Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 406, 2012 г.

Д. В. Карпов

ОСТОВНЫЕ ДЕРЕВЬЯ С БОЛЬШИМ КОЛИЧЕСТВОМ ВИСЯЧИХ ВЕРШИН: НОВЫЕ НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ЧЕРЕЗ КОЛИЧЕСТВО ВЕРШИН СТЕПЕНЕЙ 3 И НЕ МЕНЕЕ 4

§1. Введение. Основные обозначения

Мы рассматриваем графы без петель и кратных рёбер. В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество рёбер – через $E(G)$, для количества вершин и рёбер будем использовать обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно.

Через $d_G(x)$ обозначим степень вершины x в графе G. Для любого множества вершин $W \subset V(G)$ через $d_{G,W}(x)$ будем обозначать количество вершин из множества W, смежных с x в графе G. Минимальную степень вершины графа G, как обычно, обозначим через $\delta(G)$.

Для ребра $e \in E(G)$ через $G \cdot e$ мы обозначим граф, полученный в результате *стягивания* ребра e (концы e стягиваются в новую вершину, с которой будут смежны в $G \cdot e$ все вершины, смежные в G хотя бы с одним из концов ребра e).

Для множества вершин $R \subset V(G)$ обозначим через $G - R$ граф, полученный из G в результате удаления всех вершин множества R и всех инцидентных им рёбер.

Если $a, b \in V(G)$ и $ab \notin V(G)$, то обозначим через $G + ab$ граф, полученный из G в результате добавления ребра ab.

Назовем множество вершин $R \subset V(G)$ *разделяющим*, если граф $G - R$ несвязен.

Ключевые слова: остовное дерево, висячие вершины, количество висячих вершин.

Исследования выполнены при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН, гранта Президента РФ НШ-5282.2010.1 и гранта РФФИ No. 11-01-00760-а.

Определение 1. *Для связного графа G обозначим через $u(G)$ максимально возможное количество висячих вершин в остовном дереве графа G.*

Замечание 1. Если F – дерево, то нетрудно понять, что $u(F)$ – количество его висячих вершин.

Опубликовано немало работ об оценках $u(G)$. Подробнее об истории вопроса можно прочитать в [12]. Мы же приведем лишь результаты и предположения, непосредственно связанные с нашей работой.

В 1981 году Линиал высказал гипотезу: $u(G) \geqslant \frac{d-2}{d+1}v(G) + c$ при $\delta(G) \geqslant d \geqslant 3$, где константа $c > 0$ зависит только от d. Эта гипотеза появилась не на пустом месте: для любого $d \geqslant 3$ легко придумать бесконечную серию примеров графов с минимальной степенью d, для которых $\frac{u(G)}{v(G)}$ стремится к $\frac{d-2}{d+1}$. Из работы Алона ([4], 1990) следует, что для достаточно больших d гипотеза Линиала неверна. Однако, нам интересны как раз случаи малых d. В 1991 году Клейтман и Вест [2] доказали, что $u(G) \geqslant \frac{1}{4} \cdot v(G) + 2$ при $\delta(G) \geqslant 3$ и $u(G) \geqslant \frac{2}{5} \cdot v(G) + \frac{8}{5}$ при $\delta(G) \geqslant 4$. В 1996 году Григгс и Ву [3] еще раз доказали утверждение для $\delta(G) \geqslant 4$ и доказали, что $u(G) \geqslant \frac{1}{2} \cdot v(G) + 2$ при $\delta(G) \geqslant 5$. Тем самым, гипотеза Линиала для $d = 3$, $d = 4$ и $d = 5$ доказана, а для $d > 5$ вопрос остается открытым.

В работе [2] сказано о еще одной, более сильной гипотезе Линиала: $u(G) \geqslant \sum_{x \in V(G)} \frac{d_G(x)-2}{d_G(x)+1}$ для связного графа G с $\delta(G) \geqslant 2$. Понятно, что раз для больших степеней неверна более слабая гипотеза, то неверна и эта. Мы приведём бесконечную серию связных графов, все вершины которых имеют степени 3 и 4, опровергающих сильную гипотезу Линиала. Таким образом, эта гипотеза неверна не только для очень больших степеней, приходящих к нам из вероятностных методов, но даже для степеней 3 и 4.

Однако, сильная гипотеза Линиала стимулирует попытки получить оценку на $u(G)$, в которую каждая вершина вносит вклад, зависящий от ее степени. Возникает вопрос: какой вклад должна вносить вершина степени d?

Н. В. Гравин в работе [10] доказал, что для произвольного связного графа G, в котором v_3 вершин степени 3 и v_4 вершин степени хотя бы 4, $u(G) \geqslant \frac{2}{5} \cdot v_4 + \frac{2}{15} \cdot v_3$. В этой работе допускается наличие в графе вершин степени 1 и 2. Точность константы $\frac{2}{5}$ не вызывает сомнений (см. серии примеров из работы [2]), а вот константу $\frac{2}{15}$ можно заменить на большую, как показывает основной результат нашей работы.

Теорема 1. *Пусть G – связный граф с более, чем одной вершиной, s – количество его вершин степени 3, а t – количество его вершин степени не менее 4. Тогда $u(G) = \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}s + \alpha$, где $\alpha \geqslant \frac{8}{5}$. Более того, $\alpha \geqslant 2$, кроме трёх графов-исключений: C_6^2, C_8^2 (квадраты циклов на 6 и 8 вершинах) и регулярного графа G_8 степени 4 на 8 вершинах, изображенного на рисунке 1.*

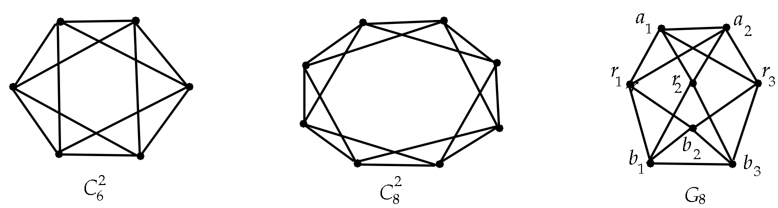

Рис. 1. Графы-исключения.

Отметим, что эта оценка оптимальна по всем трём константам. Существуют бесконечные серии примеров, где оценка достигается. Мы приведём серию примеров, в которой графы содержат только вершины степеней 3 и 4.

Доказательство было бы гораздо короче, если исключить из теоремы последнее утверждение. Интерес к поиску точной аддитивной константы обоснован желанием найти точную оценку, которая не является краевым эффектом. Ведь $\alpha = \frac{8}{5}$ достигается только на графе C_6^2! А бесконечные серии примеров существуют только для $\alpha = 2$, и именно такая аддитивная константа фигурирует в оценках для случая минимальных степеней 3 и 5. Возможно, поэтому Клейтман и Вест [2] предположили, что существуют только два связных графа с $\delta(G) \geqslant 2$, для которых не проходит оценка $u(G) \geqslant \frac{2}{5}v(G) + 2$: это C_6^2 и C_8^2. Более того, в работе [2] доказано, что граф-исключение должен быть 4-регулярным и каждое его ребро должно входить в треугольник.

В своем предположении о графах-исключениях Клейтман и Вест оказались почти правы, не заметив только граф на 8 вершинах с рисунка 1. Однако, в их работе не доказана даже конечность множества графов-исключений. В теореме 1 мы докажем аналогичное утверждение даже для более общей задачи.

§2. Доказательство теоремы 1

Введем необходимые обозначения.

Определение 2. *Пусть H – произвольный граф. Через $S(H)$ обозначим множество вершин степени 3 в графе H, а через $T(H)$ – множество вершин степени не менее 4 в графе H.*

Пусть $x \in V(H)$. Будем считать, что цена $c_H(x)$ вершины x в графе H – это

$$c_H(x) = \begin{cases} \frac{2}{5} & \text{при } x \in T(H), \\ \frac{1}{5} & \text{при } x \in S(H), \\ 0 & \text{при } x \notin T(H) \cup S(H). \end{cases}$$

Стоимостью графа H назовём величину

$$c(H) = \frac{2}{5}|T(H)| + \frac{1}{5}|S(H)| = \sum_{x \in V(H)} c_H(x).$$

Для любого множества вершин $U \subset V(H)$ мы определим стоимость этого множества в графе H как $c_H(U) = \sum_{x \in U} c_H(x)$. Для любого дерева F – подграфа графа H – мы определим его стоимость в графе H как $c_H(F) = c_H(V(F))$.

Для любого остовного дерева F графа H введем обозначение $\alpha(F) = u(F) - c(H)$. Пусть $\alpha(H)$ – это максимум $\alpha(F)$ по всем остовным деревьям F графа H.

Замечание 2. Непосредственно из определения следует, что $u(G) = c(G) + \alpha(G)$. Поэтому мы хотим доказать, что $\alpha(G) \geqslant 2$ почти для всех связных графов G.

Как всегда, при построении искомого остовного дерева для графа G мы будем считать, что для всех меньших графов теорема уже доказана.

2.1. Редукционные правила.

Сначала мы изменим граф так, чтобы с ним было удобнее работать. Опишем два редукционных правила.

R1. *Пусть $x \in V(G)$, $d_G(x) = 2$, $\mathrm{N}_G(x) = \{a, b\}$, причём a и b несмежны.*
Мы заменим граф G на граф $G' = G - x + ab$. Очевидно, $c(G') = c(G)$.

Рис. 2. Редукционные правила.

R2. *Пусть* $a_1, a_2 \in S$ *– смежные вершины,* $\mathrm{N}_G(a_1) \cap \mathrm{N}_G(a_2) = \varnothing$. Мы заменим граф G на $G' = G \cdot a_1 a_2$. Пусть a – вершина, полученная при склейке a_1 и a_2. Понятно, что $d_{G'}(a) = 4$, а тогда $c(G') = c(G)$.

В обоих случаях остовное дерево F' графа G' мы без труда сможем преобразовать в остовное дерево F графа G с не меньшим числом висячих вершин и, следовательно, с $\alpha(F) \geqslant \alpha(F')$. Тем самым мы докажем, что $\alpha(G) \geqslant \alpha(G')$.

Замечание 3. Далее мы будем считать, что граф удовлетворяет следующим условиям:

1° любая вершина степени 2 входит в треугольник с двумя вершинами своей окрестности;

2° нет двух смежных вершин степени 3, окрестности которых не пересекаются.

2.2. Общее описание метода мёртвых вершин.

Для доказательства теоремы мы построим искомое остовное дерево, используя *метод мёртвых вершин*, как и в работах [2,3].

Определение 3. *Пусть дерево F – подграф связного графа G.*

Висячую вершину x дерева F назовем мертвой, если $N_G(x) \subset V(F)$ и живой в противном случае. Количество мёртвых вершин дерева F мы будем обозначать через $b(F)$.

Введем обозначение $\alpha'(F) = \frac{13}{15}u(F) + \frac{2}{15}b(F) - c_G(F)$.

Мы будем выделять в графе G остовное дерево последовательно, по шагам добавляя к нему вершины. Пусть $S = S(G)$, а $T = T(G)$.

Подробнее остановимся на шаге алгоритма (назовём этот шаг A). Пусть перед шагом A мы имеем дерево F (естественно, F – подграф графа G).

Через Δu и Δb мы будем обозначать прирост количества висячих вершин и количества мертвых висячих вершин в дереве F на шаге A, через Δt и Δs – количество добавленных на этом шаге в дерево F вершин из T и из S соответственно.

Назовём *доходом* шага A величину

$$p(A) = \frac{13}{15}\Delta u + \frac{2}{15}\Delta b - \frac{2}{5}\Delta t - \frac{1}{5}\Delta s.$$

Если F_1 – дерево, полученное после шага A, то нетрудно понять, что $\alpha'(F_1) = \alpha'(F) + p(A)$. Мы будем выполнять только шаги, для которых доход неотрицателен.

Замечание 4. 1) Нетрудно заметить, что мертвые вершины останутся мертвыми висячими вершинами на всех последующих этапах построения. По окончании построения, когда будет построено остовное дерево, все его висячие вершины будут мёртвыми.

2) Так как у остовного дерева F графа G все висячие вершины – мёртвые, в этом случае $\alpha'(F) = \alpha(F)$.

Сначала мы опишем все возможные шаги, а потом рассмотрим начало построения и оценим $\alpha(T)$ для построенного остовного дерева T.

Для удобства мы в описании шага будем обозначать множество вершин, не вошедших в дерево F, через W. Вершины множества W, смежные хотя бы с одной из вершин $V(F)$, назовем *вершинами уровня* 1. Не вошедшие в уровень 1 вершины из W, смежные хотя бы с одной вершиной уровня 1, назовем *вершинами уровня* 2.

Для каждой вершины x из W через $P(x)$ обозначим множество всех вершин из $V(F)$, смежных с x.

2.3. Шаг алгоритма.

Мы будем пытаться выполнить очередной шаг алгоритма, переходя к следующему варианту только когда невозможно выполнить ни один из предыдущих. Дополнительно об этом упоминать в описании шагов мы не будем.

После каждого законченного шага (то есть шага, имеющего неотрицательный доход) мы будем подсчитывать параметры этого шага: Δu, Δb и доход сделанного шага. Все эти параметры понадобятся нам в последнем разделе работы. Количество вершин, добавленных в дерево на шаге, не является параметром этого шага!

Начнем с шага, который таковым фактически не является, но поможет нам в описании других шагов.

Z0. *Висячая вершина v дерева F, посчитанная ранее как живая, оказалась мёртвой.*

В этом случае мы не будем менять дерево. Учитывая информацию о вершине v, мы получаем

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 1, \quad p(Z0) = \frac{2}{15}.$$

Замечание 5. При описании шагов мы будем считать, что все висячие вершины, про которые не сказано, что они мёртвые – живые. Добавление лишней мёртвой вершины будет оформлено как шаг $Z0$.

2.3.1. **Шаги типа A.**

В первых четырёх вариантах в дерево добавляются новые висячие вершины.

A1. *В дереве F есть невисячая вершина x, смежная с вершиной $y \in W$.*
Тогда присоединим y к x. Так как $c_G(x) \leqslant \frac{2}{5}$, мы получаем

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 0, \quad p(A1) \geqslant \frac{13}{15} - \frac{2}{5} = \frac{7}{15}.$$

A2. *В дереве F есть такая вершина x, что $d_{G,W}(x) \geqslant 2$.*
Тогда присоединим к x две смежные с ней вершины из W. Так как стоимость двух добавленных вершин не более $2 \cdot \frac{2}{5}$, мы получаем

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 0, \quad p(A2) \geqslant \frac{13}{15} - 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{15}.$$

A3. *Существует такая вершина x уровня 1, что $d_{G,W}(x) \geqslant 3$.*
Тогда присоединим к дереву F вершину x и затем три смежных с x вершины множества W. Стоимость четырех добавленных вершин не более $4 \cdot \frac{2}{5}$ и мы имеем

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 0, \quad p(A3) \geqslant 2 \cdot \frac{13}{15} - 4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}.$$

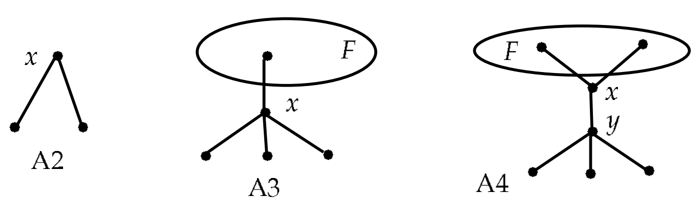

Рис. 3. Шаги типа A.

Замечание 6. Далее мы считаем, что невисячие вершины дерева F не смежны с вершинами из W, каждая висячая вершина смежна не более чем с одной вершиной из W и, наконец, каждая вершина уровня 1 смежна не более чем с двумя вершинами из W.

В частности, если $x \in T$ – вершина уровня 1, то $|P(x)| \geqslant 2$ и при присоединении вершины x к дереву хотя бы одна из вершин множества $P(x)$ станет мёртвой.

A4. *Существует вершина $x \in S$ уровня 1, смежная ровно с одной вершиной из W, причём эта вершина – $y \in T$ уровня 2.*
Присоединим к дереву F вершины x, y и три отличные от x вершины из W, смежные с y (вершина y не смежна с деревом F). Стоимость пяти добавленных вершин не более $\frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{5}$ и мы имеем

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 1, \quad p(A4) \geqslant 2 \cdot \frac{13}{15} + \frac{2}{15} - \frac{9}{5} = \frac{1}{15}.$$

2.3.2. **Шаги типов M и N.**

Далее мы рассмотрим гораздо более сложный случай.

M. *Существует такая вершина $x \in T$ уровня 1, что $d_{G,W}(x) = 2$.* Мы присоединим к дереву вершину x. Цена этой вершины составляет $\frac{2}{5}$. Вершина x смежна хотя бы с двумя висячими вершинами дерева F (см. рис. 4), одна из них точно станет мертвой. Присоединим две смежные с x вершины $y_1, y_2 \in W$, фактически выполнив шаг $A2$. Учитывая сказанное выше, мы получим

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 1, \quad p(M) \geqslant \frac{2}{15} - \frac{2}{5} + p(A2) \geqslant -\frac{3}{15}.$$

N. *Существует такая вершина $x \in S$ уровня 1, что $d_{G,W}(x) = 2$.* Мы присоединим к дереву вершину x и две смежные с x вершины $y_1, y_2 \in W$ и получим аналогично предыдущему случаю

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 0, \quad p(N) = -\frac{1}{5} + p(A2) \geqslant -\frac{2}{15}.$$

Шаги M и N мы не считаем законченными. Мы добавили в дерево вершины x, y_1, y_2, однако, пусть F пока что обозначает дерево, построенное после предыдущего законченного *шага. После выполнения шагов M и N мы поставим следующую задачу:*

– каждая висячая вершина из $V(F)$ смежна не более чем с одной вершиной из W;

– каждая вершина первого уровня смежна не более чем с двумя вершинами из W.

Требуется выполнить шаг с доходом не менее $\frac{3}{15}$.

Шаги, которые мы рассматриваем далее в этом разделе, не включают в себя выполненный ранее шаг M или N! При подсчете параметров этих шагов вершины, добавленные на шаге M или N, не учитываются. Приступим к разбору случаев.

1. $y_1, y_2 \notin T$.
Эти вершины стоят дешевле, чем было посчитано, что добавляет доход хотя бы $\frac{2}{5}$. Получаем

$$\Delta u = \Delta b = 0, \quad p(1) \geqslant \frac{6}{15}.$$

Пусть $W_1 = W \setminus \{x, y_1, y_2\}$.

Если ровно одна из вершин y_1 и y_2 принадлежит множеству T, то мы далее будем считать, что $y_1 \in T$.

Если же $y_1, y_2 \in T$, то мы будем считать, что $d_{G,W_1}(y_1) \geqslant d_{G,W_1}(y_2)$.

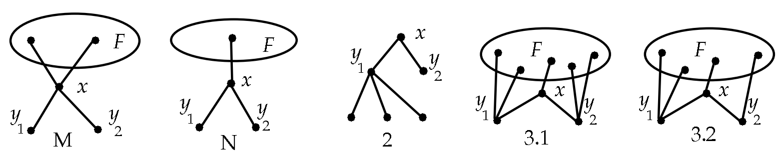

Рис. 4. Шаги M, N, 2, 3.1 и 3.2.

2. $d_{G,W_1}(y_1) \geqslant 3$.
Присоединим к дереву три смежные с y_1 вершины множества W_1, фактически выполнив шаги $A2$ и $A1$. Получаем

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 0, \quad p(2) = p(A1) + p(A2) \geqslant \frac{8}{15}.$$

3. $d_{G,W_1}(y_1) \leqslant 1$.
Вершина y_1 смежна не более, чем с тремя не входящими в дерево F вершинами: это x и, возможно, y_2 и одна вершина из W_1. Так как $d_G(y_1) \geqslant 4$, то y_1 – вершина уровня 1. По замечанию 6 мы имеем $|P(y_1)| \geqslant 2$, что добавит нам хотя бы две мёртвых вершины. Рассмотрим два случая.

3.1. *Если* $y_2 \in T$, то по выбору вершины y_1 мы имеем $d_{G,W_1}(y_2) \leqslant 1$. Аналогично сказанному выше для вершины y_1, мы получаем еще две мёртвые вершины. В этом случае

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 4, \quad p(3.1) = 4 \cdot \frac{2}{15} = \frac{8}{15}.$$

3.2. *Если* $y_2 \notin T$, то это добавит нам хотя бы $\frac{1}{5}$. В этом случае

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 2, \quad p(3.2) \geqslant \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{7}{15}.$$

4. $d_{G,W_1}(y_1) = 2$.
Пусть z_1 и z_2 – две смежные с y_1 вершины из множества W_1. Присоединим к дереву вершины z_1 и z_2 (через y_1), выполнив шаг $A2$ и получим $p(4) = p(A2) \geqslant \frac{1}{15}$. Поскольку этого недостаточно, продолжим разбирать случаи.

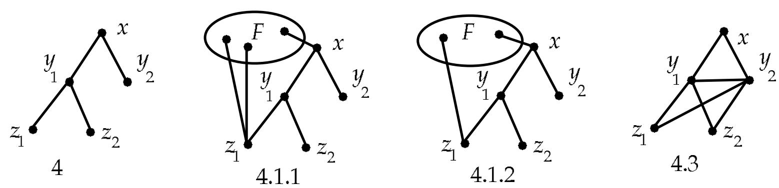

Рис. 5. Шаги 4, 4.1.1, 4.1.2 и 4.3.

4.1. *Среди вершин y_2, z_1, z_2 есть вершина, смежная с деревом F.* Пусть, например, вершина z_1 смежна с деревом F, то есть, входит в уровень 1. Для остальных вершин рассуждения аналогичны.

4.1.1. *Если* $z_1 \in T$, то по замечанию 6, вершина z_1 должна быть смежна хотя бы с двумя вершинами дерева F, что добавит нам две мёртвые вершины и обеспечит

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 2, \quad p(4.1.1) \geqslant p(4) + 2 \cdot \frac{2}{15} \geqslant \frac{5}{15}.$$

4.1.2. *Если* $z_1 \notin T$, то вершина z_1 стоит дешевле минимум на $\frac{1}{5}$, но добавляет лишь одну мёртвую вершину. Поэтому

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 1, \quad p(4.1.2) \geqslant p(4) + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} \geqslant \frac{6}{15}.$$

4.2. *Среди вершин y_2, z_1, z_2 есть вершина не из множества T.*
Это увеличит доход хотя бы на $\frac{1}{5}$, в результате

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 0, \quad p(4.2) \geqslant p(4) + \frac{1}{5} \geqslant \frac{4}{15}.$$

4.3. $\mathrm{N}_G(y_2) = \{x, y_1, z_1, z_2\}$.
Тогда вершина y_2 оказывается мёртвой, в результате получится

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 1, \quad p(4.3) \geqslant p(4) + \frac{2}{15} = \frac{3}{15}.$$

Замечание 7. Итак, подведём итоги. В оставшихся до конца разбора шагов M и N случаях вершины y_1, y_2, z_1, z_2 принадлежат множеству T и не смежны с деревом F. Каждая из вершин y_1, y_2 смежна ровно с двумя вершинами из W_1, а значит, вершины y_1 и y_2 смежны, $d_G(y_1) = d_G(y_2) = 4$.

Вершина y_2 не смежна хотя бы с одной из вершин z_1, z_2. Не умаляя общности положим, что y_2 не смежна с z_1. Тогда z_1 смежна хотя бы с двумя вершинами из $W_2 = W \setminus \{x, y_1, y_2, z_1, z_2\}$.

4.4. $d_{G,W_2}(z_1) \geqslant 3$.
Добавим три смежные с z_1 вершины множества W_2 в дерево, сделав шаг $A2$ и шаг $A1$. В результате получим

$$\Delta u = 3, \quad \Delta b = 0, \quad p(4.4) \geqslant p(4) + p(A2) + p(A1) \geqslant \frac{9}{15}.$$

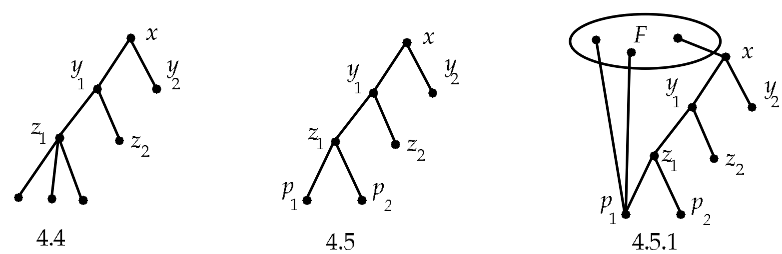

Рис. 6. Шаги 4.4, 4.5, 4.5.1.

4.5. $d_{G,W_2}(z_1) = 2$.
Обозначим две смежные с z_1 вершины из W_2 через p_1 и p_2 и добавим в дерево (см. рис. 6), фактически выполнив еще один шаг $A2$. В

результате получим

$$p(4.5) \geqslant p(4) + p(A2) \geqslant \frac{2}{15}.$$

Этого не хватает, продолжим разбор случаев.

4.5.1. *Среди вершин p_1, p_2 есть вершина, принадлежащая множеству T и смежная с деревом F.*
Пусть это вершина p_1. По замечанию 6 она смежна хотя бы с двумя вершинами дерева F, что добавит нам две мёртвые вершины и обеспечит

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 2, \quad p(4.5.1) \geqslant p(4.5) + 2 \cdot \frac{2}{15} \geqslant \frac{6}{15}.$$

Замечание 8. Далее все вершины $y_1, y_2, z_1, z_2, p_1, p_2$ не смежны с деревом F.

4.5.2. *Среди вершин p_1, p_2 есть вершина не из множества T.*
Это увеличит доход на $\frac{1}{5}$, получится

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 0, \quad p(4.5.2) \geqslant p(4.5) + \frac{3}{15} \geqslant \frac{5}{15}.$$

4.5.3. *Среди вершин y_2, z_2, p_1, p_2 есть вершина, не смежная с вершинами из $W_3 = W \setminus \{x, y_1, y_2, z_1, z_2, p_1, p_2\}$.*
Тогда в построенном дереве эта вершина – мёртвая, что увеличивает доход от шага на $\frac{2}{15}$. Поэтому

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 1, \quad p(4.5.3) \geqslant p(4.5) + \frac{2}{15} \geqslant \frac{4}{15}.$$

Замечание 9. Таким образом, все вершины $y_1, y_2, z_1, z_2, p_1, p_2$ принадлежат множеству T и не смежны с деревом F. Каждая из вершин y_2, z_2, p_1, p_2 смежна хотя бы с одной вершиной из W_3.

4.5.4. $d_{G,W_3}(p_1) \geqslant 2$ *или* $d_{G,W_3}(p_2) \geqslant 2$.
Не умаляя общности предположим, что $d_{G,W_3}(p_1) \geqslant 2$. Добавим две смежные с p_1 вершины $q_1, q_2 \in W_3$ в дерево, выполнив шаг $A2$. Получится

$$\Delta u = 3, \quad \Delta b = 0, \quad p(4.5.4) \geqslant p(4.5) + \frac{1}{15} \geqslant \frac{3}{15}.$$

4.5.5. $d_{G,W_3}(p_1) = d_{G,W_3}(p_2) = 1$.
Тогда вершина p_1 смежна хотя бы с двумя из вершин p_2, y_2, z_2, а вершина p_2 смежна хотя бы с двумя из вершин p_1, y_2, z_2. Напомним, что по замечанию 7 вершины y_1 и y_2 смежны и $d_G(y_1) = d_G(y_2) = 4$. Поскольку y_2 смежна хотя бы с одной вершиной из W_3, то y_2 не может быть смежна и с p_1, и с p_2. Не умаляя общности положим, что y_2 не смежна с p_1. Тогда $d_G(p_1) = 4$, вершина p_1 смежна с p_2 и z_2 (см. рис. 7a).

Заметим, что вершина z_2 не может быть смежна с p_2. (Иначе z_2 была бы смежна с тремя вершинами из $W \setminus \{x, y_1, y_2, z_1, z_2\}$: это p_1, p_2 и вершина из W_3. Тогда можно было бы выполнить шаг, аналогичный шагу 4.4, добавив эти три вершины к z_2.) Значит, вершина p_2 смежна с y_2 и $d_G(p_2) = 4$ (см. рис. 7b).

Кроме того, y_2 смежна ровно с двумя вершинами из

$$W_1 = W \setminus \{x, y_1, y_2\}$$

по замечанию 7. Так как y_2 смежна с p_2 и вершиной из W_3, она не смежна ни с z_1, ни с z_2. Тогда z_1 смежна с z_2 и $d_G(z_1) = d_G(z_2) = 4$ (см. рис. 7c).

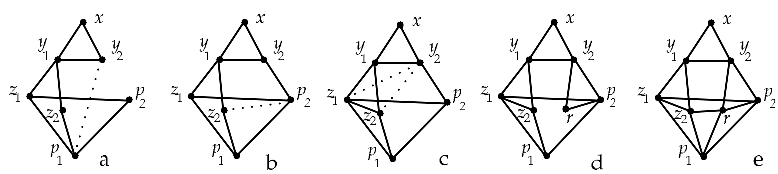

Рис. 7. Шаг 4.5.5.

Обозначим через r единственную смежную с y_2 вершину из множества W_3. Можно провести аналогичные сделанным выше для y_1 рассуждения шага 4 для вершины y_2. Окажется, что смежные с y_2 вершины r и p_2 смежны друг с другом и, кроме того, $d_G(r) = 4$ (см. рис. 7d).

Продолжая эти рассуждения для вершины p_2 и смежных с ней p_1 и z_1 мы убедимся, что одна из вершин p_1 и z_1 должна быть смежна с r. Поскольку z_1 не может быть смежна с r, то вершины p_1 и r смежны.

Теперь понятно (см. рис. 7d), что z_2 смежна ровно с двумя вершинами множества W_2: это p_1 и некая вершина $r' \in W_3$. В этом случае можно повторить написанные выше рассуждения для вершины z_2 вместо z_1 и получить, что p_1 смежна с r'. Следовательно, $r = r'$ и z_2 смежна с r. Мы получили конфигурацию, изображенную на рисунке 7e.

Добавим в дерево вершину r, присоединив ее к одной из смежных с ней. Отметим, что ни одна из добавленных в дерево вершин в этом случае не имеет смежных вершин вне дерева. Произведём подсчёт параметров этого шага: $\Delta t = 5$,

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 4, \quad p(4.5.5) \geqslant 2 \cdot \frac{13}{15} + 4 \cdot \frac{2}{15} - 5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

Замечание 10. 1) Оказалось, что в продолжении шагов M и N всегда можно выполнить шаг с доходом не менее $\frac{3}{15}$, что в сумме дает неотрицательный доход. После шагов M и N мы обязательно будем выполнять описанные выше шаги и получать неотрицательный доход. Обозначение $M4.2$ будет означать шаг, состоящий из M и 4.2, аналогично с остальными шагами. Назовем такие шаги MN-*шагами*.

Нулевой доход получается только в MN-шагах $M4.3$ и $M4.5.4$. В остальных MN-шагах доход не менее $\frac{1}{15}$. Все MN-шаги, кроме $M4.5.5$ и $N4.5.5$, не могут быть последними, так как добавляют хотя бы одну живую вершину.

2) Остаются лишь варианты, в которых каждая вершина уровня 1 смежна не более, чем с одной вершиной множества W (иначе мы выполнили бы шаг $A3$ или один из MN-шагов).

2.3.3. **Шаги типа Z.**

В следующих вариантах количество висячих вершин построенного дерева не изменяется, но увеличивается количество мёртвых вершин.

Z1. *Существует вершина уровня* 1*, не смежная с вершинами из* W*.* Пусть это вершина w. Тогда $\mathrm{N}_G(w) = P(w)$. Добавим вершину w в дерево, в результате все вершины из $\mathrm{N}_G(w)$, кроме одной, станут мёртвыми, так же как и вершина w. В принципе, это означает, что $\Delta b = d_G(w)$.

Z1.1. $w \in T$.

В этом случае добавилось $d_G(w) \geqslant 4$ мертвых вершин. Мы будем считать, что на этом шаге добавилось ровно 4 мертвых вершины, а если их на самом деле добавилось больше, оформим это как $d_G(w)-4$ шагов $Z0$. Таким образом для шага $Z1.1$ мы имеем

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 4, \quad p(Z1.1) = 4 \cdot \frac{2}{15} - \frac{2}{5} = \frac{2}{15}.$$

Z1.2. $w \in S$.
В этом случае параметры шага

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 3, \quad p(Z1.2) = 3 \cdot \frac{2}{15} - \frac{1}{5} = \frac{3}{15}.$$

Z1.3. $w \notin S \cup T$.
В этом случае получается $p(Z1.3) = \Delta b \cdot \frac{2}{15} > 0$. Этот шаг можно не рассматривать, так как параметры этого шага в точности равны параметрам Δb последовательных шагов $Z0$. (Напомним, что количество добавленных вершин не является параметром шага.)

Z2. *Существует две смежные вершины v, w первого уровня.* Пусть это вершины v, w. По замечанию 10 тогда остальные смежные с v, w вершины – это висячие вершины дерева F. Очевидно, $d_G(v) \geqslant 2$ и $d_G(w) \geqslant 2$. Если, например, $d_G(v) = 2$ и $\mathrm{N}_G(v) = \{x, w\}$, то x – висячая вершина дерева F, смежная с w (иначе мы применили бы редукционное правило $R1$) и $d_{G,W}(x) \geqslant 2$, что противоречит замечанию 6. Таким образом, получается, что $v, w \in S \cup T$. Случай $v, w \in S$ невозможен, в нем мы бы применили редукционное правило $R2$. Добавим вершины w и v в дерево, присоединив к смежным с ними вершинам, в результате v и w станут мёртвыми и $\Delta b = d_G(w) + d_G(v) - 2$. Как и в случае $Z1.1$, мы будем записывать в параметры шагов минимально возможные Δb и при необходимости применять шаги $Z0$.

Z2.1. *Если одна из вершин v, w лежит в S, а другая – в T*, то

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 5, \quad p(Z2.1) = 5 \cdot \frac{2}{15} - \frac{1}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{15}.$$

Z2.2. *При $v, w \in T$* получается

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 6, \quad p(Z2.2) = 6 \cdot \frac{2}{15} - 2 \cdot \frac{2}{5} = 0.$$

Z3. *Вершина w уровня 1 смежна с вершиной $v \in W \setminus (S \cup T)$.* Добавим вершины w и v в дерево. В результате вершина v станет мёртвой (при $d_G(v) = 2$ по замечанию 3 мы имеем $\mathrm{N}_G(v) \subset \mathrm{N}_G(w)$, иначе мы бы применили редукционное правило $R1$) и $\Delta b = d_G(w) - 1$.

Z3.1. *При $w \in S$* получается

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 2, \quad p(Z3.1) = 2 \cdot \frac{2}{15} - \frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

Z3.2. *При $w \in T$* получается

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 3, \quad p(Z3.2) = 3 \cdot \frac{2}{15} - \frac{2}{5} = 0.$$

Лемма 1. *Пусть w – вершина уровня 1. Тогда $w \in T$, причем вершина w смежна с вершиной $v \in S \cup T$ уровня 2 и не менее, чем тремя висячими вершинами дерева F.*

Доказательство. По замечанию 10 мы имеем $d_{G,W}(w) \leqslant 1$. Поскольку нельзя выполнить шаг $Z1$, то $d_{G,W}(w) = 1$, то есть, w смежна с вершиной $v \in W$.

Так как нельзя выполнить $Z2$, то v – вершина уровня 2. Так как нельзя выполнить шаг $Z3$, то $v \in T \cup S$. Поскольку нельзя выполнить редукцию $R1$, то $w \in T \cup S$.

Наконец, установим, что $w \in T$. Предположим противное, тогда $w \in S$. Если при этом $v \in T$, то мы выполнили бы шаг $A4$. А в случае $v \in S$ мы выполнили бы редукцию $R2$.

Таким образом, $w \in T$. Так как $d_{G,W}(w) = 1$, вершина w смежна не менее, чем с тремя висячими вершинами дерева F. □

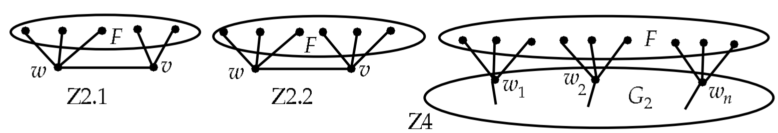

Рис. 8. Шаги типа Z.

Z4. *Существует не вошедшая в дерево вершина.*
Пусть $w_1, \dots, w_n$ – все вершины уровня 1. По лемме 1 каждая из них смежна хотя бы с тремя висячими вершинами дерева F. Всего имеем хотя бы $3n$ различных живых вершин, то есть, $u(F) - b(F) \geqslant 3n$ и

$$u(F) = c_G(F) + \alpha'(F) + \frac{2}{15}(u(F) - b(F)) \geqslant c_G(F) + \alpha'(F) + \frac{2n}{5}. \quad (1)$$

Разрежем все рёбра, ведущие от $w_1, \dots, w_n$ к дереву F, в результате граф G распадётся на $G_1 = G(V(F))$ и граф $G_2 = G(W)$. Поскольку $c_G(w_i) - c_{G_2}(w_i) = \frac{2}{5}$, то

$$c(G_2) = c_G(W) - n \cdot \frac{2}{5}. \quad (2)$$

Отметим, что граф G_2 может быть несвязным, но в каждой его компоненте связности есть хотя бы четыре вершины и среди них есть висячая (одна из $w_1, \dots, w_n$), поэтому к каждой компоненте связности графа G_2 можно применить утверждение нашей теоремы (она не является исключением и содержит меньше вершин, чем граф G). Пусть в графе G_2 ровно k компонент связности. Тогда мы можем построить в нем остовный лес F' из k деревьев с

$$u(F') \geqslant c(G_2) + 2k. \tag{3}$$

Присоединим к F каждую из k компонент связности леса F' произвольным ребром, в результате мы получим остовное дерево T графа G. Оценим $u(T)$ с помощью неравенств (1), (3) и (2):

$$u(T) = u(F) + u(F') - 2k \geqslant c_G(F) + \alpha'(F) + \frac{2n}{5} + c(G_2) =$$
$$= c_G(V(F)) + c_G(W) + \alpha'(F) = c(G) + \alpha'(F).$$

Таким образом, в этом случае мы имеем $\alpha(G) \geqslant \alpha(T) \geqslant \alpha'(F)$.

2.4. Начало построения и оценка α.

Мы постараемся начать построение с *базового дерева* F' с как можно большим $\alpha'(F')$ и докажем, что в результате для любого графа, кроме трёх исключений, получится остовное дерево T с $\alpha(T) \geqslant 2$.

Разберём несколько случаев, в каждом из них будем считать, что условия всех предыдущих случаев не выполняются. Начнем со случаев, в которых удается построить базовое дерево F' с $\alpha'(F') \geqslant 2$ и тем самым закончить доказательство теоремы.

B1. *В графе есть две смежные вершины $a, a' \in T$, у которых $\mathrm{N}_G(a) \cap \mathrm{N}_G(a') = \varnothing$.*

Мы начнём построение с базового дерева F', в котором a и a' соединены друг с другом и со всеми вершинами из их окрестностей. В таком дереве $u(F') = u \geqslant 6$, $c_G(F') \leqslant \frac{2}{5}(u+2)$ и $\alpha'(F') \geqslant \frac{13}{15}u - c_G(F') \geqslant \frac{7u-12}{15} \geqslant 2$.

B2. *В графе есть вершина $a \in T$, смежная с вершиной степени не более 2.*

Пусть $v \in \mathrm{N}_G(a)$, $d_G(v) \leqslant 2$. Мы начнём построение с базового дерева F', в котором a соединена со всеми вершинами из её окрестности. Если $d_G(v) = 1$, то вершина v, очевидно, мёртвая. Если же $d_G(v) = 2$, то, так как невозможно выполнить редукцию $R1$, вершины a и v входят в треугольник, третья вершина которого, очевидно, лежит в $\mathrm{N}_G(a)$. Значит, и в этом случае вершина v – мёртвая.

Таким образом, $u(F') = d_G(a) = u \geqslant 4$, $b(F') \geqslant 1$, $c_G(F') \leqslant \frac{2}{5}u$ и $\alpha'(F') \geqslant \frac{13}{15}u + \frac{2}{15} - c_G(F') \geqslant \frac{7u+2}{15} \geqslant 2$.

В дальнейшем мы будем рассматривать начала построения, в которых $\alpha'(F') < 2$. Для обеспечения оценки $\alpha(G) \geqslant 2$ мы обратим внимание на конец построения.

Лемма 2. *Предположим, что в графе нет конфигураций, описанных в случаях $B1$ и $B2$ и описанным выше алгоритмом было построено остовное дерево. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если хотя бы один раз выполнялся шаг $Z4$, то существует базовое дерево F' с $\alpha'(F') \geqslant 2$.*

2) *Если не выполнялся шаг $Z4$, то последний шаг алгоритма не добавляет живых вершин и даёт доход не менее $\frac{1}{15}$.*

Доказательство. 1) Вернёмся к шагу $Z4$ и отрезанному от заготовки дерева F графу G_2 (см. рис 8), точнее к одной из его компонент связности G'. Не умаляя общности положим, что в G' попали вершины $w_1, \dots, w_k$ и не попали вершины $w_{k+1}, \dots, w_n$. Так как G' – меньший граф с висячими вершинами, в нем есть остовное дерево T' с $\alpha(T') = u(T') - c_{G'}(T') \geqslant 2$.

Рассмотрим дерево T' как подграф графа G. К сожалению, вершины $w_1, \dots, w_k$ стоят в графе G не по 0, как в графе G', а по $\frac{2}{5}$, то есть, $c_G(T') = c_{G'}(T') + \frac{2k}{5}$. К тому же, теперь эти висячие вершины дерева T' – не мёртвые (а остальные висячие вершины – мертвые), то есть, $u(T') - b(T') = k$. Учитывая сказанное выше, в графе G мы имеем

$$\alpha'(T') = u(T') - c_G(T') - \frac{2}{15} \cdot (u(T') - b(T')) = u(T') - c_{G'}(T') - \frac{8k}{15} = 2 - \frac{8k}{15}.$$

Вспомним шаг $Z4$ и при всех $i \in \{1, \dots, k\}$ выделим для каждой вершины w_i три смежные с ней вершины $x_1^i, x_2^i, x_3^i \in V(F)$. Такие тройки для разных вершин не пересекаются, все их вершины не входят в дерево T'. Выполним k раз – по очереди со всеми вершинами $w_1, \dots, w_k$ – шаг $A2$ и шаг $A1$, присоединив к w_i вершины x_1^i, x_2^i, x_3^i. В сумме мы получим доход $k \cdot \frac{8}{15}$ и построим базовое дерево F' с $\alpha'(F') \geqslant 2$.

2) Рассмотрим последний шаг. На этом шаге не добавилось живых вершин. Просмотрев параметры шагов, можно сделать вывод, что последним мог быть только один из шагов $Z0$, $Z1.1$, $Z1.2$, $Z2.1$, $Z2.2$, $Z3.1$, $Z3.2$, $N4.5.5$ и $M4.5.5$. Шаг $Z2.2$ невозможен, так как для этого шага в графе должна быть конфигурация, рассмотренная в пункте $B1$, а шаг $Z3.2$ невозможен, так как для этого шага в графе должна быть конфигурация, рассмотренная в пункте $B2$. Любой из остальных шагов даёт доход хотя бы $\frac{1}{15}$. $\square$

Таким образом, в дальнейшем нам достаточно доказывать, что на шагах, на которых добавляются живые вершины, будет построено дерево F с $\alpha'(F) \geqslant \frac{29}{15}$. Продолжим разбор случаев.

B3. *В графе есть вершина a степени не менее* 5.
Начнём построение с базового дерева F', в котором a соединена со всеми вершинами из её окрестности. Очевидно, $u(F') = d_G(a) = u \geqslant 5$, $c_G(F') \leqslant \frac{2}{5}(u+1)$ и $\alpha'(F') \geqslant \frac{13}{15}u - c_G(F') \geqslant \frac{7u-6}{15} \geqslant \frac{29}{15}$, что нам и нужно.

B4. *В графе есть вершина $x \in S$, смежная с вершиной степени не более* 2.
Пусть $v \in \mathrm{N}_G(x)$, $d_G(v) \leqslant 2$, $\mathrm{N}_G(x) = \{v, y_1, y_2\}$. Мы начнём построение с базового дерева F', в котором x соединена со всеми вершинами из её окрестности. Аналогично случаю $B2$, вершина v будет мёртвой. Таким образом, $u(F') = 3$, $b(F') \geqslant 1$ и

$$\alpha'(F') \geqslant \frac{13}{15} \cdot 3 + \frac{2}{15} - c_G(F') = \frac{41}{15} - c_G(F').$$

Если хотя бы одна из вершин y_1, y_2 не принадлежит множеству T, то $c_G(F') \leqslant 2 \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ и $\alpha'(F') \geqslant \frac{29}{15}$. По лемме 2 мы получим $\alpha(G) \geqslant 2$.

Рассмотрим случай $y_1, y_2 \in T$. Тогда обе вершины y_1, y_2 – живые, $c_G(F') = \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} = 1$ и $\alpha'(F') = \frac{26}{15}$. Построение не закончено, на данный момент нам не хватает $\frac{4}{15}$.

При разборе случаев M и N мы решали аналогичную задачу о недостатке дохода в $\frac{3}{15}$ (даже с теми же обозначениями x, y_1, y_2). Повторив эти рассуждения и шаги, мы получим дерево F^* с $\alpha'(F^*) \geqslant \frac{29}{15}$. Более того, $\alpha'(F^*) < 2$ мы получим только в конфигурациях $M4.3$ и $M4.5.4$, но в этих случаях в построенных деревьях есть живые вершины и по лемме 2 последний шаг построения даст дополнительный доход в $\frac{1}{15}$ и обеспечит $\alpha(G) \geqslant 2$.

Замечание 11. В пунктах $B2$ и $B4$ рассмотрены все случаи, когда в графе есть вершина степени не более 2. В пункте $B3$ рассмотрен случай, когда в графе есть вершина степени более 4. *Поэтому далее мы рассматриваем случаи, когда в графе степени всех вершин равны* 3 *и* 4.

В таблице 1 *приведена сводка данных по всем возможным шагам.* Для простоты восприятия доходы всех шагов умножены на 15.

Мы учли невозможность шагов $Z2.2$, $Z3.1$, $Z3.2$ и $Z4$ в связи с невозможностью конфигураций из разобранных базовых случаев. (Про

Таблица 1

Шаг	$\Delta u - \Delta b$	15·доход
$A1$	1	7
$A2$, $A4$, $M4.2$, $N4.3$, $M4.5.3$	1	1
$A3$, $N4.2$, $M4.5.2$, $N4.5.3$	2	2
$M1$, $M4.1.2$, $M4.5.1$, $N4.1.1$	0	3
$N1$, $N4.1.2$, $N4.5.1$	1	4
$M2$	2	5
$N2$, $M4.4$	3	6
$M3.1$	-4	5
$N3.1$	-3	6
$M3.2$	-2	4
$N3.2$	-1	5
$M4.1.1$, $N4.5.5$, $Z0$	-1	2
$M4.3$	0	0
$N4.4$	4	7
$N4.5.2$	3	3
$M4.5.4$	3	0
$N4.5.4$	4	1
$M4.5.5$	-2	1
$Z1.1$	-4	2
$Z1.2$	-3	3
$Z2.1$	-5	1

шаги $Z2.2$, $Z3.2$ и $Z4$ сказано в лемме 2 и ее доказательстве, шаг $Z3.1$ невозможен, так как мы рассматриваем граф, все вершины которого имеют степени не менее 3.)

С таким большим количеством шагов неудобно работать и следующей леммой мы значительно сократим количество возможных шагов.

Лемма 3. *Если в процессе построения остовного дерева (с некоторым базовым деревом) хотя бы раз выполнялся один из указанных шагов, то* $\alpha(G) \geqslant 2$.

1) *Шаг* $N4.2$, $N4.3$, $N4.4$, $N4.5.2$, $N4.5.3$, $N4.5.5$. *Один из шагов* $N1$, $N2$, $N4.5.4$ *при условии, что все добавленные на этом шаге вершины, кроме* x, *не смежны с деревом* F.

2) *Шаг $M4.2$, $M4.3$, $M4.4$, $M4.5.2$, $M4.5.3$, $M4.5.5$. Один из шагов $M1$, $M2$, $M4.5.4$ при условии, что все добавленные на этом шаге вершины, кроме x, не смежны с деревом F.*

Доказательство. Пусть перед шагом было построено остовное дерево F, к которому через вершину $x \in S \cup T$ уровня 1 добавили поддерево F_0 из нескольких вершин, причём доход шага равен p. Отметим, что во всех указанных в условии шагах вершина x смежна ровно с двумя вершинами из $W = V(G) \setminus V(F)$, а все добавляемые в построенное ранее дерево F вершины, кроме x, не смежны с $V(F)$ – чтобы в этом убедиться, достаточно посмотреть описание шагов и условие леммы.

1) В случае, когда выполнялись шаги типа N, мы имеем $x \in S$. Из таблицы 1 видно, что доход $p \geqslant \frac{1}{15}$. Вспомним, как производился подсчет дохода шага. Вершина x смежна с единственной вершиной $a \in V(F)$. После присоединения F_0 вершина a перестала быть висячей вершиной, за это из дохода вычли $\frac{13}{15}$. Новые мертвые вершины в исходном дереве F не появлялись, поэтому все новые висячие и мертвые вершины – это вершины дерева F_0, учтенные ровно с такими же коэффициентами, как при подсчете $\alpha'(F_0)$. Поэтому $\alpha'(F_0) = p + \frac{13}{15} \geqslant \frac{14}{15}$.

Очевидно, $\mathrm{N}_G(a) \cap \mathrm{N}_G(x) = \varnothing$, поэтому в силу замечания 3 мы имеем $a \in T$. Следовательно, a смежна с тремя вершинами $b_1, b_2, b_3 \in V(F)$, эти вершины не вошли в дерево F_0. Построим новое базовое дерево F_1, присоединив к F_0 вершины a, b_1, b_2, b_3 (см. рис. 9, 1). От этой операции мы получим доход не менее, чем $3 \cdot \frac{13}{15} - 4 \cdot \frac{2}{5} = 1$, в результате $\alpha'(F_1) \geqslant \frac{29}{15}$, что ввиду леммы 2 достаточно для $\alpha(G) \geqslant 2$.

2) *Опишем общий алгоритм построения базового дерева для шагов типа M.*

В этом случае $x \in T$. Вспомним, как производился подсчет дохода шага. Вершина x смежна с двумя вершинами $a_1, a_2 \in V(F)$. После присоединения F_0 одна из вершин множества $P(x) = \{a_1, a_2\}$ перестала быть висячей вершиной, за что вычли $\frac{13}{15}$, а другая вершина из $P(x)$ стала мертвой, за что прибавили $\frac{2}{15}$. Все остальные новые висячие и мертвые вершины – это вершины дерева F_0, учтенные ровно с такими же коэффициентами, как при подсчете $\alpha'(F_0)$. Поэтому $\alpha'(F_0) = p + \frac{11}{15}$.

Построим новое базовое дерево F_1, присоединив к x вершины $a_1, a_2 \in V(F)$. За этот шаг мы получили доход $2 \cdot (\frac{13}{15} - \frac{2}{5}) = \frac{14}{15}$ и

$\alpha'(F_1) \geqslant \frac{25}{15} + p$. При $a_1, a_2 \notin T$ мы выиграем хотя бы $\frac{2}{5}$ и получим $\alpha'(F_1) \geqslant \frac{31}{15}$, что нам достаточно.

Пусть $a_1 \in T$, тогда $d_G(a_1) = 4$. Отметим, что a_1 – висячая вершина дерева F, и потому не смежна с отличными от x вершинами из W, а значит, смежна хотя бы с двумя отличными от a_2 вершинами из $V(F)$. Этих вершин нет в F_1, добавим их в дерево и получим новое дерево F_2. Если мы добавили более двух вершин, то получили доход хотя бы $p(A2)+p(A1) \geqslant \frac{8}{15}$ (добавление первых двух вершин – шаг $A2$, добавление следующей – шаг $A1$) и $\alpha'(F_2) > 2$.

Остается случай, когда таких вершин две, пусть это b_1, b_2. Отметим, что в этом случае вершины a_1 и a_2 смежны. Добавление двух вершин – это шаг $A2$ с доходом не менее $\frac{1}{15}$, поэтому $\alpha'(F_2) \geqslant \frac{26}{15} + p$. При $p \geqslant \frac{3}{15}$ этого ввиду леммы 2 достаточно. Для оставшихся шагов мы разберём два случая: a_2 – мёртвая (см. рис. 9, 2a) и живая (см. рис. 9, 2b) вершина дерева F_2 соответственно.

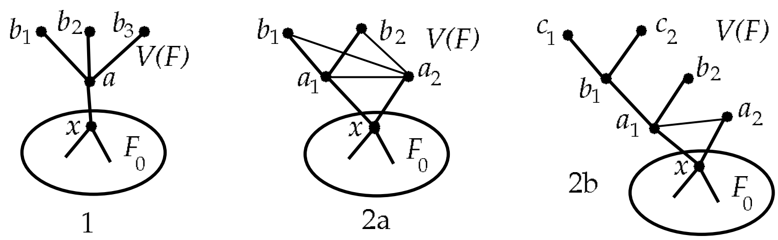

Рис. 9. Построение базового дерева.

а. *Пусть a_2 – мёртвая вершина дерева F_2.*
Это увеличивает доход на $\frac{2}{15}$ и обеспечивает $\alpha'(F_2) \geqslant \frac{28}{15} + p$. Обе вершины b_1, b_2 – живые вершины дерева F_2, иначе доход возрастает хотя бы на $\frac{2}{15}$ и мы получаем $\alpha'(F_2) \geqslant 2$. При $p \geqslant \frac{1}{15}$ в силу леммы 2 мы имеем $\alpha(G) \geqslant 2$. Остаются лишь шаги с нулевым доходом $M4.5.4$ и $M4.3$.

а1. *Шаг $M4.5.4$.*
Рассмотрим дальнейшее построение остовного дерева указанным выше алгоритмом. У дерева F_2 ровно 7 живых вершин, следовательно, в процессе построения стали мёртвыми не менее 7 живых вершин. Посмотрим на таблицу 1: любой шаг, уменьшающий количество живых вершин, приносит доход хотя бы $\frac{1}{15}$, причем ровно с таким доходом

можно уменьшить количество живых вершин только на 2 или на 5, то есть, меньше, чем на 7. Значит, за умертвление не менее 7 живых вершин мы получим доход хотя бы $\frac{2}{15}$ и $\alpha(G) \geqslant 2$.

а2. *Шаг* $M4.3$.
Рассмотрим дальнейшее построение остовного дерева указанным выше алгоритмом. У дерева F_2 ровно 4 живые вершины, следовательно, в процессе построения стали мёртвыми не менее 4 живых вершин. Нам нужно обеспечить суммарный доход оставшихся шагов не менее $\frac{2}{15}$. Уменьшение количества живых вершин всегда приносит доход хотя бы $\frac{1}{15}$. Единственное количество живых вершин, не меньшее 4, за умертвление которых мы получим менее $\frac{2}{15}$ – это 5. Но для получения 5 живых вершин нужно добавить ровно одну живую вершину, а за эту операцию мы получаем доход не менее $\frac{1}{15}$. В любом случае, мы получим $\alpha(G) \geqslant 2$.

б. *Пусть a_2 – живая вершина дерева F_2.*
Так как a_2 смежна с a_1, в этом случае хотя бы одна из вершин b_1, b_2 (пусть b_1) несмежна с a_2. Если $b_1 \notin T$, то доход увеличился на $\frac{1}{5}$, в результате $\alpha'(F_2) \geqslant \frac{29}{15}$ и по лемме 2 мы имеем $\alpha(G) \geqslant 2$.

Значит, $b_1 \in T$. Вершины дерева F_0 несмежны с $b_1 \in V(F)$, поэтому из $V(F_2)$ вершина b_1 смежна только с a_1 и, возможно, с b_2. Следовательно, b_1 смежна хотя бы с двумя вершинами не из $V(F_2)$, которые мы и добавим в дерево F_2, в результате получится дерево F_3. Если мы добавили более двух вершин, то получили доход хотя бы $p(A1)+p(A2) \geqslant \frac{8}{15}$. В этом случае очевидно, что $\alpha'(F_3) > 2$. Значит, добавлено ровно две вершины, пусть это c_1, c_2 (см. рис. 9, 2б). Мы считаем, что b_2, c_1, c_2 – живые вершины дерева F_3. Если среди них есть мертвые, то мы учтем это в конце построения с помощью шагов $Z0$.

Выполнив этот шаг $A2$, мы получили доход $\frac{1}{15}$ и $\alpha'(F_3) \geqslant \frac{27}{15}+p$. При $p \geqslant \frac{2}{15}$ мы имеем $\alpha' \geqslant \frac{29}{15}$ и по лемме 2 получим $\alpha(G) \geqslant 2$. Остаются лишь шаги с доходом менее $\frac{2}{15}$: это $M4.5.4$, $M4.3$ (с доходом 0), $M4.2$, $M4.5.3$, $M4.5.5$ (с доходом $\frac{1}{15}$).

б1. *Шаг* $M4.5.4$.
В этом случае в дереве F_3 ровно 9 живых вершин, $\alpha'(F_3) \geqslant \frac{27}{15}$. Рассмотрим дальнейшее построение остовного дерева указанным выше алгоритмом. За умертвление одним шагом любого количества висячих вершин, кроме 2 и 5, мы получаем доход не менее $\frac{2}{15}$ (можно умертвить за шаг 1, 2, 3, 4 или 5 висячих вершин, см. таблицу 1).

Поэтому единственное количество умертвленных вершин, не меньшее 9, за которое доход может быть менее $\frac{3}{15}$ – это 10 (доход $\frac{2}{15}$). Но для получения 10 вершин нужно добавить ровно одну живую вершину, а за эту операцию мы получаем доход не менее $\frac{1}{15}$. В любом случае, мы получим $\alpha(G) \geqslant 2$.

Замечание 12. Теперь случаи шагов $M4.5.4$ и $N4.5.4$ в лемме 3 полностью разобраны.

Пусть с помощью нашего алгоритма было построено остовное дерево T с $\alpha(T) < 2$ и в процессе построения остовного дерева выполнялся шаг $M4.5.4$ или $N4.5.4$. Пусть F – дерево, построенное перед шагом. Тогда хотя бы одна из добавленных на этом шаге вершин должна быть смежна с деревом F. Это может быть только одна из двух добавленных висячих вершин, смежных с p_1 (иначе был бы выполнен один из предыдущих шагов, см. рисунок 6 и описания шагов). Назовём эту вершину q.

Если $q \in T$ (в этом случае мы назовём шаги $M4.5.4.1$ и $N4.5.4.1$), то q смежна с двумя вершинами из $V(F)$ (по замечанию 6), что добавляет нам две мёртвые вершины. Таким образом,

$$p(M4.5.4.1) \geqslant p(M4.5.4) + 2 \cdot \frac{2}{15} \geqslant \frac{4}{15}, \quad \Delta u = 4, \quad \Delta b = 3,$$

$$p(N4.5.4.1) \geqslant p(N4.5.4) + 2 \cdot \frac{2}{15} \geqslant \frac{5}{15}, \quad \Delta u = 4, \quad \Delta b = 2.$$

Если $q \notin T$ (в этом случае мы назовём шаги $M4.5.4.2$ и $N4.5.4.2$), то добавляется одна мёртвая вершина и еще не менее $\frac{1}{5}$ в доход, так как цена вершины q уменьшается. В этом случае

$$p(M4.5.4.2) \geqslant p(M4.5.4) + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} \geqslant \frac{5}{15}, \quad \Delta u = 4, \quad \Delta b = 2,$$

$$p(N4.5.4.2) \geqslant p(N4.5.4) + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} \geqslant \frac{6}{15}, \quad \Delta u = 4, \quad \Delta b = 1.$$

Теперь можно утверждать, что любой увеличивающий число живых вершин шаг приносит доход хотя бы $\frac{1}{15}$. Это обстоятельство мы будем использовать в последующих рассуждениях.

Продолжим доказательство леммы 3.

б2. *Шаг* $M4.3$.
В этом случае в дереве F_3 ровно 6 живых вершин и $\alpha'(F_3) \geqslant \frac{27}{15}$. За умертвление любого количества живых вершин, большего 5, мы получаем доход не менее $\frac{2}{15}$, причём за 6 вершин мы получаем хотя бы $\frac{3}{15}$. А при увеличении количества живых вершин получим дополнительный доход не менее $\frac{1}{15}$. В любом случае, мы получим $\alpha(G) \geqslant 2$.

б3. *Шаги* $M4.2$, $M4.5.3$, $M4.5.5$.
В этих случаях $\alpha'(F_3) \geqslant \frac{28}{15}$. В дереве F_3 мы имеем 4 живых вершины для шага $M4.5.5$ и по 7 живых вершин в остальных случаях. Таким образом, мы должны умертвить хотя бы 4 живых вершины. За это мы либо получим доход не менее $\frac{2}{15}$, либо мы должны умертвить ровно 5 живых вершин (доход хотя бы $\frac{1}{15}$). В рассматриваемых случаях умертвить 5 живых вершин можно единственным способом: к 4 живым вершинам нужно одну добавить, но за это получается дополнительный доход хотя бы $\frac{1}{15}$. Во всех случаях получается $\alpha(G) \geqslant 2$.

□

Теперь в нашей таблице шагов произошли большие изменения, ниже приведём обновленный вариант – таблицу 2.

Замечание 13. 1) Анализируя таблицу 2, легко сделать следующие выводы:

– за любой шаг мы получаем доход хотя бы $\frac{1}{15}$;

– за один или несколько шагов, увеличивающих количество живых вершин на 2 или 5, мы получаем доход хотя бы $\frac{2}{15}$.

– шаг, не меняющий количества живых вершин, приносит доход хотя бы $\frac{3}{15}$.

2) Построение остовного дерева по нашему алгоритму заканчивается тогда и только тогда, когда все висячие вершины построенного дерева становятся мертвыми. Поэтому нетрудно понять, что у последнего шага построения параметр $\Delta u - \Delta b$ должен быть отрицательным.

Продолжим рассмотрение случаев в построении базового дерева.

В5. *В графе есть две смежные вершины* $a \in T$ *и* $b \in S$*, у которых* $\mathrm{N}_G(a) \cap \mathrm{N}_G(b) = \varnothing$.
Мы начнём построение с базового дерева F', в котором a и b соединены друг с другом и со всеми вершинами из их окрестностей. В таком дереве $u(F') = 5$, $c_G(F') \leqslant \frac{1}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = \frac{13}{5}$ и $\alpha'(F') \geqslant 5 \cdot \frac{13}{15} - c_G(F') \geqslant \frac{26}{15}$.

Таблица 2

Шаг	$\Delta u - \Delta b$	15·доход
$A1$	1	7
$A2$, $A4$	1	1
$A3$	2	2
$M1$, $M4.1.2$, $M4.5.1$, $N4.1.1$	0	3
$N1$, $N4.1.2$, $N4.5.1$, $M4.5.4.1$	1	4
$M2$, $N4.5.4.1$, $M4.5.4.2$	2	5
$N2$, $N4.5.4.2$	3	6
$M3.1$	−4	5
$N3.1$	−3	6
$M3.2$	−2	4
$N3.2$	−1	5
$M4.1.1$, $Z0$	−1	2
$Z1.1$	−4	2
$Z1.2$	−3	3
$Z2.1$	−5	1

Если хотя бы одна из висячих вершин дерева F' не принадлежит множеству T, это увеличит $\alpha'(F')$ на $\frac{1}{5}$ и сделает $\alpha'(F') \geqslant \frac{29}{15}$, чего с учётом леммы 2 нам достаточно.

Остаётся случай, когда все эти вершины – из T, то есть, имеют степень 4. Будем достраивать дерево по нашему алгоритму. Рассмотрим два варианта.

B5.1. *В процессе построения увеличивалось количество живых вершин.*

Изначально это количество равно 5. За умертвление любого количества живых вершин, большего 5, мы получим хотя бы $\frac{2}{15}$, причём ровно $\frac{2}{15}$ можно получить только за 7 или 10 вершин. Для остальных количеств мы получим за умертвление доход хотя бы $\frac{3}{15}$ и еще хотя бы $\frac{1}{15}$ за увеличение количества живых вершин и обеспечим $\alpha(G) \geqslant 2$.

Пусть количество живых вершин увеличилось до 7 или 10. По замечанию 13, мы на этом получили доход хотя бы $\frac{2}{15}$, после чего еще $\frac{2}{15}$ за умертвление живых вершин. И в этом случае получается $\alpha(G) \geqslant 2$.

B5.2. *В процессе построения не увеличивалось количество живых вершин.*

Предположим, что был выполнен какой-то шаг, не изменивший количество живых вершин и мы получили дерево F_1. По замечанию 13, этот шаг – не последний, а его доход был хотя бы $\frac{3}{15}$. Значит, $\alpha'(F_1) \geqslant \frac{29}{15}$, и по лемме 2 мы можем утверждать, что $\alpha(G) \geqslant 2$.

Остаётся случай, когда с базовым деревом F' производились только шаги, уменьшающие количество живых вершин. Нужно умертвить 5 живых вершин. Любой способ сделать это, кроме шага $Z2.1$, даст доход хотя бы $\frac{4}{15}$ и обеспечит $\alpha(G) \geqslant 2$. Значит, выполнен шаг $Z2.1$, добавивший две смежные вершины a' степени 4 и b' степени 3.

Таким образом, наш граф состоит из 9 вершин: в нем есть две копии дерева F' (с центрами a, b и a', b') с пятью общими висячими вершинами $x_1, x_2, x_3 \in \mathrm{N}_G(a)$ и $y_1, y_2 \in \mathrm{N}_G(b)$. Так как $d_G(x_1) = d_G(x_2) = d_G(x_3) = d_G(y_1) = d_G(y_2) = 4$, то $G(\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2\})$ – регулярный граф степени 2, то есть, цикл из пяти вершин. В любом случае, существуют два независимых ребра, соединяющих $\{x_1, x_2, x_3\}$ с $\{y_1, y_2\}$. Пусть это будут рёбра x_1y_1 и x_2y_2.

Можно считать, что x_1 и y_2 – несоседние вершины этого цикла из 5 вершин. Тогда $a, b, x_2, x_3, y_1 \in \mathrm{N}_G(x_1) \cup \mathrm{N}_G(y_2)$, причём одна из вершин x_2, x_3, y_1 входит в $\mathrm{N}_G(x_1) \cap \mathrm{N}_G(y_2)$.

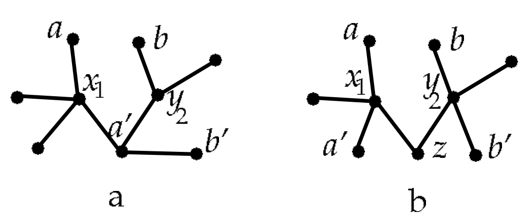

Рис. 10. Случай $B5.2$.

Если $a' \in \mathrm{N}_G(x_1) \cap \mathrm{N}_G(y_2)$, то построим остовное дерево, соединив a' с x_1 и y_2 и присоединив к ним все остальные вершины (вершину b' присоедним к a', см. рис. 10a). Аналогично в случае $b' \in \mathrm{N}_G(x_1) \cap \mathrm{N}_G(y_2)$. Остаётся случай, когда одна из вершин a' и b' смежна с x_1, а другая – с y_2. Тогда соединим x_1 и y_2 с вершиной из $\mathrm{N}_G(x_1) \cap \mathrm{N}_G(y_2)$ (выше сказано, почему такая есть – назовём ее вершиной z) и присоединим к этим двум вершинам все остальные (см. рис. 10b). В итоге получится остовное дерево с 6 висячими вершинами. Остается лишь отметить, что $6 > \frac{2}{5} \cdot 7 + \frac{1}{5} \cdot 2 + 2$.

Замечание 14. 1) В рассматриваемых далее случаях не выполняются шаги $Z2.1$ и $A4$ ввиду отсутствия разобранной в пункте $B5$ конфигурации.

2) Далее мы считаем, что любые две смежные вершины $a, b \in V(G)$ имеют общую смежную вершину. Действительно, пусть это не так и $\mathrm{N}_G(a) \cap \mathrm{N}_G(b) = \varnothing$. Случай $a, b \in S$ невозможен – мы выполнили бы редукцию $R2$. Если $a, b \in T$, то граф удовлетворял бы условию пункта $B1$. А в случаях, когда одна из вершин принадлежит множеству S, а другая – множеству T, граф удовлетворял бы условию пункта $B5$.

B6. *В графе нет вершин степени* 4.
Это означает, что G – регулярный граф степени 3. В работе [2] доказано, что в таком графе $u(G) \geqslant s \cdot \frac{1}{4} + 2$, откуда следует результат нашей теоремы.

Лемма 4. *Если $\alpha(G) < 2$, то после любого из шагов $M1$, $N1$, $M2$, $N2$, $M3.1$, $N3.1$, $M3.2$, $N3.2$, $M4.1.1$, $N4.1.1$, $M4.1.2$, $N4.1.2$, $M4.5.1$, $N4.5.1$, $M4.5.4.1$, $N4.5.4.1$, $M4.5.4.2$, $N4.5.4.2$ должна появиться дополнительная (по отношению к таблице 2) мёртвая вершина.*

Доказательство. В каждом из этих шагов одна из добавленных висячих вершин v была смежна с $V(F)$ (для шагов $M1$, $N1$, $M2$, $N2$, $M4.5.5.1$, $N4.5.4.1$, $M4.5.4.2$, $N4.5.4.2$ это было установлено в лемме 3, для шагов $M3.1$, $N3.1$, $M3.2$, $N3.2$ это установлено сразу после описания шага 3, для остальных шагов – следует из их описания).

Вспомним детали шагов. Во всех шагах мы к дереву F присоединяли некоторое поддерево (назовем его F_0, см. рисунок 11) через корень $x \in W$, где $W = V(G) \setminus V(F)$. Напомним, что все вершины из W, смежные с $V(F)$, называются вершинами уровня 1.

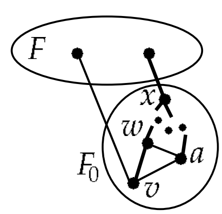

Рис. 11. Дополнительная мертвая вершина.

Таблица 3

Шаг	$\Delta u - \Delta b$	15·доход
$A1$	1	7
$A2$	1	1
$A3$	2	2
$M1$, $M4.1.2$, $M4.5.1$, $N4.1.1$	-1	5
$N1$, $N4.1.2$, $N4.5.1$, $M4.5.4.1$	0	6
$M2$, $N4.5.4.1$, $M4.5.4.2$	1	7
$N2$, $N4.5.4.2$	2	8
$M3.1$	-5	7
$N3.1$	-4	8
$M3.2$	-3	6
$N3.2$	-2	7
$M4.1.1$	-2	4
$Z0$	-1	2
$Z1.1$	-4	2
$Z1.2$	-3	3

Отметим, что $v \neq x$ (вершина x во всех шагах – невисячая). Тогда существует $w \in W$ – предок v в добавленном поддереве F_0. По замечанию 14 мы имеем $\mathrm{N}_G(v) \cap \mathrm{N}_G(w) \neq \varnothing$.

Пусть a – вершина, смежная и с v, и с w. Понятно, что $a \notin V(F)$, так как ни одна вершина из $V(F)$ не смежна с двумя вершинами из W по замечанию 6. Вершина w – невисячая в полученном после шага дереве. Тогда по построению все смежные с w вершины лежат в $V(F) \cup V(F_0)$ (в этом несложно убедиться, просмотрев детали шагов). Следовательно, $a \in V(F_0)$. Таким образом, v имеет две смежные вершины $w, a \in W$, вошедшие в построенное после шага дерево. Вершина $v \in W$ – вершина уровня 1, так как смежна с $V(F)$. Тогда по замечанию 6, вершина v не может быть смежна более чем с двумя вершинами из W, поэтому v после окончания шага будет мёртвой вершиной, которая не учтена в параметрах шага. $\square$

Перед последним и самым сложным случаем перепишем нашу таблицу шагов, добавив в указанные в лемме 4 шаги по мёртвой вершине и доход за нее. Кроме того, уберем шаги $Z2.1$ и $A4$, невозможные ввиду замечания 14. Обновленные параметры шагов приведены в таблице 3.

B7. *Граф не удовлетворяет условию ни одного из предыдущих случаев.*
Тогда в графе есть вершина a степени 4. Если соединить a с вершинами из ее окрестности, получится дерево F' с 4 висячими вершинами v_1, v_2, v_3, v_4 и $\alpha'(F') \geqslant 4 \cdot \frac{13}{15} - 5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{22}{15}$. Продолжим построение по нашему алгоритму. Подсчитаем суммарное количество прибавок живых вершин на шагах, когда их изменение положительно и обозначим его через ℓ. Уменьшающие количество живых вершин шаги должны умертвить $\ell + 4$ вершины. Разберём несколько случаев.

B7.1. $\ell \geqslant 2$.
Из таблицы 3 видно, что добавив ℓ живых вершин мы получили доход не менее $\frac{\ell}{15}$. При $\ell = 2$ мы должны умертвить 6 живых вершин, минимальный доход за это равен $\frac{6}{15}$, получаем $\alpha(G) \geqslant 2$.

При $\ell = 3$ мы должны умертвить 7 живых вершин, минимальный доход за это равен $\frac{5}{15}$, получаем $\alpha(G) \geqslant 2$.

При $\ell \geqslant 4$ мы должны умертвить не менее 8 живых вершин, минимальный доход за это не менее $\frac{4}{15}$, получаем $\alpha(G) \geqslant 2$.

B7.2. $\ell = 0$.
По замечанию 13 последний шаг должен иметь отрицательный параметр $\Delta u - \Delta b$. Из таблицы 3 легко видеть, что такой шаг добавляет в доход не менее $\frac{2}{15}$. Если был сделан шаг, не изменяющий количество живых вершин, за него получен доход не менее $\frac{6}{15}$, тогда $\alpha(G) \geqslant 2$.

Значит, выполнялись только шаги, уменьшающие количество живых вершин. Из таблицы 3 видно, что существуют два способа умертвить 4 живых вершины, заработав менее $\frac{8}{15}$ (и не обеспечив $\alpha(G) \geqslant 2$) – это шаг $Z0$ вместе с шагом $Z1.2$ (суммарный доход $\frac{5}{15}$) и шаг $Z1.1$ (доход $\frac{2}{15}$).

B7.2.1. *Выполнены шаг $Z0$ и шаг $Z1.2$.*
Мы получаем доход $\frac{5}{15}$, итого $\alpha(G) \geqslant \frac{27}{15}$. Если хотя бы одна из висячих вершин дерева F' не из T, доход вырастет хотя бы на $\frac{3}{15}$, получится $\alpha \geqslant 2$. Значит, все эти вершины из T и имеют степень 4 в графе G. Тогда в графе G ровно 6 вершин: 5 вершин степени 4 и одна вершина степени 3 (добавленная на шаге $Z1.2$). Очевидно, это невозможно.

B7.2.2. *Выполнен шаг $Z1.1$.*
Мы получаем доход $\frac{2}{15}$, итого $\alpha(G) \geqslant \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$. Добавленная на последнем шаге вершина имеет степень 4. Если хотя бы две из вершин v_1, v_2, v_3, v_4 не принадлежат T, доход увеличивается на $\frac{6}{15}$ и $\alpha(G) \geqslant 2$.

Если одна из них не принадлежит T, мы получаем граф на 5 вершинах степени 4 и одной вершине степени 3, что невозможно. Значит, $\alpha(G) < 2$ может быть только у регулярного графа степени 4 на 6 вершинах, нетрудно понять, что единственный такой граф – это C_6^2, который действительно является графом-исключением ($\alpha(C_6^2) = \frac{8}{5}$).

B7.3. $\ell = 1$.
То есть, мы сделали ровно один шаг, увеличивающий количество живых вершин на 1. Из таблицы 3 видно, что либо это шаг $A2$, либо мы получили доход хотя бы $\frac{7}{15}$ и дерево F_1 с $\alpha'(F_1) \geqslant \frac{29}{15}$, что достаточно для $\alpha(G) \geqslant 2$.

Значит, мы сделали ровно один шаг $A2$ с доходом $\frac{1}{15}$ и получили дерево F_1 с $\alpha'(F_1) \geqslant \frac{23}{15}$. Как и в предыдущем пункте, если мы сделали шаг, не изменяющий количество живых вершин, то $\alpha(G) \geqslant 2$. Значит, шаг $A2$ был единственным, кроме шагов, уменьшающих число живых вершин. Из таблицы 3 видно, что существует единственный способ умертвить 5 живых вершин, заработав менее $\frac{7}{15}$ (и, таким образом, не обеспечив $\alpha \geqslant 2$) – это шаг $Z0$ вместе с шагом $Z1.1$ (доход $\frac{4}{15}$, добавляет вершину степени 4). Суммарный доход всех этих шагов обеспечивает $\alpha(G) \geqslant \frac{27}{15}$.

Если хотя бы одна из вершин v_1, v_2, v_3, v_4 или двух вершин, добавленных на шаге $A2$, имеет степень 3, то доход увеличивается на $\frac{3}{15}$ и обеспечивает $\alpha(G) \geqslant 2$. В оставшемся случае G – регулярный граф степени 4 на 8 вершинах.

По замечанию 14 каждое ребро графа G должно входить в треугольник. Убедимся, что с точностью до изоморфизма существует два 4-регулярных графа на 8 вершинах, которые удовлетворяют этому условию. Если G является вершинно 4-связным графом, то воспользуемся работой [5] – там доказано, что G – это C_n^2 или рёберный граф 4-циклически-связного кубического графа. Вторая возможность отпадает, так как количество вершин такого рёберного графа должно делиться на 3, а первая возможность даёт граф C_8^2.

Пусть G имеет разделяющее множество R менее чем из 4 вершин. Нетрудно понять, что множество из $4-k$ вершин не может отделить в 4-регулярном графе компоненту связности, содержащую менее $k+1$ вершины, поэтому $|R| \geqslant 2$.

Если $|R| = 2$, то существует единственная возможность: множество R должно разделять граф на две компоненты связности из трёх вершин, причём все эти 6 вершин должны быть смежны с двумя вершинами множества R. Тогда степени вершин из R будут по 6, противоречие.

Пусть $|R| = 3$, $R = \{r_1, r_2, r_3\}$. Тогда одна из компонент связности содержит две вершины (пусть это a_1, a_2), а другая – три вершины (b_1, b_2, b_3). Легко понять, что a_1 и a_2 смежны и каждая из них смежна с r_1, r_2, r_3 (иначе $d_G(a_i) < 4$). От каждой из вершин r_1, r_2, r_3 выходит не более, чем по два ребра к b_1, b_2, b_3, значит, сумма степеней вершин в графе $G(\{b_1, b_2, b_3\})$ не менее 6, то есть, это треугольник. Значит, от каждой из вершин r_1, r_2, r_3 выходит ровно по два ребра к b_1, b_2, b_3, то есть, r_1, r_2, r_3 попарно не смежны. Теперь двудольный граф с долями $\{r_1, r_2, r_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$ определяется однозначно – это $K_{3,3}$ без паросочетания. Полученный граф – это граф G_8, изображенный на рисунке 1.

2.5. Редукция и контрпримеры.

Докажем, что если к графу G хотя бы один раз было применено редукционное правило $R1$ или $R2$, то G – не исключение.

Как мы знаем, применение правил $R1$ и $R2$ не может уменьшить $\alpha(G)$. Значит, достаточно доказать, что $\alpha(G) \geqslant 2$ для графа G, из которого с помощью $R1$ или $R2$ получен один из графов C_6^2, C_8^2 или G_8. Рассмотрим 6 случаев.

1. *После применения $R1$ получился граф C_6^2.*
Пусть из нашего графа G получился квадрат цикла $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ после того, как на одном из рёбер убрали вершину w степени 2. Не умаляя общности положим, что вершина w была на ребре a_1a_2 или a_1a_3. В обоих случаях легко построить остовные деревья с 5 висячими вершинами: см. рис. 12a и 12b. Значит, $u(G) \geqslant 5 > 6 \cdot \frac{2}{5} + 2$ и $\alpha(G) > 2$.

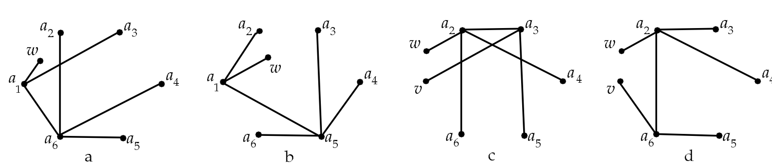

Рис. 12. Редукция: случай C_6^2.

2. *После применения* $R2$ *получился граф* C_6^2.
Обозначения оставим, как в предыдущем случае, пусть после склеивания двух вершин v и w степени 3 образовалась вершина a_1. Пусть вершина a_2 смежна в графе G с w. Если a_3 смежна в G с v, мы построим остовное дерево с 5 висячими вершинами, как на рисунке 12c. Если a_3 смежна в G с w, то вершина a_6 смежна в графе G с v и мы построим остовное дерево с 5 висячими вершинами, как на рисунке 12d. Таким образом, $u(G) \geqslant 5$ и $\alpha(G) > 2$.

3. *После применения* $R1$ *получился граф* C_8^2.
Пусть из нашего графа G получился квадрат цикла $a_1a_2\dots a_8$ после того, как на одном из рёбер убрали вершину w степени 2. Не умаляя общности положим, что вершина w была на ребре a_1a_2 или a_1a_3. В первом случае построим остовное дерево с 6 висячими вершинами, как на рисунке 13a, а во втором случае – как на рисунке 13b. Таким образом, $u(G) \geqslant 6 > 8 \cdot \frac{2}{5} + 2$ и $\alpha(G) > 2$.

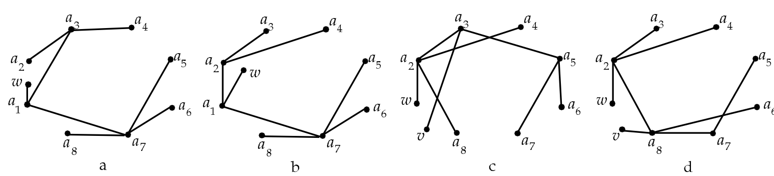

Рис. 13. Редукция: случай C_8^2.

4. *После применения* $R2$ *получился граф* C_8^2.
Обозначения оставим, как в предыдущем случае, пусть после склеивания двух вершин v и w степени 3 образовалась вершина a_1. Пусть вершина a_2 смежна в графе G с w.

Если a_3 смежна в G с v, мы построим остовное дерево с 6 висячими вершинами, как на рисунке 13c. Если a_3 смежна в G с w, то вершина a_8 смежна в графе G с v и мы построим остовное дерево с 6 висячими вершинами, как на рисунке 13d. Таким образом, $u(G) \geqslant 6$ и $\alpha(G) > 2$.

5. *После применения* $R1$ *получился граф* G_8.
Будем использовать для графа G_8 обозначения, как на рисунке 1в. В силу симметрии достаточно разобрать четыре случая расположения вершины w в графе G на одном из ребер графа G_8: на a_1a_2 (остовное дерево с 6 висячими вершинами изображено на рисунке 14a), b_1b_3 (рисунок 14b), r_3b_3 (рисунок 14c) и r_3a_1 (рисунок 14d). Тем самым,

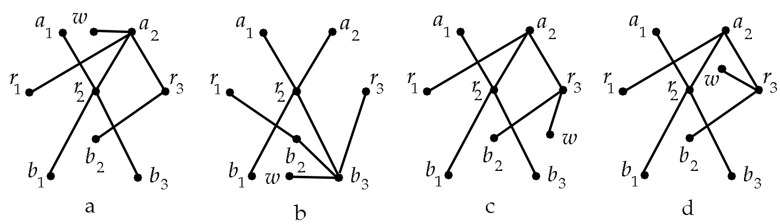

Рис. 14. Редукция: случай графа G_8 и правила $R1$.

в любом случае построено остовное дерево графа G с 6 вершинами, $u(G) \geqslant 6$ и $\alpha(G) > 2$.

6. *После применения $R2$ получился граф G_8.*
Обозначения оставим, как в предыдущем случае. В силу симметрии графа возможны три принципиально разных варианта: после склеивания двух вершин v и w степени 3 в графе G образовалась вершина a_1, b_1, r_1 соответственно.

Если образовалась вершина a_1, то $\mathrm{N}_G(\{w,v\}) = \{a_2, r_1, r_2, r_3\}$. Рассмотрим дерево F_1, изображенное на рисунке 15a. В нем три невисячих вершины a_2, r_2, r_3 и каждая из вершин w и v смежна в графе G с одной из них. Тем самым, F_1 можно преобразовать в остовное дерево графа G с 6 висячими вершинами.

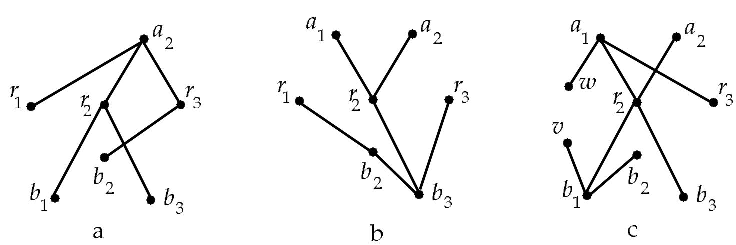

Рис. 15. Редукция: случай графа G_8 и правила $R2$.

Если образовалась вершина b_1, то $\mathrm{N}_G(\{w,v\}) = \{b_2, b_3, r_1, r_2\}$. Рассмотрим дерево F_2, изображенное на рисунке 15b. В нём три невисячих вершины b_2, b_3, r_2 и каждая из вершин w и v смежна с одной из них. Тем самым, F_2 можно преобразовать в остовное дерево графа G с 6 висячими вершинами.

Пусть образовалась вершина r_1, тогда $\mathrm{N}_G(\{w,v\}) = \{a_1,a_2,b_1,b_2\}$. В силу симметрии возможны два принципиально разных случая:

– $a_1, a_2 \in \mathrm{N}_G(w)$, $\quad b_1, b_2 \in \mathrm{N}_G(v)$;

– $a_1, b_2 \in \mathrm{N}_G(w)$, $\quad a_2, b_1 \in \mathrm{N}_G(v)$.

В обоих случаях построим остовное дерево с 6 вершинами в графе G, как на рисунке 15c.

Таким образом, в любом случае $u(G) \geqslant 6$ и $\alpha(G) > 2$.

Теперь мы полностью доказали теорему 1.

§3. Экстремальные примеры

Существует много бесконечных серий примеров графов G, содержащих $s > 0$ вершин степени 3 и $t > 0$ вершин степени более 3, для которых $u(G) = \frac{2}{5}t + \frac{1}{4}s + 2$. Мы приведём пример серии графов, все вершины которых имеют степени 3 и 4. Таким образом, графы этой серии являются также обещанными во введении контрпримерами к сильной гипотезе Линиала.

Приступим к построению. Ключевой деталью нашего построения будет следующий граф D_i: к графу K_4 на вершинах x_i, y_i, z_i, v_i добавлены вершина a_i, смежная с x_i и y_i, и вершина b_i, смежная с z_i и v_i. Графы $D_1, \ldots, D_n$ (где $n > 1$) мы расположим по циклу и соединим a_{i+1} с b_i (мы считаем, что $n+1 = 1$). Полученный граф обозначим H_n (см. рисунок 16), очевидно, $c(H_n) = 2n \cdot \frac{1}{5} + 4n \cdot \frac{2}{5} = 2n$.

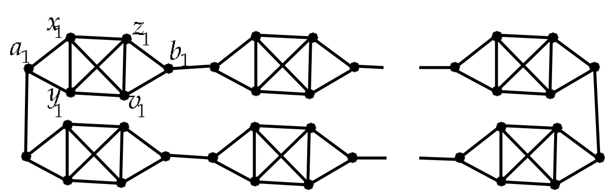

Рис. 16. Экстремальные примеры.

Отметим, что множество висячих вершин остовного дерева T не является разделяющим в графе H_n. С помощью этого факта несложно показать, что $u(H_n) = 2n + 2$.

Литература

1. J. A. Storer, *Constructing full spanning trees for cubic graphs.* — Inform. Process. Lett. **13**, No. 1 (1981), 8–11.

2. D. J. Kleitman, D. B. West, *Spanning trees with many leaves.* — SIAM J. Discrete Math. **4** , No 1 (1991), 99–106.
3. J. R. Griggs, M. Wu, *Spanning trees in graphs of minimum degree* 4 *or* 5. — Discrete Math., **104** (1992), 167–183.
4. N. Alon, *Transversal numbers of uniform hypergraphs.* — Graphs and Combinatorics **6** (1990), 1–4.
5. N. Martinov, *A recursive characterization of the* 4*-connected graphs.* — Discrete Math. **84**, No. 1 (1990), 105–108.
6. G. Ding, T. Johnson, P. Seymour, *Spanning trees with many leaves.* — J. Graph Theory **37**, No. 4 (2001), 189–197.
7. Y. Caro, D. B. West, R. Yuster, *Connected domination and spanning trees with many leaves.* — SIAM J. Discrete Math. **13**, No. 2 (2000), 202–211.
8. P. S. Bonsma, *Spanning trees with many leaves in graphs with minimum degree three.* — SIAM J. Discrete Math. **22**, No. 3 (2008), 920–937.
9. P. S. Bonsma, F. Zickfeld, *Spanning trees with many leaves in graphs without diamonds and blossoms.* — Lecture Notes Comput. Sci. **4957**, Springer, Berlin (2008).
10. Н. В. Гравин, *Построение остовного дерева графа с большим количеством листьев.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 31–46.
11. Д. В. Карпов, *Остовное дерево с большим количеством висячих вершин.* — Зап. научн.семин. ПОМИ **381** (2010), 78–87.
12. А. В. Банкевич, Д. В. Карпов, *Оценки количества висячих вершин в остовных деревьях.* — Зап. научн.семин. ПОМИ **391** (2011), 18–34.

Karpov D. V. Spanning trees with many leaves: new lower bounds in terms of number of vertices of degree 3 and at least 4.

We prove that every connected graph with s vertices of degree 3 and t vertices of degree at least 4 has a spanning tree with $\frac{2}{5}t + \frac{1}{5}s + \alpha$ leaves, where $\alpha \geqslant \frac{8}{5}$. Moreover, $\alpha \geqslant 2$ for all graphs besides three exclusions. All exclusion are regular graphs of degree 4, they are explicitly described in the paper.

We present an infinite series of graphs, containing only vertices of degrees 3 and 4, for which the maximal number of leaves in a spanning tree is equal for $\frac{2}{5}t + \frac{1}{5}s + 2$. Therefore we prove that our bound is tight.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dvk0@yandex.ru

Поступило 3 ноября 2012 г.