Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 405, 2012 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ. 10

Введение

В работе исследуется класс двухпараметрических полиномиальных матриц общего вида, ранговые факторизации которых реализуются с использованием унимодулярных матриц. Рассматриваются ранговые факторизации двухпараметрических матриц, свойства которых аналогичны свойствам ранговых факторизаций однопараметрических полиномиальных матриц. Приводятся алгоритмы реализации таких ранговых факторизаций и условия их существования. В частности, приводится алгоритм вычисления минимального базиса подпространства и указываются необходимые и достаточные условия его существования. Представлен алгоритм обращения двухпараметрических унимодулярных матриц.

1. Некоторые сведения о двухпараметрических матрицах

1.1. Определения и обозначения. Пусть

$$F(\lambda,\mu)=\sum_{i=0}^{s} C_i(\mu)\lambda^i$$

есть двухпараметрическая полиномиальная $m\times n$ матрица ранга ρ: $F := F(\lambda,\mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$; $F_1(\mu) := [C_s(\mu),\dots,C_0(\mu)]$ есть однопараметрическая полиномиальная $m\times(s+1)n$ матрица. Конечный спектр $\sigma[F]$ матрицы F состоит из конечных регулярного, сингулярного и регулярно-сингулярного спектров:

$$\sigma[F]=\sigma_r[F]\cup\sigma_s[F]\cup\sigma_{rs}[F].$$

Ключевые слова: матрица двухпараметрическая полиномиальная, спектр регулярный, сингулярный, нуль-пространство, ранговая факторизация, свободный минимальный базис.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-318-а.

Статья публикуется в редакции В. Б. Хазанова.

$\overline{N}_c[F]$ – правое нуль-пространство из спектральных векторов и инвариантных подпространств, соответствующих точкам регулярного спектра $\sigma_r[F]$ матрицы $F(\lambda,\mu)$; $N_c[F]$ – правое нуль-пространство из полиномиальных решений матрицы $F(\lambda,\mu)$; $\mathcal{H}_c[F]$ – нуль-пространство из правых полиномиальных решений $m(s+1)\times n$ матрицы $F_1^B(\mu) := [C_s(\mu),...,C_0(\mu)]^B$; $N[F]$ – правое нуль-пространство матрицы $F(\lambda,\mu)$, так что

$$N[F] = \overline{N}_c[F] \cup N_c[F].$$

В статье рассматриваются правые решения уравнения $F(\lambda,\mu)x = 0$. Для рассмотрения левых решений следует перейти от матрицы $F(\lambda,\mu)$ к матрице $F^T(\lambda,\mu)$.

Преобразование вида

$$F(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu) = [\Delta(\lambda,\mu),\mathbb{O}] \tag{1.1}$$

называется ΔW-2 факторизацией[1] матрицы $F(\lambda,\mu)$, если выполнены следующие условия:

• $W(\lambda,\mu) = [W_1(\lambda,\mu),W_0(\lambda,\mu)]$ – регулярная матрица порядка n, спектр которой не зависит от параметра λ; блоки $W_1(\lambda,\mu)$ и $W_0(\lambda,\mu)$ имеют соответственно размеры $n\times\rho$ и $n\times(n-\rho)$; столбцы матрицы $W_0(\lambda,\mu)$ образуют базис правого нуль-пространства $N_c[F]$;

• $\Delta(\lambda,\mu) = F(\lambda,\mu)W_1(\lambda,\mu)$ – двухпараметрическая полиномиальная $n\times\rho$ матрица полного столбцового ранга, регулярный спектр которой есть объединение регулярных спектров матриц $F(\lambda,\mu)$ и $W_1(\lambda,\mu)$;

• $\mathbb{O}$ – нулевая $n\times(n-\rho)$ матрица.

Преобразование вида

$$F(\lambda,\mu)\widetilde{W}(\lambda,\mu) = [\widetilde{\Delta}(\lambda,\mu),\mathbb{O}] \tag{1.2}$$

будем называть ΔW-1 факторизацией матрицы $F(\lambda,\mu)$, если выполняются следующие условия:

• $\widetilde{W}(\lambda,\mu) = [\widetilde{W}_1(\lambda,\mu),\widetilde{W}_0(\lambda,\mu)]$ – унимодулярная $n\times n$ матрица[2] с блоками $\widetilde{W}_1(\lambda,\mu)$ и $\widetilde{W}_0(\lambda,\mu)$ размеров соответственно $n\times\rho$ и $n\times(n-\rho)$; столбцы матрицы $\widetilde{W}_0(\lambda,\mu)$ образуют *свободный базис* пространства $N_c[F]$;

---

[1] ΔW-2 факторизация подробно описана в работе [1], а производные от нее факторизации – в работе [4].

[2] Именно это свойство, являющееся аналогом соответствующего свойства матрицы $W(\lambda)$ из ΔW-1 факторизации однопараметрической матрицы [3], было учтено при использовании цифры 1 в приведенном выше и последующих названиях факторизаций двухпараметрических матриц.

• $\widetilde{\Delta}(\lambda,\mu) = F(\lambda,\mu)\,\widetilde{W}_1(\lambda,\mu)$ – двухпараметрическая $n \times \rho$ матрица полного столбцового ранга, регулярный спектр которой совпадает с регулярным спектром матрицы $F(\lambda,\mu)$;

• $\mathbb{O}$ – нулевая $n \times (n-\rho)$ матрица.

Соотношение

$$F(\lambda,\mu) = \widetilde{\nabla}(\lambda,\mu)\widetilde{V}(\lambda,\mu) \tag{1.3}$$

называется ∇V-1 факторизацией матрицы $F(\lambda,\mu)$, если выполняются следующие условия:

• $\widetilde{\nabla}(\lambda,\mu)$ – двухпараметрическая полиномиальная $m \times \rho$ матрица, регулярный спектр которой совпадает с регулярным спектром матрицы $F(\lambda,\mu)$;

• $\widetilde{V}(\lambda,\mu)$ – двухпараметрическая полиномиальная $\rho \times n$ матрица полного строчного ранга, не имеющая регулярного спектра, $N_c[\widetilde{V}] = N_c[F]$.

Соотношение

$$F(\lambda,\mu) = \widetilde{U}(\lambda,\mu)\widetilde{T}(\lambda,\mu)\widetilde{\nabla}(\lambda,\mu) \tag{1.4}$$

называется UTV-1 факторизацией матрицы $F(\lambda,\mu)$, если выполняются следующие условия:

• $\widetilde{T}(\lambda,\mu)$ – регулярная двухпараметрическая $\rho \times \rho$ матрица, спектр которой совпадает с регулярным спектром матрицы $F(\lambda,\mu)$;

• $\widetilde{V}(\lambda,\mu)$ и $\widetilde{U}(\lambda,\mu)$ – двухпараметрические матрицы размеров $\rho \times n$ и $m \times \rho$ соответственно, не имеющие регулярного спектра.

1.2. Связь между спектрами матриц $F(\lambda,\mu)$ и $F_1(\mu)$. Пусть

$$F(\lambda,\mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}, \quad F(\lambda,\mu) = \sum_{i=0}^{s} C_i(\mu)\lambda^i = F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda),$$

где $F_1(\mu) = [C_s(\mu),\dots,C_0(\mu)]$. Пусть μ_i, $i = 1,\dots,r$, суть собственные значения матрицы $F_1(\mu)$, а $D_i(\lambda;\mu_i)$, $i = 1,\dots,r$, суть отвечающие им наследственные пучки[3] для матрицы $F_1(\mu)$.

Рассмотрим случай, когда точки спектра матрицы $F(\lambda,\mu)$ не зависят от параметра λ, так что $\sigma_r[F] = \sigma_{r2}[F]$, где через $\sigma_{r2}[F]$ обозначен смешанный регулярный спектр матрицы $F(\lambda,\mu)$.

---

[3]Определения и свойства спектральных характеристик см., например, в [1, 2].

Лемма 1. *Если спектр матрицы $F(\lambda,\mu)$ не зависит от параметра λ, то собственные значения $\mu_i \in \sigma[F_1]$, не принадлежащие смешанному сингулярному спектру матрицы $F(\lambda,\mu)$, образуют смешанный регулярный спектр $\sigma_{r2}[F_1]$ матрицы $F(\lambda,\mu)$.*

Доказательство. Доказательсто леммы следует из известных соотношений [2] между спектрами матриц $F(\lambda,\mu)$ и $F_1(\mu)$ и наследственных пучков $D_i(\lambda,\mu_i)$, $i = 1,\dots,r$: собственные значения $\mu_i \in \sigma[F_1]$, для которых $D_i(\lambda,\mu_i)$ не имеют собственных значений λ_i, образуют смешанный регулярный спектр $\sigma_{r2}[F]$ матрицы $F(\lambda,\mu)$, если $\mu_i \notin \sigma[F_1] \cap \sigma_{s2}[F]$. По условию леммы, спектр матрицы $F(\lambda,\mu)$ не зависит от λ, так что пучки $D_i(\lambda,\mu_i)$, $i = 1,\dots,r$, не имеют собственных значений. Справедливость леммы установлена. □

1.3. Спектральные пары матрицы $W(\lambda,\mu)$. Матрица $W(\lambda,\mu) = [W_1(\lambda,\mu), W_0(\lambda,\mu)]$ и ее блоки $W_1(\lambda,\mu)$ и $W_0(\lambda,\mu)$ могут иметь спектральные пары следующих типов:

(1) $\mu_{10}, Y_{10}(\lambda)$ – спектральная пара матрицы $W(\lambda,\mu)$, удовлетворяющая условиям

$$W(\lambda,\mu_{10})Y_{10}(\lambda) = 0, \quad \mu_{10} \in \sigma[W], \quad Y_{10}(\lambda) = \begin{bmatrix} y_{10}(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix} \in \overline{N}_c[W(\lambda,\mu_{10})],$$

где $y_{10}(\lambda) \neq 0$ – вектор из ρ компонент.

В этом случае μ_{10}, $y_{10}(\lambda)$ есть спектральная пара матрицы $W_1(\lambda,\mu)$:

$$W_1(\lambda,\mu_{10})y_{10}(\lambda) = 0, \quad y_{10}(\lambda) \neq 0, \quad y_{10} \in \overline{N}_c[W_1(\lambda,\mu_{10})].$$

(2) $\mu_{10}, Y_{10}(\lambda)$ – спектральная пара матрицы $W(\lambda,\mu)$, удовлетворяющая условиям

$$W(\lambda,\mu_{02})Y_{02}(\lambda) = 0, \quad \mu_{02} \in \sigma[W], \quad Y_{02}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_{02}(\lambda) \end{bmatrix} \in \overline{N}_c[W(\lambda,\mu_{02})],$$

где $y_{02} \neq 0$ – вектор из $n-\rho$ компонент.

В этом случае μ_{02}, $y_{02}(\lambda)$ есть спектральная пара матрицы $W_0(\lambda,\mu)$:

$$W_0(\lambda,\mu_{02})y_{02}(\lambda) = 0, \quad y_{02}(\lambda) \neq 0, \quad y_{02} \in \overline{N}_c[W_0(\lambda,\mu_{02})].$$

(3) μ_{12}, $y_{12}(\lambda)$ – спектральная пара матрицы $W(\lambda,\mu)$, удовлетворяющая условиям

$$W(\lambda,\mu)Y_{12}(\lambda) = 0, \quad \mu_{12} \in \sigma[W], \quad Y(\lambda) = \begin{bmatrix} y_{12}(\lambda) \\ y_{22}(\lambda) \end{bmatrix} \in N_c[W(\lambda,\mu_{12})],$$

где

$$y_{12}(\lambda) \in N_c[W_1(\lambda, \mu_{12})], \quad y_{22}(\lambda) \in N_c[W_0(\lambda, \mu_{12})].$$

В этом случае пары μ_{12}, y_{12}, где $\mu_{12} \in \sigma_r[W_1]$, и μ_{12}, y_{22}, где $\mu_{12} \in \sigma_r[W_0]$, являются спектральными парами соответственно матриц $W_1(\lambda, \mu)$ и $W_0(\lambda, \mu)$:

$$W_1(\lambda, \mu_{12}) y_{12} = 0, \quad W_0(\lambda, \mu_{12}) y_{22} = 0.$$

(4) $\omega, Y(\lambda)$ – спектральная пара матрицы $W(\lambda, \mu)$, удовлетворяющая условиям

$$W(\lambda, \omega) Y(\lambda) = 0, \quad \omega \in \sigma[W], \quad Y(\lambda) = \begin{bmatrix} y_1(\lambda) \\ y_2(\lambda) \end{bmatrix} \in \overline{N}_c[W(\lambda, \omega)],$$

$$W_1(\lambda, \omega) y_1(\lambda) = -W_0(\lambda, \omega) y_2(\lambda) \neq 0, \tag{1.5}$$

где $y_1(\lambda) \neq 0$, $y_2(\lambda) \neq 0$ – векторы из ρ и $n - \rho$ компонент соответственно.

В этом случае точка ω не принадлежит спектрам матриц $W_1(\lambda, \mu)$ и $W_0(\lambda, \mu)$. В дальнейшем множество точек $\omega \in \sigma[W]$, удовлетворяющие соотношению (1.5) будем обозначать через $\widehat{\sigma}[W]$.

Справедливы следующие очевидные соотношения:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\sigma}[W] \subseteq \sigma_r[W] = \sigma_r[W^T] = \sigma[W], \\
&\sigma[W] = \sigma_r[W] \cup \sigma_r[W_0] \cup \widehat{\sigma}[W], \\
&\sigma_r[W_1] = \sigma_r[W_1^T], \quad \sigma_r[W_1] \cap \widehat{\sigma}[W] = \varnothing, \\
&\sigma_r[W_0] = \sigma_r[W_0^T], \quad \sigma_r[W_0] \cap \widehat{\sigma}[W] = \varnothing, \\
&\sigma_r[W_1] \cap \widehat{\sigma}_r[W_1] = \varnothing, \quad \sigma_r[W_0] \cap \widehat{\sigma}[W] = \varnothing.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

1.4. Факторизация матриц $W_1^T(\lambda, \mu)$ и $W_0^T(\lambda, \mu)$. Запишем блоки $W_1^T(\lambda, \mu) = \sum\limits_{i=0}^{t_1} \mathcal{E}_i^{(1)}(\mu) \lambda^i$ и $W_0^T(\lambda, \mu) = \sum\limits_{i=0}^{t_0} \mathcal{E}_i^{(0)}(\mu) \lambda^i$ матрицы $W^T(\lambda, \mu)$ в виде

$$W_1^T(\lambda, \mu) = \mathcal{E}^{(1)}(\mu) \Lambda^{(1)}(\lambda), \quad W_0^T(\lambda, \mu) = \mathcal{E}^{(0)}(\mu) \Lambda^{(0)}(\lambda), \tag{1.7}$$

где

$$\mathcal{E}^{(1)}(\mu) = [\mathcal{E}_{t_1}^{(1)}(\mu), \dots, \mathcal{E}_0^{(1)}(\mu)], \quad \mathcal{E}^{(0)}(\mu) = [\mathcal{E}_{t_0}^{(0)}(\mu), \dots, \mathcal{E}_0^{(0)}(\mu)],$$

$$\Lambda^{(1)}(\lambda) = [\lambda^{t_1} I_{n_1}, \dots, \lambda^0 I_{n_1}], \quad \Lambda^{(0)}(\lambda) = [\lambda^{t_0} I_{n_0}, \dots, \lambda^0 I_{n_0}],$$

$n_1 = \rho$, $n_0 = n - \rho$. Выполним ∇V-1 факторизацию матриц $\mathcal{E}^{(1)}(\mu)$ и $\mathcal{E}^{(0)}(\mu)$:

$$\mathcal{E}^{(1)}(\mu) = \nabla_1(\mu)V^{(1)}(\mu), \quad \mathcal{E}^{(0)}(\mu) = \nabla_0(\mu)V^{(0)}(\mu). \tag{1.8}$$

Здесь $\nabla_1(\mu)$ и $\nabla_0(\mu)$ суть регулярные матрицы порядков ρ и $n-\rho$ соответственно; $V^{(1)}(\mu)$ и $V^{(0)}(\mu)$ – полиномиальные $\rho \times n$ и $(n-\rho)\times n$ матрицы, не имеющие регулярных спектров (см. [3]).

Из (1.7) и (1.8) имеем:

$$\begin{aligned} W_1^T(\lambda,\mu) &= \nabla_1(\mu)V^{(1)}(\mu)\Lambda^{(1)}(\lambda) \\ &\equiv \nabla_1(\mu)\sum_{i=0}^{t_1} V_i^{(1)}(\mu)\lambda^i \equiv \nabla_1(\mu)U_1^T(\lambda,\mu), \\ W_0^T(\lambda,\mu) &= \nabla_0(\mu)V^{(0)}(\mu)\Lambda^{(0)}(\lambda) \\ &\equiv \nabla_0(\mu)\sum_{i=0}^{t_0} V_i^{(0)}(\mu)\lambda^i \equiv \nabla_0(\mu)U_0^T(\lambda,\mu). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Блочное представление матриц

$$V^{(1)}(\mu) = [V_{t_1}^{(1)}(\mu),\dots,V_0^{(1)}(\mu)], \quad V^{(0)}(\mu) = [V_{t_0}^{(0)}(\mu),\dots,V_0^{(0)}(\mu)]$$

приводит к соотношениям

$$U_1^T(\lambda,\mu) := \sum_{i=0}^{t_1} V_i^{(1)}(\mu)\lambda^i, \quad U_0^T(\lambda,\mu) := \sum_{i=0}^{t_0} V_i^{(0)}(\mu)\lambda^i.$$

Таким образом, получаем из (1.9) соотношения

$$\begin{aligned} W^T(\lambda,\mu) &= \operatorname{diag}\{\nabla_1(\mu),\nabla_0(\mu)]\}\left[U_1^T(\lambda,\mu),U_0^T(\lambda,\mu)\right], \\ W(\lambda,\mu) &= [U_1(\lambda,\mu),U_0(\lambda,\mu)]\operatorname{diag}\{\nabla_1^T(\mu),\nabla_0^T(\mu)\}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

1.5. Свойства множества $\widehat{\sigma}[W]$.

1°. Имеют место следующие соотношения:

$$W_1^T(\lambda,\mu) = \nabla_1(\mu)U_1^T(\lambda,\mu), \quad W_0^T(\lambda,\mu) = \nabla_2(\mu)U_0(\lambda,\mu), \tag{1.11}$$
$$W(\lambda,\mu) = \{U_1(\lambda,\mu), U_0(\lambda,\mu)\} \operatorname{diag}\{\nabla_1(\mu), \nabla_0(\mu)\}, \tag{1.12}$$
$$\sigma[\nabla_1] = \sigma_r[W_1^T] = \sigma_r[W_1], \quad \sigma[\nabla_0] = \sigma_r[W_0^T] = \sigma_r[W_0], \tag{1.13}$$
$$\sigma[U_1, U_0] = \widehat{\sigma}[W] = \widehat{\sigma}[W^T], \tag{1.14}$$
$$\sigma[U_1] \cap \sigma_r[W_1] = \varnothing, \quad \sigma[U_0] \cap \sigma_r[W_0] = \varnothing, \tag{1.15}$$
$$\sigma[U_1^T] = \sigma_{rs}[W_1^T] \cup \sigma_s[W_1^T], \quad \sigma[U_0^T] = \sigma_{rs}[W_0^T] \cup \sigma_s[W_0^T], \tag{1.16}$$
$$\sigma_s[W_1^T] \cap \sigma_s[W_0^T] = \varnothing, \tag{1.17}$$
$$\{\sigma_{rs}[W_1^T] \cup \sigma_r[W_1^T]\} \cap \{\sigma_{rs}[W_0^T] \cup \sigma_r[W_0^T]\} = \varnothing. \tag{1.18}$$

Из соотношений (1.10) следует справедливость (1.11) и (1.12). Из определения ∇V-1 факторизации следует справедливость (1.15). Из свойств матрицы $W(\lambda,\mu)$ следует, что регулярные спектры каждой из пар матриц $W_1^T(\lambda,\mu)$, $\mathcal{E}^{(1)}(\mu)$ и $W_0^T(\lambda,\mu)$, $\mathcal{E}^{(0)}(\mu)$ не зависят от параметра λ. Тогда с учетом факторизаций (1.7) из леммы 1 следует справедливость (1.13):

$$\sigma_r[W_1^T] = \sigma_r[\mathcal{E}^{(1)}] = \sigma[\nabla_1], \quad \sigma_r[W_0^T] = \sigma_r[\mathcal{E}^{(0)}] = \sigma[\nabla_0]. \tag{1.19}$$

Из (1.9) и (1.6) вытекают соотношения

$$\begin{gathered}\sigma[W_1^T] = \sigma[\nabla_1] \cup \sigma[U_1^T], \quad \sigma[W_0^T] = \sigma[\nabla_0] \cup \sigma[U_0^T],\\ \sigma[U_1^T] = \sigma_{rs}[W_1^T] \cup \sigma_s[W_1^T], \quad \sigma[U_0^T] = \sigma_{rs}[W_0^T] \cup \sigma_s[W_0^T],\\ \sigma[W] = \sigma_r[W] = \sigma_r[W^T] = \sigma_r[U_1, U_0] \cup \sigma_r[W_1] \cup \sigma_r[W_0],\end{gathered} \tag{1.20}$$

так что $\sigma_r[U_1, U_0] = \widehat{\sigma}[W]$. Справедливость (1.14) и (1.16) установлена. Справедливость (1.17) и (1.18) следует из регулярности матриц $W(\lambda,\mu)$ и $W^T(\lambda,\mu)$.

Доказательство 1° закончено.

2°. В точках $\omega \in \widehat{\sigma}[W]$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{gathered} x = W_1(\lambda,\omega)y_1 = -W_0(\lambda,\omega)y_2 \neq 0,\\ N_c[W_1(\lambda,\omega) \cap N_c[W_0(\lambda,\omega)] = \{0\}.\end{gathered} \tag{1.21}$$

Справедливость (1.21) следует из определения множества $\widehat{\sigma}[W]$.

3°. Имеет место включение

$$\widehat{\sigma}[W[\subseteq \sigma_{rs}[F].$$

Действительно, если $\omega \in \widehat{\sigma}[W]$, то ω, x, где $x = W_1(\lambda,\omega)y_1 = -W_0(\lambda,\omega)y_2 \neq 0$, является спектральной парой матрицы $F(\lambda,\mu)$, как в случае, когда ω принадлежит регулярному спектру матрицы $F(\lambda,\mu)$, так и в случае, когда ω принадлежит сингулярному спектру матрицы $F(\lambda,\mu)$. Справедливость этого утверждения следует из определения спектральных пар и соотношений вида

$$F(\lambda,\mu)W_1(\lambda,\omega)y_1 = 0, \quad x = W_1(\lambda,\omega)y_1 \in \overline{N}_c[F(\lambda,\omega)]$$

и

$$F(\lambda,\mu)W_0(\lambda,\omega)y_2 = 0, \quad x = W_0(\lambda,\omega)y_2 \in N_c[F(\lambda,\omega)],$$

так что $\omega \in \sigma_{rs}[F]$.

4°. В каждой точке $\omega \in \widehat{\sigma}[F]$ множества $\widehat{\sigma}[F] := \widehat{\sigma}[W] \cap \sigma[F]$ выполняется очевидное соотношение

$$x \in \overline{N}_c[F(\lambda,\mu)] \cap N_c[F(\lambda,\mu)] \neq 0. \tag{1.22}$$

5°. Между соотношениями (1.21) и (1.22) имеет место взаимно-однозначное соответствие.

Замечания.

1. Соотношения (1.21) и (1.22) из свойств 2° и 4° определяют точки $\omega \in \widehat{\sigma}[W]$ в терминах спектральных характеристик матриц $W(\lambda,\mu)$ и $F(\lambda,\mu)$ соответственно.

2. Класс матриц $F(\lambda,\mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ таких, что $\widehat{\sigma}[F] = \widehat{\sigma}[W]$, является непустым. К нему относятся, например, матрицы, не имеющие сингулярного спектра, матрицы, для которых регулярно-сингулярный спектр не существует, и матрицы, для которых правое нуль-пространство из полиномиальных решений совпадает с $\mathcal{H}_c[F] = N_c[C_s(\mu)] \cap \ldots \cap N_c[C_0(\mu)]$.

2. Построение факторизаций двухпараметрической матрицы

2.1. Алгоритм построения ΔW-1 факторизации двухпараметрической матрицы. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для существования ΔW-1 факторизации матрицы $F(\lambda,\mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ достаточно, чтобы $\widehat{\sigma}[F] = \varnothing$.*

Доказательство. Доказательство теоремы проведем конструктивно. Построение ΔW-1 факторизации двухпараметрической матрицы $F(\lambda,\mu)$ предполагает выполнение следующих операций.

(1) Выполняется ΔW-2 факторизация [1] матрицы $F(\lambda,\mu)$,

$$F(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu)=[\Delta(\lambda,\mu),\mathbb{O}],$$

и находится матрица $W(\lambda,\mu)=[W_1(\lambda,\mu),W_0(\lambda,\mu)]$.

(2) Матрицы $W_1^T(\lambda,\mu)$ и $W_0^T(\lambda,\mu)$ записыаются в виде

$$\begin{aligned} W_1^T(\lambda,\mu) &= \sum_{i=0}^{t_1}\mathcal{E}_i^{(1)}(\mu)\lambda^i=\mathcal{E}^{(1)}(\mu)\Lambda^{(1)}(\mu),\\ W_0^T(\lambda,\mu) &= \sum_{i=0}^{t_0}\mathcal{E}_i^{(0)}(\mu)\lambda^i=\mathcal{E}^{(0)}(\mu)\Lambda^{(0)}(\lambda). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь

$$\mathcal{E}^{(1)}(\mu)=\left[\mathcal{E}_{t_1}^{(1)}(\mu),\dots,\mathcal{E}_0^{(1)}(\mu)\right],\quad \mathcal{E}^{(0)}(\mu)=\left[\mathcal{E}_{t_0}^{(0)}(\mu),\dots,\mathcal{E}_0^{(1)}(\mu)\right],$$

$$\Lambda^{(1)}(\lambda)=\left[\lambda^{t_1}I_{n_1},\dots,\lambda^0 I_{n_1}\right]^B,\quad \Lambda^{(0)}(\lambda)=\left[\lambda^{t_0}I_{n_0},\dots,\lambda^0 I_{n_0}\right]^B,$$

где $n_1=\rho$ и $n_0=n-\rho$ – число столбцов в матричных коэффициентах $\mathcal{E}_i^{(1)}(\mu)$ и $\mathcal{E}_i^{(0)}(\mu)$ соответственно.

(3) К матрицам $\mathcal{E}^{(1)}(\mu)$ и $\mathcal{E}^{(0)}(\mu)$ применяется алгоритм ∇V-1 факторизации [3]:

$$\mathcal{E}^{(1)}(\mu)=\nabla_1(\mu)V^{(1)}(\mu),\quad \mathcal{E}^{(0)}(\mu)=\nabla_0(\mu)V^{(0)}(\mu). \tag{2.2}$$

(4) Формируются матрицы

$$U_1^T(\lambda,\mu)=\sum_{i=0}^{t_1}V_i^{(1)}(\mu)\lambda^i,\quad U_0^T(\lambda,\mu)=\sum_{i=0}^{t_0}V_i^{(0)}(\mu)\lambda^i, \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned} W_1^T(\lambda,\mu) &= \nabla_1(\mu)V^{(1)}(\mu)\Lambda^{(1)}(\lambda)=\nabla_1(\mu)U_1^T(\lambda,\mu),\\ W_0^T(\lambda,\mu) &= \nabla_0(\mu)V^{(0)}(\mu)\Lambda^{(0)}(\lambda)=\nabla_0(\mu)U_0^T(\lambda,\mu). \end{aligned} \tag{2.4}$$

С учетом (2.4) матрицы $W^T(\lambda,\mu)$ и $W(\lambda,\mu)$ имеют вид

$$W^T(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}\nabla_1(\mu)U_1^T(\lambda,\mu)\\ \nabla_0(\mu)U_0^T(\lambda,\mu)\end{bmatrix},$$

$$W(\lambda,\mu)=\left[U_1(\lambda,\mu),U_0(\lambda,\mu)\right]\operatorname{diag}\left\{\nabla_1^T(\mu),\nabla_0^T(\mu)\right\}.$$

(5) В качестве искомой матрицы $\widetilde{W}(\lambda,\mu)$, реализующей ΔW-1 факторизацию матрицы $F(\lambda,\mu)$, берется матрица

$$\widetilde{W}(\lambda,\mu) = U(\lambda,\mu) := [U_1(\lambda,\mu), U_0(\lambda,\mu)] = [\widetilde{W}_1(\lambda,\mu), \widetilde{W}_0(\lambda,\mu)].$$

(6) Окончательно получаем:

$$F(\lambda,\mu)U(\lambda,\mu) \equiv \left[F(\lambda,\mu)\widetilde{W}(\lambda,\mu)\right] = \left[\widetilde{\Delta}(\lambda,\mu), \mathbb{O}\right], \tag{2.5}$$
$$\widetilde{\Delta}(\lambda,\mu) := F(\lambda,\mu)U(\lambda,\mu) \equiv F(\lambda,\mu)\widetilde{W}(\lambda,\mu).$$

Для доказательства теоремы 1 и обоснования приведенного алгоритма надо показать, что при условии $\widehat{\sigma}[W] = \varnothing$, соотношение (2.5) представляет собой искомую ΔW-1 факторизацию матрицы $F(\lambda,\mu)$. Для этого следует установить, что $U(\lambda,\mu) = \widetilde{W}(\lambda,\mu)$ является унимодулярной матрицей, а $\widetilde{\Delta}(\lambda,\mu) = F(\lambda,\mu)\widetilde{W}_1(\lambda,\mu)$ есть матрица, регулярный спектр которой совпадает с регулярным спектром матрицы $F(\lambda,\mu)$. Действительно, по свойству 1° из раздела 1, если $\widehat{\sigma}[W] = \varnothing$, то матрица $U(\lambda,\mu) = [U_1(\lambda,\mu), U_0(\lambda,\mu)]$ является регулярной матрицей, не имеющей регулярного спектра, то есть унимодулярной матрицей. Отсюда следует, что матрица $F(\lambda,\mu)U_1(\lambda,\mu)$ имеет регулярный спектр, совпадающий с регулярным спектром матрицы $F(\lambda,\mu)$. □

Следствие 1. *Для существования ΔW-1 факторизации матрицы $F(\lambda,\mu)$ достаточно, чтобы матрица $F(\lambda,\mu)$ не имела регулярно-сингулярного спектра.*

Справедливость этого утверждения следует из включения $\widehat{\sigma}[W] = \widehat{\sigma}[F] \subseteq \sigma_{rs}[F]$.

В условиях существования ΔW-1 факторизации для матрицы $F(\lambda,\mu)$ свободный базис пространства $N_c[F]$ определяется столбцами матрицы $U_0(\lambda,\mu)$. При этом $\mathrm{span}\, U_0(\lambda,\mu) \cap \mathrm{span}\, U_1(\lambda,\mu) = \{0\}$ при любых λ и μ.

2.2. Построение минимального базиса правого нуль-пространства $N_c[F]$. Пусть $F(\lambda,\mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, $N_c[F]$ – правое нуль-пространство из полиномиальных решений $F(\lambda,\mu)$, $U(\lambda,\mu) = [U_1(\lambda,\mu), U_0(\lambda,\mu)]$ – унимодулярная матрица, реализующая ΔW-1 факторизацию матрицы $F(\lambda,\mu)$ при выполнении условия $\widehat{\sigma}[F] = \varnothing$, так что $U_0(\lambda,\mu)$ есть унимодулярный базис $N_c[F]$. При этом $\mathrm{span}\, U_1(\lambda,\mu) \cap \mathrm{span}\, U_0(\lambda,\mu) = \{0\}$. Задача состоит в построении минимального базиса $S_0(\lambda,\mu)$ пространства $N_c[F]$ и установлении условий его существования.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для существования минимального базиса пространства* $N_c[F]$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\widehat{\sigma}[F] = \varnothing$.

Доказательству теоремы предпошлем алгоритм преобразовании базиса $U_0(\lambda,\mu)$ в базис $S_0(\lambda,\mu)$, который состоит в выполнении следующих операций.

(1) Матрица $U_0(\lambda,\mu)$ размеров $n \times n_0$ степени t_0 по параметру λ представляется в виде

$$U_0(\lambda,\mu) = \sum_{i=0}^{t_0} V_i^{(1)}(\mu)\lambda^i = V_1(\mu)\Lambda_1(\lambda) = \overline{\Lambda}_1^B(\lambda)V_1^B(\mu).$$

Здесь

$$V_1(\mu) = \left[V_{t_0}^{(1)}(\mu), \dots, V_0^{(1)}(\mu)\right],$$

$$\Lambda_1(\lambda) = \left[\lambda^{t_0} I_{n_0}, \dots, \lambda^0 I_{n_0}\right]^B, \quad \overline{\Lambda}_1^B(\lambda) = \left[\lambda^{t_0} I_n, \dots, \lambda^0 I_n\right].$$

(2) Выполняется ΔW-1 факторизация [3] матрицы $V_1^B(\mu)$:

$$V_1^B(\mu)\widehat{W}_1(\mu) = \widehat{V}_1^B(\mu).$$

(3) Вычисляется матрица

$$U_0^{(1)}(\lambda,\mu) = U_0(\lambda,\mu)\widehat{W}_1(\mu) = \overline{\Lambda}_1^B(\lambda)\widehat{V}_1^B(\mu).$$

(4) Матрица $U_0^{(1)}(\lambda,\mu)$ размеров $n \times n_0$ степени s_0 по параметру μ представляется в виде

$$U_0^{(1)}(\lambda,\mu) = \sum_{i=0}^{s_0} V_i^{(2)}(\lambda)\mu^i = V_2(\lambda)\Lambda_2(\mu) = \overline{\Lambda}_2^B(\mu)V_2^B(\lambda),$$

где

$$V_2(\lambda) = \left[V_{s_0}^{(2)}(\lambda), \dots, V_0^{(2)}(\lambda)\right],$$

$$\Lambda_2(\mu) = \left[\mu^{s_0} I_{n_0}, \dots, \mu^0 I_{n_0}\right]^B, \quad \overline{\Lambda}_2^B(\mu) = \left[\mu^{s_0} I_n, \dots, \mu^0 I_n\right].$$

(5) Выполняется ΔW-1 факторизация матрицы $V_2^B(\lambda)$:

$$V_2^B(\lambda)\widehat{W}_2(\lambda) = \widehat{V}_2^B(\lambda).$$

(6) Вычисляется $n \times n_0$ матрица

$$S_0(\lambda,\mu) = U_0^{(1)}(\lambda,\mu)\widehat{W}_2(\lambda).$$

Покажем, что столбцы $n \times (n-\rho)$ матрицы $S_0(\lambda,\mu)$ образуют минимальный базис нуль-пространства $N_c[F]$. Для этого следует установить, что матрица $S_0(\lambda,\mu)$

(a) не имеет конечного спектра,

(b) является столбцово приведенной по каждому из параметров.

Справедливость свойств (a) и (b) следует из свойств ΔW-1 алгоритма [3]. Действительно, каждая из матриц $\widehat{W}_1(\mu)$ и $\widehat{W}_2(\lambda)$, реализующих ΔW-1 факторизации полиномиальных матриц $V_1^B(\mu)$ и $V_2^B(\lambda)$ полного столцового ранга, является унимодулярной. Матрицы $\widehat{V}_1^B(\mu)$ и $\widehat{V}_2^B(\lambda)$ являются столбцово приведенными. Отсутствие конечного спектра у матрицы $S_0(\lambda,\mu)$ следует из построения $\widehat{V}_1^B(\mu)$ и $\widehat{V}_2^B(\lambda)$. Каждая из матриц $\widehat{W}_1^B(\mu)$ и $\widehat{W}_2^B(\lambda)$ яаляется унимодулярной, при этом матрицы $V_1^B(\mu)$ и $V_2^B(\lambda)$ не имеют собственных значений, так как по условию конечный регулярный спектр у матрицы $U_0(\lambda,\mu)$ отсутствует. Таким образом, справедливость (a) и (b) установлена, и обоснование алгоритма построения минимального базиса $S_0(\lambda,\mu)$ закончено.

Как следует из операций (1)–(6), вычисление $S_0(\lambda,\mu)$ осуществляется преобразованием матрицы $U_0(\lambda,\mu)$. Для этого на матрицу $U_0(\lambda,\mu)$ никаких дополнительных условий не накладывалось. Из сказанного следует справедливость теоремы 2.

2.3. Новая форма представления ΔW-1 факторизации матрицы $F(\lambda,\mu)$. Используя полученные в предыдущем разделе результаты, рассмотрим отличную от (1.2) форму представления ΔW-1 факторизации двухпараметрической матрицы $F(\lambda,\mu)$:

$$F(\lambda,\mu)S(\lambda,\mu) = [\Delta(\lambda,\mu), \mathbb{O}].$$

Здесь $S(\lambda,\mu) = [S_1(\lambda,\mu), S_0(\lambda,\mu)]$ – унимодулярная матрица с блоками соответствующих подпространств $S_1(\lambda,\mu)$ и $S_0(\lambda,\mu)$, столбцы которых образуют минимальные базисы соответствующих подпространств. Столбцы матрицы $S_0(\lambda,\mu)$ образуют минимальный базис нуль-пространства $N_c[F]$, а столбцы матрицы $S_1(\lambda,\mu)$ – минимальный базис подпространства, являющегося прямым дополнением подпространства $N_c[F]$ до полного пространства $\mathbb{C}^n[\lambda,\mu]$, в котором действует оператор $F(\lambda,\mu)$; $\Delta(\lambda,\mu) = F(\lambda,\mu)S_1(\lambda,\mu)$ – $n \times \rho$ матрица полного столбцового ранга, регулярный спектр которой совпадает с регулярным спектром матрицы $F(\lambda,\mu)$; $\mathbb{O}$ – нулевая матрица размеров $n \times (n-\rho)$.

Вычисление матрицы $S_1(\lambda,\mu)$ реализуется тем же алгоритмом из п. 2.2, что и вычисление $S_0(\lambda,\mu)$.

2.4. Обращение двухпараметрических унимодулярных матриц.

Лемма 2. *Матрица $F^{-1}(\lambda,\mu)$, обратная к двухпараметрической унимодулярной матрице $F(\lambda,\mu)$, может быть вычислена в виде*

$$F^{-1}(\lambda,\mu)=\widetilde{W}(\lambda,\mu)\Delta^{-1},$$

где $\widetilde{W}(\lambda,\mu)$ – унимодулярная матрица, реализующая ΔW-1 факторизацию исходной матрицы $F(\lambda,\mu)$, а Δ – постоянная неособенная матрица.

Доказательство проведем конструктивно, представив алгоритм вычисления $F^{-1}(\lambda,\mu)$. Он состоит в выполнении следующих шагов:

(1) С помощью алгоритма из п. 2.1 выполняется ΔW-1 факторизация унимодулярной матрицы $F(\lambda,\mu)$ и находится матрица $\widetilde{W}(\lambda,\mu)$:

$$F(\lambda,\mu)\widetilde{W}(\lambda,\mu)=\Delta. \tag{2.6}$$

(2) Вычисляется матрица Δ^{-1}, являющаяся обратной к неособенной постоянной матрице Δ.

(3) Вычисляется искомая матрица

$$F^{-1}(\lambda,\mu)=\widetilde{W}(\lambda,\mu)\Delta^{-1}.$$

2.5. Алгоритм построения ∇V-1 факторизации матрицы $F(\lambda,\mu)$. Построение ∇V-1 факторизации

$$F(\lambda,\mu)=\widetilde{\nabla}(\lambda,\mu)\widetilde{V}(\lambda,\mu) \tag{2.7}$$

матрицы $F(\lambda,\mu)\in\mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, где $\widetilde{\nabla}(\lambda,\mu)$ есть $m\times\rho$ матрица полного столбцового ранга такая, что $\sigma_r[\widetilde{\nabla}]=\sigma_r[F]$, а $\widetilde{V}(\lambda,\mu)$ – $\rho\times n$ матрица полного строчного ранга, не имеющая регулярного спектра, $\sigma_r[\widetilde{V}]=\varnothing$, предполагает выполнение следующих операций.

(1) Выполняется ΔW-1 факторизация матрицы $F(\lambda,\mu)$:

$$F(\lambda,\mu)\widetilde{W}(\lambda,\mu)=[\widetilde{\Delta}(\lambda,\mu),\mathbb{O}], \tag{2.8}$$

для чего используется алгоритм из п. 2.1.

(2) С помощью алгоритма из п. 2.2 вычисляется матрица, обратная к унимодулярной матрице $\widetilde{W}(\lambda,\mu)$:

$$\widetilde{W}^{-1}(\lambda,\mu) \equiv \widehat{U}(\lambda,\mu) = \big[\widehat{U}_1(\lambda,\mu), \widehat{U}_2(\lambda,\mu)\big]^B.$$

Блоки $\widehat{U}_1(\lambda,\mu)$ и $\widehat{U}_2(\lambda,\mu)$ образованы из ρ первых и $n-\rho$ последних строк матрицы $\widehat{U}(\lambda,\mu)$.

(3) Из (2.8) находится соотношение

$$\begin{aligned} F(\lambda,\mu) &= \big[\widetilde{\Delta}(\lambda,\mu), \mathbb{O}\big]\big[\widehat{U}_1(\lambda,\mu), \widehat{U}_2(\lambda,\mu)\big]^B \\ &= \widetilde{\Delta}(\lambda,\mu)\widehat{U}_1(\lambda,\mu) \equiv \widetilde{\nabla}(\lambda,\mu)\widetilde{V}(\lambda,\mu). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Тот факт, что полученное соотношение (2.9) есть искомая ∇V-1 факторизация матрицы $F(\lambda,\mu)$, следует из свойств ΔW-1 факторизации и свойств унимодулярной матрицы $\widehat{W}^{-1}(\lambda,\mu) := \widehat{U}(\lambda,\mu)$.

Из того обстоятельства, что алгоритм ∇V-1 факторизации базируется на использовании алгоритма ΔW-1 факторизации матрицы $F(\lambda,\mu)$, вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Для того, чтобы матрица $F(\lambda,\mu)$ допускала ∇V-1 факторизацию, необходимо и достаточно, чтобы спектр матрицы $W(\lambda,\mu)$, реализующей ΔW-1 факторизацию матрицы $F(\lambda,\mu)$, не содержал множества $\widehat{\sigma}[W]$ (множества $\widehat{\sigma}[F]$).*

Следствие 2. 1. *Для существования ∇V-1 факторизации матрицы $F(\lambda,\mu)$ необходимо и достаточно существование ΔW-1 факторизации матрицы $F(\lambda,\mu)$.*

2. *Достаточным условием существования ∇V-1 факторизации матрицы $F(\lambda,\mu)$ является отсутствие в спектре матрицы $F(\lambda,\mu)$ регулярно-сингулярного спектра $\sigma_{rs}[F]$.*

2.6. Алгоритм построения UTV-1 факторизации $F(\lambda,\mu)$. Пусть UTV-1 факторизации матрицы $F(\lambda,\mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, $\rho < \min(m,n)$. Для построения UTV-1 факторизации

$$F(\lambda,\mu) = \widetilde{U}(\lambda,\mu)\widetilde{T}(\lambda,\mu)\widetilde{V}(\lambda,\mu), \tag{2.10}$$

где $\widetilde{T}(\lambda,\mu)$ – регулярная двухпараметрическая $\rho\times\rho$ матрица, спектр которой совпадает с регулярным спектром исходной матрицы $F(\lambda,\mu)$, а $\widetilde{U}(\lambda,\mu)$ и $\widetilde{V}(\lambda,\mu)$ – соответственно $m\times\rho$ и $\rho\times n$ матрицы, не имеющие регулярного спектра, выполняются следующие шаги.

(1) С помощью алгоритма из п. 2.5 вычисляется ∇V-1 факторизация матрицы $F(\lambda, \mu)$:

$$F(\lambda, \mu) = \widetilde{\nabla}(\lambda, \mu)\widetilde{V}(\lambda, \mu). \tag{2.11}$$

Здесь $\widetilde{V}(\lambda, \mu)$ – $\rho \times n$ матрица полного столбцового ранга, не имеющая регулярного спектра.

(2) Выполняется ∇V-1 факторизация матрицы $\widetilde{\nabla}^T(\lambda, \mu)$,

$$\widetilde{\nabla}^T(\lambda, \mu) = \widetilde{\nabla}_1(\lambda, \mu)\widetilde{V}_1(\lambda, \mu), \tag{2.12}$$

где $\widetilde{\nabla}_1(\lambda, \mu)$ – регулярная двухпараметрическая матрица порядка ρ, а $\widetilde{V}_1(\lambda, \mu)$ – двухпараметрическая $\rho \times m$ матрица полного столбцового ранга, не имеющая регулярного спектра.

(3) Из (2.11) и (2.12) получаем соотношение

$$F(\lambda, \mu) = \widetilde{U}(\lambda, \mu)\widetilde{T}(\lambda, \mu)\widetilde{V}(\lambda, \mu), \tag{2.13}$$

где $\widetilde{U}(\lambda, \mu) = \widetilde{V}_1^T(\lambda, \mu)$ – $m \times \rho$ матрица полного строчного ранга, $\widetilde{T}(\lambda, \mu) = \widetilde{\nabla}_1^T(\lambda, \mu)$ – регулярная двухпараметрическая матрица порядка ρ; $\widetilde{V}(\lambda, \mu)$ – $\rho \times n$ матрица полного столбцового ранга, не имеющая регулярного спектра.

Тот факт, что соотношение (2.13) есть искомая UTV-1 факторизация матрицы $F(\lambda, \mu)$, следует из свойств ∇V-1 факторизаций матриц $F(\lambda, \mu)$ и $\widetilde{\nabla}^T(\lambda, \mu)$. Из этого вытекает следующее условие существования UTV-1 факторизации.

Теорема 4. 1. *Для того, чтобы матрица $F(\lambda, \mu)$ допускала UTV-1 факторизацию, необходимо и достаточно, чтобы спектры матриц, реализующих ΔW-1 факторизации матриц $F(\lambda, \mu)$ и $\widetilde{\nabla}_1^T(\lambda, \mu)$, не содержали множества $\widehat{\sigma}[F]$.*

2. *Для того, чтобы матрица $F(\lambda, \mu)$ допускала UTV-1 факторизацию, достаточно, чтобы выполнялось условие $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$.*

Литература

1. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 1. — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 107–149.
2. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 8. — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 150–167.
3. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Численные методы решения параметрических задач алгебры.* Часть 1. *Однопараметрические задачи.* Наука, С.-Петербург, 2004.

4. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 7. — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 141–149.

Kublanovskaya V. N. To solving problems of algebra for two-parameter matrices. 10.

The paper considers conditions under which rank factorizations of a two-parameter polynomial matrix can be effected with the use of unimodular matrices, as in the one-parameter case. Algorithms for computing such factorizations and a minimal basis of the null space of the corresponding matrix are presented. Also an algorithm for inverting unimodular two-parameter polynomial matrices is suggested.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

Поступило 20 февраля 2012 г.