Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 406, 2012 г.

С. Л. Берлов

РАВНОМЕРНЫЕ РАСКРАСКИ ГРАФОВ

Если $G = (V,\ E)$ – граф, то будем обозначать через:
$V(G)$ – множество вершин G, а $E(G)$ – множество ребер;
$d_G(x)$ (*степень* вершины графа) – количество ребер, содержащих вершину $x \in G$;
$\Delta(G)$ – максимальная из степеней вершин;
$\chi(G)$ – *хроматическое число* G, то есть минимальное возможное число цветов по всем правильным раскраскам G.

§1. Введение

В работе изучаются вопросы, связанные с разбиением графа на пустые подграфы заданных размеров. Эта задача является усилением классической задачи о правильной раскраске графа. При переходе к дополнительному графу получается обобщение классической проблемы. Если рассмотреть непересекающиеся (по вершинам) полные подграфы в данном графе, то, как предположил П. Эрдёш в статье [1], всякий граф с kn вершинами ($k > 1$), в котором все вершины имеют степени не менее $(k-1)n$, разбивается на n непересекающихся полных подграфов, каждый с k вершинами. Эта задача решена положительно для $k = 2, 3, 4$ и произвольного n, а также для $n = 2, 3$ и произвольного k. В общем случае эта проблема очень сложна и пока далека от решения. В первой части работы будет изучаться этот вопрос для произвольного k. Мы получим нужный результат при несколько более жестких условиях: потребуется еще отсутствие маленьких нечетных циклов. Зато этот результат будет обобщён. Основной результат первой части сформулирован в следующей теореме:

Теорема 1. *Дан граф G и натуральные числа $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i = |V(G)|$, причем длина минимального нечетного*

Ключевые слова: хроматическое число, клика, критический подграф.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00096) и при поддержке гранта Правительства РФ по постановлению N 220, договор No. 11.G34.31.0053.

цикла в графе G больше a_k и $\Delta(G) < \frac{|V(G)|+2}{a_k} - 1$. Тогда вершины G можно правильно окрасить в k цветов таким образом, что будет ровно a_i вершин цвета i.

Дадим несколько определений.

Определение 1. Граф G называется *k-критическим*, если его хроматическое число равно k, а любой его собственный подграф $(k-1)$-хроматичен.

Определение 2. Граф называется *n-слоистым*, если его вершины можно разбить на несколько полных подграфов с n вершинами каждый. Каждый из этих полных подграфов будем называть *слоем*.

Определение 3. Пусть x – вершина графа G, будем обозначать через $\deg_{G,k}(x)$ количество всех k-критических подграфов $G' \subseteq G$ таких, что $x \in V(G')$. Если $k = 2$, то $\deg_{G,2}(x)$ – просто степень вершины x графа G.

Определение 4. k-критический подграф слоистого графа G будем называть *важным*, если его пересечение с любым слоем содержит не более $k-1$ вершин.

Во второй части будут изучаться слоистые графы. Заметим, что для n-слоистого графа любая правильная раскраска его вершин в n цветов является равномерной. Возможностью правильных раскрасок n-слоистых графов в n цветов занимались уже достаточно давно, например в работе [5] доказывается, что если степени вершин n-слоистого графа не превосходят cn (при $c < 1 + 10^{-8}$), то этот граф n-хроматичен. В статьях [6] и [7] оценка на константу c существенно улучшена – доказано, что это утверждение верно при $c < 1 + \frac{1}{3}$. И для не очень больших количеств слоёв получены верхние оценки на c в пределах от $1 + \frac{1}{3}$ до $1 + \frac{1}{2}$.

Вспомним основной результат статьи [4]:

Теорема 2. *Пусть G_0 – связный подграф G и предположим, что любой подграф H, удовлетворяющий условиям $G_0 \subset H \subset G$, $V(G_0) \neq V(H)$ содержит такую вершину $x \in V(H - G_0)$, что $\deg_{G,k}(x) \leqslant d$. Пусть s – натуральное число и $t = \max\{s, \chi(G_0)\}$. Если $C_t^{k-1} > d$, тогда $\chi(G) \leqslant t$.*

Фактически, было доказано существование правильной раскраски вершин графа при ограничении на количество k-критических подграфов, покрывающих каждую вершину. Во второй части работы получен аналогичный результат для n-слоистого графа. Это даст новый критерий существования его равномерной правильной раскраски в n цветов в зависимости от количества k-критических подграфов, покрывающих каждое ребро слоистого графа, соединяющее разные слои. Однако в слоистом графе при маленьких k очень много k-критических подграфов, например, лежащих в одном слое. Поэтому разумно рассматривать не все k-критические подграфы, а только так называемые *важные* (см. определение 4). Основным результатом второй части является следующая теорема:

Теорема 3. *Дан n-слоистый граф G и натуральное число $k > 1$. Каждое ребро, соединяющее вершины из разных слоев, покрыто менее, чем C_{n-1}^{k-2} важными k-критическими подграфами. Тогда $\chi(G) = n$.*

§2. Раскраски с заданными мощностями

Мы будем изучать вопросы существования правильных раскрасок графа с заданными мощностями множеств вершин каждого цвета. Основным результатом является теорема 1.

Перед доказательством этой теоремы докажем одну полезную лемму.

Лемма 1. *Предположим, что G – двудольный граф, а натуральные числа $a \geqslant b$ таковы, что $a + b = |V(G)|$ и $|E(G)| \leqslant b$. Тогда вершины G можно окрасить в два цвета правильным образом так, что будет ровно a вершин первого цвета и ровно b вершин второго цвета.*

Доказательство. Временно удалим все изолированные вершины. Окрасим оставшиеся вершины в 2 цвета правильным образом. Заметим, что вершин каждого цвета будет не более b, поскольку иначе из них суммарно выходило бы более $b \geqslant |E(G)|$ ребер, так как все эти вершины ненулевой степени. Теперь окрасим изолированные вершины так, чтобы вершин каждого цвета было нужное количество. $\square$

Теперь докажем теорему 1.

Доказательство. Окрасим вершины произвольным образом так, чтобы было ровно a_i вершин цвета i. Ребро будем называть *плохим*, если оно соединяет две одноцветные вершины. Будем уменьшать количество плохих ребер. Рассмотрим такой цвет i, что существует плохое ребро r, соединяющее две вершины цвета i. Докажем, что найдется такой цвет $j \neq i$, что существует не более $\min(a_i, a_j) - 1$ ребер, соединяющих вершины цвета i с вершинами цвета j. Действительно, в противном случае будет не менее a_m ребер, соединяющих вершины цветов m и i при $m < i$ и не менее a_i ребер, соединяющих вершины цветов m и i при $m > i$. Всего из вершин цвета i выходит не менее $\sum\limits_{s=1}^{i-1} a_s + (k-i)a_i$ ребер. Но тогда, с учетом ребра r, сумма степеней вершин цвета i будет не менее

$$\sum_{s=1}^{i-1} a_s + (k-i)a_i + 2.$$

Поэтому степень какой-то вершины цвета i будет не менее

$$\frac{\sum_{s=1}^{i-1} a_s + 2}{a_i} + k - i.$$

Заметим, что выполняются следующие неравенства:

$$\frac{\sum_{s=1}^{i-1} a_s + 2}{a_i} \geqslant \frac{\sum_{s=1}^{i-1} a_s + 2}{a_k},$$

$$k - i \geqslant \frac{\sum_{s=i+1}^{k} a_s}{a_k}.$$

Сложив их, получим, что

$$\frac{\sum_{s=1}^{i-1} a_s + 2}{a_i} + k - i \geqslant \frac{|V(G)| + 2}{a_k} - 1.$$

Но это противоречит условию, поскольку

$$\Delta(G) < \frac{|V(G)| + 2}{a_k} - 1.$$

Рассмотрим теперь только вершины цветов i и j. Удалим все плохие ребра, соединяющие рассматриваемые вершины, кроме ребра r. Полученный граф H будет двудольным, поскольку все его нечетные циклы должны быть по длине больше a_k, а в графе H всего не более $\min(a_i, a_j) \leqslant a_k$ ребер. Поэтому, в силу леммы 1, можно так перекрасить вершины H в цвета i и j, что не останется плохих ребер и при этом в H по-прежнему будет a_i вершин цвета i и a_j вершин цвета j. Тогда в исходном графе после такой перекраски количество плохих ребер уменьшится. Производя такие операции многократно, можно избавиться от плохих ребер и получить искомую раскраску вершин графа G. $\square$

Докажем следствие о равномерных раскрасках.

Следствие 1. *Даны натуральные числа n и k и граф G такой, что $|V(G)| = nk$ и $\Delta(G) \leqslant k-1$, причем все его нечетные циклы содержат более n вершин. Тогда его вершины можно правильно окрасить в k цветов таким образом, что вершин каждого цвета будет ровно n.*

Доказательство. Поскольку степень каждой вершины не превосходит $k-1 = \frac{nk}{n} - 1 < \frac{|V(G)|+2}{n} - 1$, то можно применить теорему 1 для $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_k = n$. $\square$

§3. Слоистые графы

Перейдём к вопросу существования правильной раскраски вершин n-слоистого графа в n цветов. Докажем теорему 3, применив подход, аналогичный рассмотренному в статье [4].

Доказательство. Рассмотрим всевозможные раскраски G в n цветов такие, что все вершины каждого слоя имеют различные цвета. Ребро графа G, которое при такой раскраске соединяет одноцветные вершины, будем называть *плохим.* Среди всех таких раскрасок выберем ту, в которой наименьшее количество плохих ребер. Если это количество нулевое, то полученная раскраска будет правильной. Предположим, ребро a – плохое. Не умаляя общности будем считать, что оно соединяет две вершины A и B цвета 1.

Временно удалим множество $T \subset E(G)$, состоящее из всех плохих ребер, кроме a. Рассмотрим всевозможные множества из $k-1$ цветов, включающие цвет 1. Для каждого из этих множеств рассмотрим индуцированный подграф графа G, образованный всеми вершинами всех цветов из выбранного множества. Предположим, что какой-то из этих подграфов (назовём его H) не содержит индуцированного k-критического подграфа, содержащего ребро a. Докажем, что $\chi(H) \leqslant k-1$.

Действительно, пусть $\chi(H) \geqslant k$. Тогда H содержит k-критический подграф. Причём он будет важным, поскольку H содержит не более, чем $k-1$ вершину каждого слоя и любой его подграф – тоже. Отметим, что вершины A и B принадлежат этому подграфу, поскольку после удаления любой из них граф станет $(k-1)$-хроматичным. Следовательно, этот k-критический подграф содержит ребро a. Полученное противоречие показывает, что $\chi(H) \leqslant k-1$.

Теперь к правильной раскраске графа H в $k-1$ цветов добавим вершины графа G остальных цветов и все ребра, кроме тех, которые входят в множество T. Получим правильную раскраску графа $(V(G), E(G) \setminus T)$. Но в этой раскраске графа G будет не более $|T|$ плохих ребер, то есть меньше, чем в исходной, что противоречит выбору исходной раскраски графа G.

Следовательно, каждый из рассматриваемых подграфов содержит индуцированный важный k-критический подграф, содержащий ребро a. Заметим, что все эти k-критические подграфы различны. Действительно, предположим, что это не так. Тогда какой-то k-критический подграф (назовём его Z) содержит вершины не более, чем $k-2$ различных цветов. Перекрасим одну из вершин A или B в оставшийся цвет. Получим правильную раскраску подграфа Z в $k-1$ цвет, что противоречит его k-критичности. Значит, каждый из рассмотренных индуцированных k-критических подграфов содержит вершины всех $k-1$ выбранных цветов, а все эти наборы цветов различны. Но тогда количество k-критических подграфов, покрывающих ребро a, не менее C_{n-1}^{k-2}, что противоречит условию теоремы. $\square$

Следствие 2. *Рассмотрим n-слоистый граф G. Оказалось, что каждое его ребро, соединяющее вершины из разных слоев, покрыто не более, чем $n-2$ важными нечетными циклами. Тогда $\chi(G) = n$.*

Доказательство. Следует из теоремы 3 при $k = 3$. $\square$

Литература

1. P. Erdos, *Some recent results on extremal problems in graph theory.* — Theorie graphes. Journees internat etude Rome (1966), 117–130.
2. P. Erdos, *Problems and results in chromatic graph theory.* — Proof Techn. Graph Theory- New York–London (1969), 27–36.
3. P. Erdos, *Some unsolved problems in graph theory and combinatorial analysis.* — Combinator. Math, Appl. London–New York (1971), 97–109.

4. S. L. Berlov, V. L. Dol'nikov, *Some generalization of theorems on a vertex colouring.* — J. Combinat. Theory, Ser. A **113**, No. 7 (2006), 1582–1585.
5. N. Alon, *The strong chromatic number of a graph.* — Random Struct. Alg. **3** (1992), 1–7.
6. P. E. Haxell, *On the strong chromatic number.* — Combinat. Probab. Comput. **13**, No. 6 (2004), 857–865.
7. С. Л. Берлов, *Соотношения между кликовым числом, хроматическим числом и степенью для некоторых видов графов.* — Моделирование и анализ информационных систем **15**, No. 4 (2008), 10–22.

Berlov S. L. Uniform colorings of graphs.

Let uniform proper coloring of a graph be a proper coloring in which all colors have equal numbers of vertices. We prove new conditions of existence of uniform colorings.

Физико-математический лицей No. 239,
ул. Кирочная д. 8а., 191028 С.-Петербург;
Ярославский Государственный унивеситет,
Лаборатория дискретной и вычислительной геометрии им. Делоне, ул. Советская, д.14
150000 Ярославль, Россия
E-mail: sberlov@rambler.ru

Поступило 31 октября 2012 г.