

Д. В. Карпов

## ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА РЁБЕР В ДВУДОЛЬНОМ ПОЧТИ ПЛАНАРНОМ ГРАФЕ

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Мы будем рассматривать графы без петель и кратных рёбер. В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множество вершин графа  $G$  мы будем обозначать через  $V(G)$ , множество рёбер — через  $E(G)$ , для количества вершин и рёбер будем использовать обозначения  $v(G)$  и  $e(G)$  соответственно.

Через  $d_G(x)$  обозначим степень вершины  $x$  в графе  $G$ . Минимальную степень вершины графа  $G$ , как обычно, обозначим через  $\delta(G)$ , а максимальную — через  $\Delta(G)$ .

Во многих работах (например, в [1]) доказываются оценки на количество пересечений рёбер в плоском изображении графов. Мы не будем делать обзор результатов этого направления. Наша работа посвящена, по-прежнему, но гораздо менее популярному вопросу: о возможности изображения графов на плоскости с ограничением на количество рёбер, которые могут пересекать одно ребро.

**Определение 1.** 1) Пусть  $k$  — неотрицательное целое число. Назовём граф  $k$ -почти планарным, если его можно изобразить на плоскости так, что каждое ребро пересекает не более, чем  $k$  других.

При  $k = 1$  мы будем называть такой граф просто почти планарным.

2) Через  $st(G)$  обозначим минимальное количество пар пересекающихся рёбер в изображении графа  $G$  на плоскости.

Нетрудно понять, что 0-почти планарный граф — это просто планарный граф. Как всегда, когда говорится об изображении графа на плоскости, мы считаем, что вершины изображаются как точки, а рёбра — как “хорошие” несамопересекающиеся кривые, не проходящие

---

*Ключевые слова:* планарные графы, число пересечений, двудольные графы.

Исследования выполнены при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН, гранта Президента РФ НШ-5282.2010.1, гранта РФФИ No. 11-01-00760-а и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 г.

через вершины, отличные от концов ребра. Никакие три кривые, соответствующие рёбрам, не могут иметь общей внутренней точки, то есть, каждая точка пересечения рёбер принадлежит ровно двум рёбрам.

Широко известный классический факт говорит нам, что в планарном графе на  $v$  вершинах не более, чем  $3v - 6$  ребер. Оценка точна для любого  $v \geq 3$ . В работе [1] доказано, что  $e(G) \leq (k + 3)(v(G) - 2)$  для  $k$ -планарного графа  $G$  при  $1 \leq k \leq 4$ . При подстановке в этот результат  $k = 0$  получается классический результат для планарных графов. В той же работе для  $k = 1$  и  $k = 2$  построены бесконечные серии примеров графов, на которых достигается равенство. Показано, что для  $k = 1$  оценка достигается для всех  $v \geq 12$ . При  $k = 2$  оценка точна для достаточно больших  $v \equiv 2 \pmod{3}$ . Там же показано, что при  $k > 0$  для  $k$ -почти планарного графа  $G$  выполняется неравенство  $e(G) \leq 4.108\sqrt{k} \cdot v(G)$ .

Существуют и другие работы похожей тематики, но авторы в них исследуют много более сложные объекты. Например *k-квази-планарные графы* (графы, которые можно изобразить на плоскости так, чтобы граф пересечения рёбер не содержал клики размера  $k$ , см., например, [2–4]). Этот класс графов имеет много общего с  $k$ -почти планарными, но такие графы могут иметь намного более сложную структуру. Также отметим работы, посвященные вопросам об изображении графов с запретами на некоторые плоские конфигурации (см. например, [5, 6]).

Мы же вернемся к достаточно простому классу графов – почти планарным графам. Итак, для почти планарных графов мы имеем неравенство  $e(G) \leq 4v(G) - 8$ . В то же время широко известный классический факт говорит нам, что в двудольном планарном графе на  $v$  вершинах – не более, чем  $2v - 4$  ребер, эта оценка точна для любого  $v \geq 3$ . В нашей работе мы исследуем двудольные почти планарные графы и найдём точную верхнюю оценку на количество рёбер в двудольном почти планарном графе для любого количества вершин  $v \geq 4$ .

**Теорема 1.** *Для каждого  $v \geq 4$  обозначим через  $\beta(v)$  наибольшее возможное количество рёбер в двудольном почти планарном графе на  $v$  вершинах. Тогда  $\beta(v) = 3v - 8$ , если  $v$  чётно и не равно 6 и  $\beta(v) = 3v - 9$ , если  $v$  нечётно или равно 6.*

## §2. ИЗОБРАЖЕНИЕ ГРАФА

Почти планарный граф можно по-разному изобразить на плоскости. Чтобы избежать путаницы, мы будем обозначать изображение графа  $G$  другим шрифтом:  $\mathcal{G}$ . Мы определим требования к изображению почти планарного графа. Начнем с четырёх условий.

- 1°. Каждое ребро пересекает не более, чем одно другое.
- 2°. Никакое ребро не пересекает само себя.
- 3°. Никакие два пересекающихся ребра не имеют общего конца.
- 4°. Любые два пересекающихся ребра пересекаются ровно в одной точке.

**Лемма 1.** Для любого почти планарного графа  $G$  существует изображение  $\mathcal{G}$ , удовлетворяющее условию 1°–4°.

**Доказательство.** Рассмотрим изображение  $\mathcal{G}$  графа  $G$ , удовлетворяющее условию 1° (такое, очевидно, существует), в котором количество точек пересечения рёбер – минимальное среди всех таких изображений.

Докажем, что  $\mathcal{G}$  удовлетворяет условию 2°. Предположим противное и рассмотрим ребро  $e = ab$ , изображённое с самопересечениями. Пусть это ребро более одного раза проходит через точку  $Z$ . Тогда от изображения этого ребра достаточно оставить участок от  $a$  до ближнего к  $a$  посещения точки  $Z$  и участок от  $b$  до ближнего к  $b$  посещения точки  $Z$ . В результате получится изображение с меньшим числом точек пересечения рёбер, противоречие.

Докажем, что  $\mathcal{G}$  удовлетворяет условиям 3° и 4°. Предположим, что  $\mathcal{G}$  не удовлетворяет какому-то из этих условий. Тогда есть два ребра  $u_1u_2$  и  $v_1v_2$ , имеющих хотя бы две точки пересечения. Ни одно из этих рёбер не имеет пересечения с другими рёбрами. Пусть  $X$  и  $Y$  – соответственно первая и последняя точки пересечения рёбер  $u_1u_2$  и  $v_1v_2$  при следовании по ребру  $v_1v_2$  от  $v_1$  к  $v_2$  (см. рис. 1а). Если рёбра  $u_1u_2$  и  $v_1v_2$  имеют общий конец, то он только один и мы будем считать, что это точка  $Y$ .

Отметим на участке  $v_1X$  ребра  $v_1v_2$  точку  $X'$  очень близко к  $X$  и заменим  $X'Y$ -участок ребра  $v_1v_2$  на  $X'Y$ -путь  $S$  вдоль ребра  $u_1u_2$  (см. пунктир на рис. 1а), этот путь не пересекает никаких рёбер (кроме замененного участка ребра  $v_1v_2$ , что нам не мешает). Тем самым мы точно избавимся от пересечения рёбер в точке  $X$  и уменьшим число

точек пересечения рёбер как минимум на 1, что противоречит выбору изображения  $\mathcal{G}$ .  $\square$

Далее все изображения почти планарных графов будут удовлетворять условиям  $1^\circ-4^\circ$ .

**Определение 2.** Назовём *двудольный почти планарный граф*  $G$  *максимальным*, если при добавлении любого ребра граф утрачивает хотя бы одно из свойств почти планарности или двудольности.

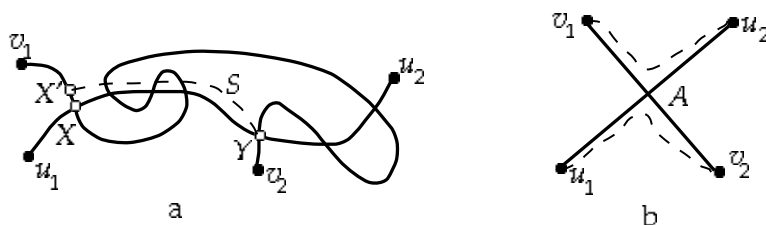


Рис. 1. Пересекающиеся рёбра.

Рассмотрим изображение  $\mathcal{G}$  двудольного почти планарного графа  $G$  и покрасим все вершины правильным образом в цвета 1 и 2. Пересекающиеся рёбра, очевидно, разбиваются на пары. Никакое другое ребро не может пересекать ни одно ребро из пары пересекающихся.

Рассмотрим любую пару пересекающихся ребер  $u_1u_2$  и  $v_1v_2$ , пусть вершины  $u_1$  и  $v_1$  имеют цвет 1, а  $u_2$  и  $v_2$  – цвет 2, пусть  $A$  – точка пересечения ребер. Не умаляя общности можно считать, что ребра расположены таким образом, что части ребер  $Au_1, Av_1, Au_2, Av_2$  следуют друг за другом по часовой стрелке (см. рис. 1b). Покрасим эти части ребер в тот же цвет, что их концы ( $Au_1$  и  $Av_1$  – в цвет 1,  $Au_2$  и  $Av_2$  – в цвет 2).

Тогда для части  $Au_1$  справа (по часовой стрелке) расположена часть того же цвета  $Av_1$ , а слева – часть другого цвета  $Av_2$ . То же самое верно и для  $Au_2$  (часть того же цвета расположена справа, а часть другого цвета расположена слева). Для частей  $Av_1$  и  $Av_2$  выполняется обратная закономерность: часть того же цвета располагается слева (против часовой стрелки). Это обстоятельство позволяет различать ребра  $u_1u_2$  и  $v_1v_2$ .

**Определение 3.** Назовём ребро  $u_1u_2$  правым, а ребро  $v_1v_2$  – левым. Аналогично поступим для любой пары пересекающихся рёбер.

Будем называть ребро изображения  $\mathcal{G}$  простым, если оно не пересекается с другими ребрами. Обозначим количество простых рёбер изображения  $\mathcal{G}$  через  $p(\mathcal{G})$ . Количество пар пересекающихся рёбер изображения  $G$  обозначим через  $t(\mathcal{G})$ .

Таким образом, все рёбра изображения нашего графа разбиты на три множества – простые, правые и левые, причем количество левых рёбер равно количеству правых рёбер и равно  $t(\mathcal{G}) = \frac{e(G) - p(\mathcal{G})}{2}$ .

Вернёмся к описанной выше паре пересекающихся рёбер  $u_1u_2$  и  $v_1v_2$  и сформулируем еще одно условие, выполнение которого мы потребуем от изображения максимального графа.

5° Пусть  $u_1u_2$  и  $v_1v_2$  – пара пересекающихся рёбер, причем вершины  $u_1$  и  $v_1$  имеют цвет 1, а вершины  $u_2$  и  $v_2$  имеют цвет 2. Тогда рёбра  $u_1v_2$  и  $u_2v_1$  принадлежат  $E(G)$  и являются простыми в изображении  $\mathcal{G}$ .

Объясним, почему изображение с минимальным числом пересечений  $\mathcal{G}$  максимального графа  $G$  удовлетворяет условию 5°. Ребро  $u_1v_2$  можно провести “почти” по пути  $u_1Av_2$ , а ребро  $u_2v_1$  – “почти” по пути  $u_2Av_1$  (см. рис. 1b). Из максимальной графа  $G$  следует, что  $u_1v_2, u_2v_1 \in E(G)$ . Если какое-то из этих рёбер – не простое в  $\mathcal{G}$ , то перерисуем его, как сказано выше. В результате уменьшится число пересечений, значит, после нескольких таких операций условие 5° выполнится.

**Определение 4.** Назовём изображение максимального почти планарного двудольного графа  $G$  правильным, если выполняются условия 1°–5°.

В следующих леммах и определениях  $G$  – максимальный почти планарный двудольный граф, а  $\mathcal{G}$  – его правильное изображение.

### §3. Доказательство оценки

Мы будем вести доказательство оценки из теоремы 1 индукцией по количеству вершин. Базу для графа на четырёх вершинах легко проверить. Далее мы предполагаем, что в графе  $G$  более четырёх вершин, а для всех меньших графов утверждение уже доказано.

**3.1. Левые, правые и простые рёбра.** Нам понадобится несколько лемм о свойствах правильных изображений.

**Лемма 2.** Пусть  $ux_1, vx_2$  и  $uy_1, vy_2$  – две пары пересекающихся рёбер в правильном изображении  $\mathcal{G}$ , причем рёбра  $vx_2$  и  $vy_2$  – правые в своих парах, а вершины  $u$  и  $v$  – разных цветов. Тогда  $e(G) \leq 3v(G) - 11$ .

**Доказательство.** Пусть  $A$  – точка пересечения  $ux_1$  и  $vx_2$ , а  $B$  – точка пересечения  $uy_1$  и  $vy_2$  (см. рис. 2а). Ориентируем части наших рёбер следующим образом:  $A \rightarrow v \rightarrow B \rightarrow u \rightarrow A$  и получим ориентированный цикл  $C$ , делящий плоскость на две части. Мы хотим доказать, что одна из этих частей содержит  $x_1$  и  $x_2$ , а другая –  $y_1$  и  $y_2$ .

Понятно, что вершины  $u, x_2, y_2$  – одного цвета, а  $v, x_1, y_1$  – другого цвета. При обходе по циклу  $C$  в указанном направлении вершины  $x_2$  и  $x_1$  окажутся справа. (Так как ребро  $vx_2$  – правое, а  $v$  и  $x_1$  – одного цвета, то путь  $Ax_1$  расположен справа от пути  $Av$ ). Так как ребро  $uy_1$  – левое, то по аналогичным соображениям при обходе по циклу  $C$  вершины  $y_2$  и  $y_1$  окажутся слева (см. рис. 2а).

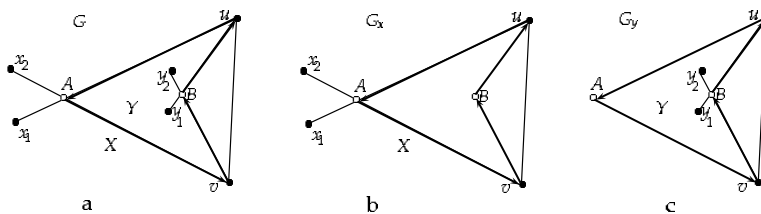


Рис. 2. Графы  $G, G_x$  и  $G_y$ .

Разрежем плоскость по циклу  $C$  на части  $X$  (содержащую  $x_1, x_2$ ) и  $Y$  (содержащую  $y_1, y_2$ ). Будем считать, что вершины  $u$  и  $v$  принадлежат обеим частям. Пусть  $G_x$  – индуцированный подграф  $G$  на вершинах из  $X$  (см. рис. 2b), а  $G_y$  – индуцированный подграф  $G$  на вершинах из  $Y$  (см. рис. 2c). Отметим, что никакое ребро графа  $G$  не может пересекать цикл  $C$ , поэтому  $E(G) = E(G_x) \cup E(G_y)$ . Кроме того,

$$V(G_x) \cap V(G_y) = \{u, v\}, \quad E(G_x) \cap E(G_y) = \{uv\}$$

(по условию  $5^\circ$  вершины  $u$  и  $v$  смежны). Очевидно,  $4 \leq v(G_x) < v(G)$  и  $4 \leq v(G_y) < v(G)$ . Для меньших графов  $G_x$  и  $G_y$  оценка из теоремы 1

уже доказана, поэтому

$$\begin{aligned} e(G) &= e(G_x) + e(G_y) - 1 \leq (3v(G_x) - 8) + (3v(G_y) - 8) - 1 \\ &= 3(v(G_x) + v(G_y) - 2) - 11 = 3v(G) - 11. \quad \square \end{aligned}$$

**Замечание 1.** Если в условии леммы 2 вершины  $u$  и  $v$  — одного цвета, то аналогично доказывается неравенство  $e(G) \leq 3v(G) - 10$ . Единственная разница в том, что в графах  $G_x$  и  $G_y$  в этом случае нет ребра  $uv$ . Однако, нам это утверждение не понадобится.

**Лемма 3.** Пусть  $e(G) \geq 3v(G) - 10$ . Тогда для любой вершины  $w$  правильного изображения  $\mathcal{G}$  и количество инцидентных  $w$  правых ребер, и количество инцидентных  $w$  левых ребер не превосходит количества инцидентных  $w$  простых ребер.

**Доказательство.** Очевидно, достаточно доказать утверждение для правых ребер. Пусть  $wx_1, \dots, wx_k$  — все правые ребра  $\mathcal{G}$  с концом в  $w$ . Пусть ребро  $wx_i$  пересекается в изображении  $\mathcal{G}$  с левым ребром  $y_i z_i$ , причем вершина  $y_i$  — того же цвета, что и  $x_i$ . По условию 4° тогда  $wy_i$  — простое ребро  $\mathcal{G}$ . Если для каких-то  $i$  и  $j$  вершины  $y_i$  и  $y_j$  совпадают, то по лемме 2 мы имеем  $e(G) \leq 3v(G) - 11$ , противоречие. Следовательно,  $wy_1, \dots, wy_k$  — различные простые ребра, и их не меньше, чем правых.  $\square$

Рассмотрим плоский граф  $G'$ , полученный из изображения  $\mathcal{G}$  удалением всех левых ребер. Очевидно,  $G'$  — двудольный граф,

$$v(G') = v(G) \quad \text{и} \quad e(G') = e(G) - t(\mathcal{G}).$$

Из классической оценки для двудольного плоского графа мы имеем

$$e(G') \leq 2v(G') - 4 = 2v(G) - 4. \quad (1)$$

**Лемма 4.** Пусть  $\delta(G) \geq 4$ ,  $e(G) \geq 3v(G) - 10$ . Тогда выполняются следующие утверждения.

1) Каждой вершине графа  $G'$  инцидентно хотя бы два простых ребра и  $\delta(G') \geq 2$ .

2) Граф  $G'$  связан, граница каждой грани плоского графа  $G'$  содержит простой цикл, в котором хотя бы 4 ребра.

**Доказательство.** 1) По лемме 3 вершине  $w \in V(G)$  инцидентно не менее, чем  $\lceil \frac{d_G(w)}{3} \rceil \geq 2$  простых ребра.

2) На рис. 1b видно, что любое левое ребро можно обойти по пути из двух простых ребер и одного правого, а значит, граф  $G'$  связан.

Из  $\delta(G') \geq 2$  следует, что в графе  $G'$  есть цикл, а значит, в границу каждой грани входит простой цикл. Из двудольности графа следует, что в каждом цикле не менее четырёх рёбер.  $\square$

### 3.2. Доказательство оценки $3v(G) - 8$ .

**Лемма 5.** Пусть  $G$  – двудольный почти планарный граф с  $v(G) \geq 4$ . Тогда  $e(G) \leq 3v(G) - 8$ .

**Доказательство. 1.** Если в нашем графе  $G$  есть вершина степени не более 3, то удалим ее и все выходящие из нее ребра, в результате получится двудольный граф  $G_1$  с  $v(G_1) = v(G) - 1$ , который, очевидно, также является почти планарным. По индукционному предположению мы имеем

$$e(G_1) \leq 3v(G_1) - 8 = 3v(G) - 8 - 3,$$

откуда очевидно следует доказываемое утверждение для графа  $G$ .

**2.** Далее мы рассмотрим случай, когда степени всех вершин графа  $G$  не менее четырех.

Достаточно доказать утверждение только для максимального двудольного почти планарного графа  $G$  и случая  $e(G) \geq 3v(G) - 10$ . Рассмотрим правильное изображение  $\mathcal{G}$  такого графа и граф  $G'$ . Из леммы 4 следует, что любой вершине  $v \in V(G)$  инцидентно хотя бы два простых ребра. Отсюда немедленно следует, что  $p(\mathcal{G}) \geq v(G)$ , так как у каждого ребра два конца.

По неравенству (1) мы имеем

$$2v(G) - 4 \geq e(G') = t(\mathcal{G}) + p(\mathcal{G}), \quad (2)$$

откуда следует

$$t(\mathcal{G}) \leq v(G) - 4 \quad \text{и} \quad e(G) = t(\mathcal{G}) + e(G') \leq 3v(G) - 8, \quad (3)$$

что и требовалось доказать.  $\square$



### 3.3. Структура графов с $e(G) = 3v(G) - 8$

Пусть  $G$  – двудольный почти планарный граф, для которого  $e(G) = 3v(G) - 8$ .

3.3.1. *Случай минимальной степени не менее 4.*

Пусть  $v(G) \geq 8$  и  $\delta(G) \geq 4$ . Рассмотрим правильное изображение  $\mathcal{G}$  и плоский граф  $G'$ , состоящий из простых и правых рёбер изображения  $\mathcal{G}$ . Для графов  $G$  и  $G'$  выполняются утверждения лемм 3 и 4.

**Следствие 1.** *Пусть  $G$  – двудольный почти планарный граф с  $v(G) \geq 4$ ,  $\delta(G) \geq 4$  и  $e(G) = 3v(G) - 8$ . Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф  $G$  максимален и каждой вершине графа  $G$  инцидентно ровно два простых ребра его правильного изображения  $\mathcal{G}$ .*

2)  $\Delta(G') \leq 4$ .

**Доказательство.** 1) Из леммы 5 следует, что граф  $G$  максимален. Вернемся к доказательству леммы 5. Так как  $\delta(G) \geq 4$ , мы имеем случай 2 доказательства, каждой вершине инцидентно хотя бы два простых ребра. Если какой-то вершине инцидентно более двух простых рёбер, то  $p(\mathcal{G}) > v(G)$ . Тогда из неравенств (2) и (3) следует, что  $e(G) < 3v(G) - 8$ , противоречие.

2) Пусть  $v \in V(G)$ . По лемме 3, вершине  $v$  инцидентно в графе  $G$  не меньше простых рёбер, чем правых. Поэтому из  $d_{G'}(v) \geq 5$  следует, что вершине  $v$  инцидентно не менее трёх простых рёбер, а это противоречит пункту 1.  $\square$

**1. Грани графа  $G'$  и левые рёбра.**

Из  $e(G) = 3v(G) - 8$  следует, что в неравенстве (1) должно достигаться равенство, а это означает, что в графе  $G'$  граница любой грани  $D$  должна содержать ровно 4 ребра. По лемме 4 эта граница содержит цикл с хотя бы 4 рёбрами, а значит, граница  $D$  – простой цикл длины 4. Отметим, что отсюда следует двусвязность графа  $G'$ .

Таким образом, мы имеем дело с двусвязным плоским графом  $G'$ , в котором все грани – четырёхугольники и  $\Delta(G') \leq 4$ .

Рассмотрим удалённые левые рёбра графа  $G$ . Каждое левое ребро  $f$  пересекает ровно одно правое ребро, которое делит  $f$  на два *полурёбра*. Эти полурёбра лежат в двух соседних гранях  $G'$ , а граница между этими гранями содержит как раз упомянутое выше правое ребро, которое пересекает  $f$ .

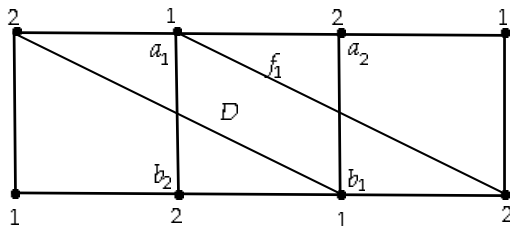


Рис. 3. Левые рёбра на гранях-четырёхугольниках графа  $G'$ .

Пусть  $D = a_1a_2b_1b_2$  – грань графа  $G'$ , причем вершины  $a_1$  и  $b_1$  имеют цвет 1, а вершины  $a_2$  и  $b_2$  имеют цвет 2. Предположим, что эта грань содержит полуребро  $f_1$  (часть левого ребра  $f$ ) с концом  $a_1$ .

Полуребро  $f_1$  имеет конец на одном из рёбер  $e$  грани  $D$ . Так как  $e$  и  $f$  не имеют общего конца и  $f$  – левое ребро, то несложно понять, что  $e = a_2b_1$  (см. рис. 3).

Таким образом, мы установили, что из каждой вершины грани  $D$  выходит не более одного полуребра, лежащего в грани  $D$ , причем конец этого полуребра лежит на строго определенном ребре грани  $D$ . Полуребро с началом в  $a_1$  кончается на ребре  $a_2b_1$ , полуребро с началом  $a_2$  кончается на ребре  $b_1b_2$ , полуребро с началом  $b_1$  кончается на ребре  $b_2a_1$ , а полуребро с началом  $b_2$  кончается на ребре  $a_1a_2$ .

Итак, полуребро  $f_1$ , лежащее в грани  $D$ , начинается в  $a_1$  и кончается на ребре  $a_2b_1$ . Так как два разных полуребра, лежащих в грани  $D$ , не могут пересекать друг друга, то в грани  $D$  может лежать еще лишь одно полуребро – с началом в  $b_1$  и концом на  $a_1b_2$  (см. рис. 3).

**Замечание 2.** Мы доказали, что в границе каждой четырёхугольной грани графа  $G'$  не более двух правых рёбер. Если таких ребер два, то это противоположные рёбра грани.

**2. Полоски и кольца.**

Построим вспомогательный граф  $F$ , вершинами которого являются грани графа  $G'$  и две вершины смежны, когда границы соответствующих им граней имеют общее правое ребро. По замечанию 2, степень каждой вершины в графе  $F$  не более двух, то есть, этот граф есть объединение нескольких цепей и циклов. Количество рёбер в графе  $F$  равно количеству правых рёбер, то есть,  $t(G) = v(G) - 4$ . Количество

вершин графа  $F$  равно количеству граней графа  $G'$ , которое по формуле Эйлера есть  $v(G) - 2$ . Таким образом, граф  $F$  состоит из двух путей и, возможно, нескольких циклов.

Проведём разрезы по всем простым рёбрам графа  $G'$  (вдоль этих рёбер). В результате плоскость распалась на части, а каждое простое ребро графа  $G'$  распалось на два ребра, образованных после разреза – назовём их половинками.

Мы считаем две половинки простого ребра за два разных ребра, даже если они попали в одну часть плоскости!

После разрезов общий участок границы будут иметь только пары граней, имеющие общее правое ребро. Таким образом, в одну часть плоскости после разреза попадут как раз грани графа  $G'$ , входящие в одну компоненту связности графа  $F$ .

**Определение 5.** Части, соответствующие компонентам-путям графа  $F$ , мы назовём полосками, а части, соответствующие компонентам-циклам графа  $F$  – кольцами.

Граничным ребром полоски или кольца мы назовем любую половинку простого ребра, входящую в эту полоску или кольцо.

Границей полоски или кольца мы назовём компоненту связности подграфа из его граничных рёбер.

Каждая полоска представляет собой плоский граф, изоморфный клетчатому прямоугольнику со стороной 1. Четыре вершины полоски, соответствующие углам прямоугольника, мы назовём углами полоски, а содержащие углы грани полоски – крайними гранями.

Все полоски и кольца, полученные из графа  $G'$ , мы назовём частями графа  $G'$ .

**Замечание 3.** 1) Из доказанного выше следует, что среди частей графа  $G'$  ровно две полоски.

2) Действуя в обратном порядке, можно склеить граф  $G'$  из его частей – полосок и колец.

3) У полоски из  $n$  граней – одна граница, представляющая собой цикл длины  $2n + 2$ . У кольца из  $n$  граней две границы, каждая из них – цикл длины  $n$ .

Пусть  $P$  – граф на вершинах из  $V(G)$ , рёбра которого – это простые рёбра графа  $G'$ . По следствию 1 каждая компонента связности графа  $P$  – это простой цикл.

Нетрудно заметить, что рёбра, половинки которых образуют некоторую границу  $Z$  – это рёбра одной компоненты связности графа  $P$ , то есть, простого цикла. Обозначим этот цикл через  $C(Z)$ . Так как  $C(Z)$  – простой цикл, в границе  $Z$  не могут содержаться две половинки одного ребра.

Пусть  $Z_1, \dots, Z_k$  – все границы частей графа  $G'$ . Из сказанного выше следует, что  $Z_1, \dots, Z_k$  разбиваются на пары  $Z_i, Z_j$ , для которых  $C(Z_i) = C(Z_j)$ . Назовем такие границы *совпадающими*.

Построим вспомогательный граф  $L$ , вершины которого – части (то есть, полоски и кольца) графа  $G'$ , а две вершины смежны, если соответствующие им части имеют общую границу. Очевидно, граф  $L$  связан. Из доказанного выше следует, что две части, имеющие общее граничное ребро, имеют общую границу. Поэтому степень каждого кольца в этом графе не более 2, а степень каждой полоски – не более 1, следовательно, граф  $L$  представляет из себя цепь, висячие вершины которой – две полоски графа  $G'$ , а остальные вершины (если они есть) – кольца.

Две границы одного кольца в таком случае, очевидно, имеют одинаковое количество вершин, и две совпадающие границы – тоже. Поэтому все границы имеют одинаковое число вершин.

Пусть в одной из полосок  $k$  граней. Тогда длина ее границы равна  $2k + 2$ , столько же вершин будет во всех границах. Так как каждая вершина графа  $G'$  входит ровно в две границы, мы получаем, что общее число вершин графа  $G'$  равно  $(2k + 2) \cdot e(L)$ , то есть, чётно.

Таким образом, мы установили, что в случае  $e(G) = 3v(G) - 8$  и  $\delta(G) \geq 4$  число вершин графа  $G$  чётно.

### 3.3.2. *Случай минимальной степени не более 3.*

Пусть  $H$  – двудольный почти планарный граф с

$$v(H) \geq 5, \quad e(H) = 3v(H) - 8, \quad \delta(H) \leq 3.$$

Из леммы 5 понятно, что граф  $H$  максимален, рассмотрим его правильное изображение  $\mathcal{H}$ . Несколько раз удаляя из графа вершину степени не более 3, мы получим из графа  $H$  двудольный почти планарный граф  $G$  либо с  $v(G) = 4$ , либо с  $\delta(G) \geq 4$ . В обоих случаях  $e(G) \leq 3v(G) - 8$ , поэтому нетрудно понять, что каждый раз мы должны были удалять вершину степени ровно 3 и  $e(G) = 3v(G) - 8$ .

Остается доказать, что мы не можем добавить к такому графу  $G$  вершину  $a$  степени 3 так, чтобы получился двудольный почти планарный граф.

В случае  $v(G) = 4$  граф  $G$  – цикл из 4 вершин, для которого это утверждение очевидно. Пусть  $v(G) > 4$ . Понятно, что граф  $G$  максимален. Удалив соответствующие вершины из правильного изображения  $\mathcal{H}$ , мы получим правильное изображение  $\mathcal{G}$  графа  $G$  (легко понять, что условия 1°–5° при удалении вершин не нарушаются).

Мы доказали, что  $v(G)$  четно и исследовали структуру таких графов. Вернемся к рассмотренному выше подграфу  $G'$  из правых и простых рёбер, все его грани – четырёхугольники, пусть на некоторой грани  $D$  лежит добавляемая вершина  $a$ . Вершину  $a$  нужно соединить рёбрами с тремя одноцветными вершинами графа  $G$ . Мы разберём три случая.

**а.**  $D$  не является крайней гранью полосы.

Тогда не умаляя общности можно считать, что из двух вершин цвета 2 этой грани в графе  $G$  выходят левые рёбра, пересекающие два противоположных ребра границы  $D$ . Эти рёбра делят  $D$  на три части. Если  $a$  расположена в одной из двух треугольных частей (см. рис. 4а, пусть это будет правая часть), то вершина  $a$  может быть соединена только с вершинами соседней с  $D$  грани  $D'$ , так как выходящие из  $a$  рёбра могут пересекать только общее ребро  $D$  и  $D'$  без нарушения почти планарности. Но в грани  $D'$  есть только две одноцветные вершины.

Если же  $a$  лежит в центральной части грани  $D$  (см. рис. 4а), то ее можно соединить ребрами только с двумя вершинами цвета 2 грани  $D$ .

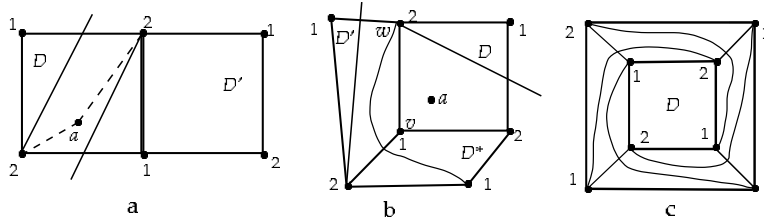


Рис. 4. Расположения вершины  $a$ .

**в.**  $D$  – крайняя грань полосы, состоящей более чем из одной клетки.

Нам понадобится несложная лемма.

**Лемма 6.** Вершина  $x \in V(G')$  является углом полосы ровно  $4 - d_{G'}(x)$  раз.

**Доказательство.** Рассмотрим любую грань  $M$ , в которую входит вершина  $x$ . Нетрудно понять, что оба инцидентных вершине  $x$  ребра грани  $M$  являются простыми тогда и только тогда, когда  $M$  – крайняя грань полосы, а  $x$  – угол этой полосы. В любом другом случае одно из инцидентных вершине  $x$  рёбер грани  $M$  является простым, а другое – правым.

По следствию 1, вершине  $x$  инцидентно ровно два простых ребра, что немедленно даёт нам утверждение леммы для случая, когда  $d_{G'}(x) = 2$  или  $d_{G'}(x) = 3$ . Если же  $d_{G'}(x) = 4$ , то вершине  $x$  инцидентны два простых и два правых ребра, которые, очевидно, чередуются в плоском изображении при обходе по часовой стрелке. Поэтому вершина степени 4 не может быть углом полосы.  $\square$

Пусть грань  $D$  имеет углы  $w$  и  $v$ . Очевидно, ровно одно левое ребро графа  $G$  пересекает грань  $D$  (см. рис. 4b). Это ребро выходит из одного из углов полосы (пусть из  $w$ , цвета 2). Покажем, что второй угол  $v$  в этом случае имеет степень  $d_{G'}(v) = 3$ .

По лемме 6 мы знаем, что  $2 \leq d_{G'}(v) \leq 3$ . Пусть  $d_{G'}(v) = 2$ . Тогда из  $v$  в графе  $G$  выходит два простых ребра и два левых, как доказано в лемме 3. Значит, в каждой из двух содержащих  $v$  граней графа  $G'$  должно быть полуребро, выходящее из  $v$ , но в грани  $D$  такого полуребра нет, противоречие.

Итак,  $d_{G'}(v) = 3$ . Рассмотрим две отличные от  $D$  грани, содержащие  $v$  – пусть это  $D'$  (содержащая  $w$ ) и  $D^*$ , см. рис. 4b. Как следует из леммы 6, эти две грани принадлежат одной части, следовательно, их общее ребро является правым и его пересекает левое ребро. Такое ребро можно провести единственным образом – оно должно соединять вершину  $w$  грани  $D'$  с вершиной цвета 1 грани  $D^*$  (это вершина грани  $D^*$ , противоположная  $v$ , см. рис. 4b).

Случай, когда вершина  $a$  лежит в треугольной части грани  $D$ , аналогичен разобранным выше. Пусть  $a$  лежит в части грани  $D$ , содержащей углы  $v$  и  $w$ . Так как инцидентные  $a$  рёбра не могут пересекать

левое ребро, проходящее в гранях  $D'$  и  $D^*$ , нетрудно заметить, что вершину  $a$  нельзя соединить с тремя вершинами одного цвета.

*с.  $D$  – единственная грань некоторой полоски.*

В таком случае граф  $G'$  склеен из двух одноклеточных полосок и, возможно, нескольких колец. Поскольку  $v(G) > 4$ , то среди частей графа  $G'$  есть хотя бы одно кольцо, причём каждое кольцо имеет ровно четыре грани. В этом случае именно такое кольцо приклеено к одноклеточной полоске (см. рис. 4с). Тогда легко видеть, что расположенная на грани  $D$  вершина  $a$  не может быть смежна более чем с двумя одноцветными вершинами.

Таким образом мы доказали, что не существует двудольного почти планарного графа  $H$  с  $e(H) = 3v(H) - 8$ ,  $v(H) > 4$  и  $\delta(G) \leq 3$ .

**3.3. Завершение доказательства оценки.** Из выводов двух предыдущих разделов следует, что в двудольном почти планарном графе  $G$  с  $e(G) = 3v(G) - 8$  должно быть четное число вершин. (В разделе 3.2 доказано, что  $\delta(G) \geq 4$ , а для такого графа в разделе 3.2 доказано, что  $v(G)$  чётно.)

Напомним, что для каждого  $v \geq 4$  через  $\beta(v)$  мы обозначаем максимально возможное количество рёбер в двудольном почти планарном графе на  $v$  вершинах. Мы доказали, что  $\beta(v) \leq 3v - 8$  для всех  $v \geq 4$  и  $\beta(v) \leq 3v - 9$  для нечётных  $v$ .

Остается лишь отметить, что  $\beta(6) \leq 9 = 3 \cdot 6 - 9$ , так как максимальное количество рёбер в двудольном графе на 6 вершинах достигается для полного двудольного графа  $K_{3,3}$  и равно 9.

Теперь доказательство оценки полностью завершено.

#### §4. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

Вершинами графа  $G'_k$  мы будем считать узлы сетки клетчатого параллелепипеда  $1 \times 1 \times k$ , а рёбрами – единичные отрезки клетчатой сетки. Нетрудно понять, что клетчатый параллелепипед  $1 \times 1 \times k$  можно склеить из двух полосок (нижней и верхней граней параллелепипеда – прямоугольников  $1 \times k$ ) и одного кольца, опоясывающего остальные  $2k + 2$  клетки. В полосках и кольцах легко провести левые рёбра, при этом, кратных рёбер, очевидно, не появится и в результате получится двудольный почти планарный граф  $G_k$  с  $v(G_k) = 4k + 4$  и  $e(G_k) = 3 \cdot v(G_k) - 8$ . Тем самым, мы показали, что  $\beta(v) = 3v - 8$  для  $v = 4\ell \geq 8$ .

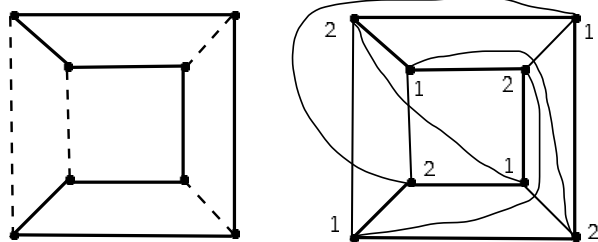


Рис. 5. Куб  $1 \times 1 \times 1$  и почти планарный граф  $K_{4,4}$ .

Отметим, что клетчатый параллелепипед  $1 \times 1 \times k$  можно склеить из двух полосок. Пример для куба  $1 \times 1 \times 1$  изображен на рис. 5: слева изображена склейка куба из двух полосок, а справа – получающийся почти планарный двудольный граф. Отметим, что это полный двудольный граф  $K_{4,4}$ .

Кроме того, из двух полосок  $1 \times k$  и  $n$  колец из  $2k+2$  клеток несложно склеить параллелепипед  $1 \times k \times n$ . На основе этого параллелепипеда можно построить двудольный почти планарный граф  $G_{k,n}$  с  $v(G_{k,n}) = 2(k+1)(n+1)$  и  $e(G_{k,n}) = 3v(G_{k,n}) - 8$ . Однако, в таком виде не представляются четные числа вида  $2p$  (где  $p$  – простое), поэтому нам придется научиться склеивать более сложные по структуре примеры.

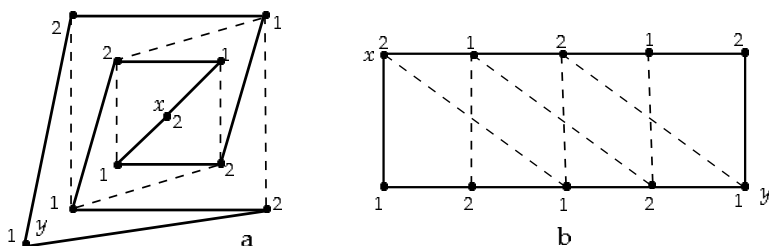


Рис. 6. Склейка почти планарного графа из двух полосок.

Мы построим планарный граф  $H'_k$  на  $4k+6$  вершинах ( $k \geq 1$ ), который склеен из двух полосок  $1 \times (2k+3)$ . Пример для  $k=1$  изображен на рис. 6а. В изображенном графе  $H'_1$  две вершины степени 2 разных цветов (пусть это вершина  $x$  цвета 2 и вершина  $y$  цвета 1), четыре



вершины степени 3 (по две каждого из цветов), остальные вершины имеют степень 4. Сплошными линиями показаны простые рёбра графа  $H'_1$ , а пунктирными – правые. Легко видеть, как этот пример склеен из двух полосок  $1 \times 4$ . Несложно достроить этот пример до графа  $H'_k$  на  $4k + 6$  вершинах, добавив еще  $k - 1$  квадрат.

На рис. 6b показано, как в каждой из полосок проводятся левые рёбра. Важно, что в обеих полосках, из которых склеен граф  $H'_k$ , два угла каждой полоски, из которых выходят левые рёбра – это вершины  $x$  и  $y$ . При  $k \geq 1$  легко проверить, что кратных рёбер не образуется.

Проведем левые рёбра в графе  $H'_k$  и получим почти планарный двудольный граф  $H_k$  с  $v(H_k) = 4k + 6$  и  $e(H_k) = 3v(H_k) - 8$ . Таким образом, мы доказали, что  $\beta(v) = 3v - 8$  для  $v = 4k + 6$ , где  $k$  – натуральное число.

**Замечание 4.** 1) Отметим, что при  $k = 0$  в обеих полосках было бы проведено ребро  $xy$ , которое имело бы кратность 2.

2) Провести в полоске вместо левых рёбер правые рёбра (то есть, другие рёбра, пересекающие перегородки полоски) не получится. В этом случае попытка соединить угол полоски, имеющий степень 3 в графе  $H'_k$ , с соответствующей при таком способе вершиной приведет к образованию кратного ребра – стороны верхнего или нижнего квадрата.

3) Также отметим, что существует достаточно много других почти планарных двудольных графов, которые можно склеить из двух полосок одинаковой длины.

Теперь разберёмся с малыми значениями  $v$ . Для  $v = 4$  и  $v = 5$  экстремальные примеры – это полные двудольные графы  $K_{2,2}$  и  $K_{2,3}$  соответственно. Эти графы являются планарными (а значит, и почти планарными). Отметим, что  $e(K_{2,2}) = 4 = 3 \cdot 4 - 8$  и  $e(K_{2,3}) = 6 = 3 \cdot 5 - 9$ . Тем самым, мы доказали, что  $\beta(4) = 4$  и  $\beta(5) = 6$ .

Для  $v = 6$  и  $v = 7$  экстремальные примеры – это полные двудольные графы  $K_{3,3}$  и  $K_{3,4}$  соответственно. Они являются почти планарными, так как таковым является граф  $K_{4,4}$ , изображённый на рис. 5 справа. Отметим, что  $e(K_{3,3}) = 9 = 3 \cdot 6 - 9$  и  $e(K_{3,4}) = 12 = 3 \cdot 7 - 9$ . Тем самым, мы доказали, что  $\beta(6) = 9$  и  $\beta(7) = 12$ .

Осталось доказать, что  $\beta(v) = 3v - 9$  для нечетных  $v \geq 9$ . Для этого достаточно к построенному выше графу на  $v - 1$  вершине с  $3(v - 1) - 8$  рёбрами (отметим, что  $v - 1$  – четное число, не меньшее 8) добавить

вершину  $a$  и соединить ее с двумя вершинами одинакового цвета, как на рис. 4а.

Теперь теорема полностью доказана.

### §5. О ПОЛНЫХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФАХ

В заключении вспомним о полных двудольных графах, и выясним, какие из них являются почти планарными. Графы  $K_{1,n}$  и  $K_{2,n}$  являются планарными и, следовательно, почти планарными. Мы установили выше, что графы  $K_{3,3}$ ,  $K_{3,4}$  и  $K_{4,4}$  являются почти планарными.

Из рис. 7 ясно, что граф  $K_{3,6}$  (а значит, и его подграф  $K_{3,5}$ ) является почти планарным. Так как  $e(K_{4,5}) = 20 > 3 \cdot 9 - 9$ , то граф  $K_{4,5}$  не является почти планарным.

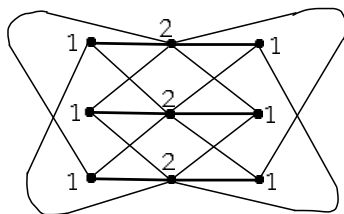


Рис. 7. Граф  $K_{3,6}$ .

Покажем, что граф  $K_{3,7}$  не является почти планарным, то есть, его нельзя изобразить на плоскости так, чтобы каждое ребро пересекало не более, чем одно другое.

Сначала отметим, что  $sg(K_{3,3}) \geq 1$ . Теперь рассмотрим граф  $K_{3,5}$  и изобразим его на плоскости. В любом изоморфном  $K_{3,3}$  подграфе (которых, очевидно, 10) есть хотя бы одно пересечение рёбер. Каждая пара пересекающихся рёбер, как нетрудно понять, входит ровно в  $C_3^1 = 3$  подграфов  $K_{3,3}$ . Следовательно,  $sg(K_{3,5}) \geq \frac{10}{3}$ , но это означает, что  $sg(K_{3,5}) \geq 4$ .

Теперь рассмотрим граф  $K_{3,7}$ . Предположим, что он является почти планарным. Понятно, что этот граф максимален (как полный двудольный граф). Рассмотрим его правильное изображение. Так как  $e(K_{3,7}) = 21 > 3v(K_{3,7}) - 10$ , в силу леммы 3 любой вершине степени 7 инцидентно хотя бы  $\lceil \frac{7}{3} \rceil = 3$  простых рёбер, откуда немедленно следует, что в нашем изображении хотя бы 9 простых рёбер, а значит,  $sg(K_{3,7}) \leq \frac{21-9}{2} = 6$ .

Однако, в каждом изоморфном  $K_{3,5}$  подграфе не менее 4 пересечений. Всего таких подграфов  $C_7^5 = 21$ , а каждое пересечение входит в  $C_5^3 = 10$  подграфов  $K_{3,5}$ , откуда  $\text{cr}(K_{3,7}) \geq \text{cr}(K_{3,5}) \cdot \frac{21}{10} = \frac{84}{10} > 6$ . Полученное противоречие показывает, что граф  $K_{3,7}$  не является почти планарным.

Таким образом, среди полных двудольных графов почти планарными являются  $K_{1,n}$ ,  $K_{2,n}$ ,  $K_{3,3}$ ,  $K_{3,4}$ ,  $K_{3,5}$ ,  $K_{3,6}$  и  $K_{4,4}$ , а остальные – не являются.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. Pach, G. Tóth, *Graphs drawn with few crossing per edge.* — *Combinatorica* **17**, No. 3 (1997), 427–439.
2. P. K. Agarwal, B. Aronov, J. Pach, R. Pollack, M. Sharir, *Quasi-planar graphs have a linear number of edges.* — *Combinatorica* **17**, No. 1, (1997), 1–9.
3. E. Ackerman, G. Tardos, *On the maximum number of edges in quasi-planar graphs.* — *J. Comb. Theory, Ser. A* **114**, No. 3, (2007), 563–571.
4. E. Ackerman, *On the maximum number of edges in topological graphs with no four pairwise crossing edges.* — *Discrete Comput. Geom.* **41**, No. 3 (2009), 365–375.
5. G. Tardos, G. Tóth, *Crossing stars in topological graphs.* — *SIAM J. Discrete Math.* **21**, No. 3 (2007), 737–749.
6. J. Pach, R. Pinchasi, G. Tardos, G. Tóth, *Geometric graphs with no self-intersecting path of length three.* (English summary) — *European J. Combin.* **25**, No. 6 (2004), 793–811.

Karpov D. V. Upper bound on the number of edges of an almost planar bipartite graph.

Let  $G$  be a bipartite graph without loops and multiple edges on  $v \geq 4$  vertices, which can be drawn on the plane such that any edge intersects at most one other edge. We prove that such graph has at most  $3v - 8$  edges for even  $v \neq 6$  and at most  $3v - 9$  edges for odd  $v$  and  $v = 6$ . For all  $v \geq 4$  examples showing that these bounds are tight are constructed.

In the end of the paper, we discuss a question about drawings of complete bipartite graphs on the plane such that any edge intersects at most one other edge.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН  
Фонтанка 27, 191023  
Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: dvk0@yandex.ru

Поступило 3 сентября 2012 г.