z_1, z_2 \in S$
Тогда две добавленные в последнюю очередь вершины стоят $2 \cdot \frac{1}{4}$, а не $2 \cdot \frac{1}{3}$, как было посчитано выше и

$$p(S8.2.2.1) \geqslant p(S8.2.2) + \frac{1}{6} \geqslant 0,$$

что нас устраивает.

S8.2.2.2. *Вершина $z_1 \in T$ смежна с лесом F.*
Если z_1 смежна с деревом F_1 (см. рисунок 8c), то к параметрам шага $S8.2.2$ добавляется еще одна мёртвая вершина и

$$p(S8.2.2.2) \geqslant p(S8.2.2) + \frac{1}{6} \geqslant 0.$$

Пусть z_1 смежна с деревом $F_2 \neq F_1$. Тогда проведём ребро, соединяющее F_2 с z_1 (см. рисунок 8d), уменьшив число компонент связности леса F и фактически выполнив шаг $S1$. Получим

$$p(S8.2.2.2) \geqslant p(S8.2.2) + p(S1) \geqslant \frac{1}{6}.$$

S8.2.2.3. *Вершина $z_1 \in T$ несмежна с лесом F.*
Так как $d_G(z_1) \geqslant 4$, вершина z_1 смежна хотя бы с двумя еще не добавленными в F вершинами. Добавим их в F (см. рисунок 8e), фактически выполнив шаг $S3$ и получим

$$p(S8.2.2.3) \geqslant p(S8.2.2) + p(S3) \geqslant 0.$$

Следующая лемма завершает доказательство теоремы 1.

Лемма 6. *Предположим, что невозможно выполнить ни один из описанных выше шагов. Тогда F – остовное дерево, причём $u(F) \geqslant c(G) + \frac{5}{3}$.*

Доказательство. Предположим, что не все вершины графа G вошли в F. Тогда существует не вошедшая в F вершина, смежная с F. По построению, ее степень хотя бы 3, а значит, можно выполнить один из шагов, противоречие. Значит, F – остовный лес графа G.

Предположим, что граф F несвязен. Тогда какие-то две его компоненты связности должны быть соединены ребром в графе G и можно выполнить шаг $S1$. Значит, F связен, то есть, это остовное дерево. Тогда все висячие вершины дерева F – мёртвые, в дереве F ровно одна компонента связности и

$$u(F) = \frac{5}{6}u(F) + \frac{1}{6}b(F) \geqslant c_G(F) + \frac{5}{3} = c(G) + \frac{5}{3}. \qquad \square$$

§3. Экстремальные примеры.

Следующая лемма поможет нам склеивать большие экстремальные примеры к оценке из теоремы 1 из маленьких. Главное требование к объектам склейки – наличие висячих вершин. Идейно лемма 7 повторяет доказанное в [11], только с другой ценовой функцией $c(G)$. Доказательство пройдёт для любой ценовой функции, в которой висячие вершины учитываются с коэффициентом $\frac{1}{4}$. Эту лемму можно воспринимать как второй пункт леммы 1.

Лемма 7. *Пусть G_1 и G_2 – связные графы с $v(G_1) > 2$, $v(G_2) > 2$, $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$ и висячими вершинами x_1 и x_2. Пусть G – граф, полученный из G_1 и G_2 склеиванием по вершинам x_1 и x_2 (пусть в результате из x_1 и x_2 получилась вершина x) и последующим стягиванием одного инцидентного x моста. Пусть $u(G_1) = c(G_1) + \frac{3}{2}$ и $u(G_2) = c(G_2) + \frac{3}{2}$. Тогда $u(G) = c(G) + \frac{3}{2}$.*

Доказательство. Отметим, что $v(G) = v(G_1) + v(G_2) - 2$. Действительно, две вершины x_1 и x_2 мы склеили в одну вершину x, после чего стягивание одного ребра уменьшило число вершин еще на одну (в результате стягивания исчезла вершина x степени 2). Таким образом, все вершины графа G – это все отличные от x_1 и x_2 вершины графов G_1 и G_2, причем ровно с такими же степенями, как в G_1 и G_2. Как мы знаем, вершины $x_1 \in V(G_1)$ и $x_2 \in V(G_2)$ не принадлежат $V(G)$ и $c_{G_1}(x_1) = c_{G_2}(x_2) = \frac{1}{4}$, следовательно, $c(G) = c(G_1) + c(G_2) - 2 \cdot \frac{1}{4}$.

Воспользуемся леммой 1 и напишем цепочку равенств:

$$u(G) = u(G_1) + u(G_2) - 2 = c(G_1) + c(G_2) + 1 = c(G) + \frac{3}{2}. \qquad \square$$

Остается привести экстремальный пример к теореме 1, в котором хотя бы две висячих вершины и есть вершины степени не менее 4, чтобы оценка из теоремы была осмысленной.

Такой граф мы видим на рисунке 9a. В этом графе G по 3 вершины степеней 1, 3 и 4, а значит,

$$t = 3, \quad s = 6, \quad \text{и} \quad c(G) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2}.$$

Нетрудно понять, что $u(G) = 4$ (в остовном дереве могут быть висячими вершинами 3 висячих вершины графа G и не более, чем одна из вершин степени 4). Таким образом, $u(G) = 4 = c(G) + \frac{3}{2}$. Тогда по лемме 7 мы можем склеить из таких графов сколь угодно длинные цепочки (см. рисунок 9b) и на этих графах будет достигаться оценка на количество висячих вершин в остовном дереве из теоремы 1.

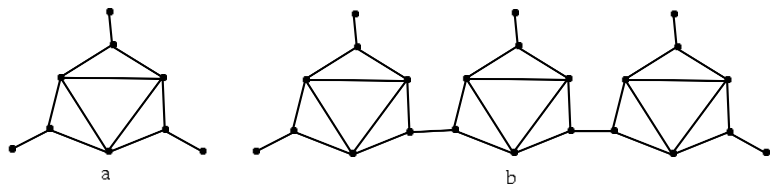

Рис. 9. Экстремальные примеры.

Литература

1. J. A. Storer, *Constructing full spanning trees for cubic graphs.* — Inform. Process. Lett. **13** (1981), No. 1, 8–11.
2. D. J. Kleitman, D. B. West, *Spanning trees with many leaves.* — SIAM J. Discrete Math. **4** (1991), No. 1, 99–106.
3. J. R. Griggs, M. Wu, *Spanning trees in graphs of minimum degree* 4 *or* 5. — Discrete Math. **104** (1992), 167–183.
4. N. Alon, *Transversal numbers of uniform hypergraphs.* – Graphs Combinator. **6** (1990), 1–4.
5. G. Ding, T. Johnson, P. Seymour, *Spanning trees with many leaves.* — J. Graph Theory **37** (2001), No. 4, 189–197.
6. Y. Caro, D. B. West, R. Yuster, *Connected domination and spanning trees with many leaves.* — SIAM J. Discrete Math. **13** (2000), No. 2, 202–211.
7. P. S. Bonsma, *Spanning trees with many leaves in graphs with minimum degree three* . — SIAM J. Discrete Math. **22** (2008), No. 3, 920–937.
8. P. S. Bonsma, F. Zickfeld, *Spanning trees with many leaves in graphs without diamonds and blossoms.* — LATIN 2008: Theoretical informatics, pp. 531-543, Lect. Notes Comput. Sci., 4957, Springer, Berlin (2008).
9. Н. В. Гравин, *Построение остовного дерева графа с большим количеством листьев.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 31–46.
10. Д. В. Карпов, *Остовное дерево с большим количеством висячих вершин.* Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 78–87.
11. А. В. Банкевич, Д. В. Карпов, *Оценки количества висячих вершин в остовных деревьях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 18–34.
12. А. В. Банкевич, *Оценки количества висячих вершин в остовных деревьях в графах без треугольников.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 5–17.
13. Д. В. Карпов, *Остовные деревья с большим количеством висячих вершин: новые нижние оценки через количество вершин степеней* 3 *и* 4. — Зап. научн. семин. ПОМИ **406** (2012), 31–66.

Karpov D. V. Spanning trees with many leaves: lower bounds in terms of number of vertices of degree 1, 3 and at least 4.

We prove that every connected graph with s vertices of degree 1 and 3 and t vertices of degree at least 4 has a spanning tree with at least $\frac{1}{3}t + \frac{1}{4}s + \frac{3}{2}$ leaves. We present an infinite series of graphs showing that our bound is tight.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dvk0@yandex.ru

Поступило 23 мая 2012 г.