Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 405, 2012 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ q-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ. 3

1. Постановка задачи

Рассматривается многопараметрическая полиномиальная матрица с линейной зависимостью от параметров, т.е. многопараметрический пучок матриц

$$F = F(\mu_1, \dots, \mu_q) = P_0 + \sum_{i=1}^{q} \mu_i P_i, \tag{1}$$

где P_i, $i = 0, 1, \dots, q$, – постоянные $m \times n$ матрицы.

Задача состоит в вычислении точек конечного спектра $\sigma[F]$ пучка (1) ранга ρ: $F \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$. Для решения применяется метод наследственных пучков [3,4].

Исходный пучок (1) представим в виде

$$F(\mu_1, \dots, \mu_q) \equiv F_0(\mu_1, \dots, \mu_q) = A_1 + \mu_1 B_1. \tag{2}$$

Здесь $A_1 \equiv A_1(\overline{\mu}_{q-1}) := P_0 + \sum\limits_{i=2}^{q} \mu_i P_i$ есть $(q-1)$-параметрический пучок, $B_1 := P_1$ – постоянная матрица, $\overline{\mu}_{q-p} := (\mu_{p+1}, \dots, \mu_q)$.

Заметим, что приведенный в статье естественный порядок выбора первого и последующих параметров не является обязательным.

Метод вычисления спектра[1] $\sigma[F] = \sigma_r[F] \cup \sigma_s[F]$ пучка состоит из двух стадий. Первая стадия является общей, а вторая различается для точек регулярного, $\sigma_r[F]$, и сингулярного, $\sigma_s[F]$, спектров.

На первой стадии формируется последовательность пучков $\{A_k + \mu_k B_k\}$, $k = 1, \dots, q$, где $A_k \equiv A_k(\overline{\mu}_{q-k})$ есть $(q-k)$-параметрический пучок, а B_k – постоянная матрица.

Ключевые слова: спектр регулярный, сингулярный; метод наследственных пучков; многопараметрическая полиномиальная матрица, многопарметрический пучок матриц.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-318-а.

[1]Определение и свойства спектральных характеристик см., например, в [3,4].

На второй стадии вычисляются точки множеств $\sigma_r[F]$ и $\sigma_s[F]$. При этом предполагается выполнение следующих условий:

$$\sigma_{rs}[F] = \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F] = \varnothing,$$
$$N_c[F(*)] \cap N_c[F]_* = \{0\},$$
$$N_c[F] = \{0\}.$$

Здесь $(*)$ обозначает точку спектра пучка F; $N_c[F]$ – правое нуль-пространство пучка F из полиномиальных решений.

2. Алгоритм первой стадии

Вычисление последовательности $\{A_k + \mu_k B_k\}$, $k = 1, \dots, q$, реализуется выполнением следующих (типичных) операций.

(1) Пучок $F_1(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q) \equiv A_1 + \mu_1 B_1$ представляется в виде

$$A_1 + \mu_1 B_1 = [B_1, A_1] \begin{bmatrix} \mu_1 I_{n_1} \\ I_{n_1} \end{bmatrix} \equiv F_1(\mu_2, \dots, \mu_q)\Lambda_1(\mu_1).$$

Здесь

$$F_1 := [B_1, A_1] \equiv [P_1,\, P_0 + \sum_{i=2}^{q} \mu_i P_i], \quad \Lambda_1(\mu_1) = [\mu_1 I_{n_1}, I_{n_1}]^B,$$

где $n_1 = n$, I_n – единичная матрица порядка n.

(2) Матрица F_1 записывается в виде пучка

$$F_1(\mu_2, \dots, \mu_q) = A_2 + \mu_2 B_2,$$

где $A_2 \equiv A_2(\overline{\mu}_{q-2}) := [B_1, P_0 + \sum_{i=3}^{q} \mu_i P_i]$, $B_2 := [\mathbb{O}, P_2]$ – $m \times n_2$ матрицы, $n_2 = 2n_1 \equiv 2n$.

Аналогично формируются последующие пучки $F_{k-1} = A_k + \mu_k B_k$ размеров $m \times n_k$, где $n_k := 2^{k-1} n$,

$$A_k \equiv A_k(\overline{\mu}_{q-k}) = [B_{k-1}, \dots, B_1,\, P_0 + \sum_{i=k+1}^{q} \mu_i P_i],$$
$$B_k = [\mathbb{O}, \dots, \mathbb{O}, P_k], \quad k = 3, \dots, q. \tag{3}$$

На последнем шаге $k = q$ будет построен пучок $A_q + \mu_q B_q$ постоянных матриц:

$$A_q = [B_{q-1}, \dots, B_1, P_0], \quad B_q = [\mathbb{O}, \dots, \mathbb{O}, P_q].$$

Построенная последовательность удовлетворяет следующим рекуррентным соотношениям:

$$F_{k-1} = [B_{k-1}, A_{k-1}] = A_q + \mu_q B_q = F_k \Lambda_k(\mu_k) = [B_k, A_k] \begin{bmatrix} \mu_k I_{n_k} \\ I_{n_k} \end{bmatrix}.$$

3. Алгоритмы второй стадии

3.1. Вычисление регулярного спектра. Вычисление точек множеств $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{r2}[F]$ регулярного спектра $\sigma_r[F]$ многопараметрического пучка (1) основано на использовании последовательности пучков $\{A_k + \mu_k B_k\}$, $k = 1, \ldots, q$, сформированных на первой стадии.

Рассмотрим построение одного (типичного) многообразия $\overline{\nu}_{q-p} = (\nu_{p+1}, \ldots, \nu_q)$ аффинного пространства $\mathbb{C}^q$, принадлежащего при $p = 0$ множеству $\sigma_{r1}[F]$, а при $p > 0$ – множеству $\sigma_{r2}[F]$. Параметры, образующие многообразие $\overline{\nu}_{q-p}$, вычисляются в следующем порядке: ν_q, $\nu_{q-1}, \ldots, \nu_{p+1}$. На первом (типичном) шаге вычисляется значение последнего параметра ν_q. С этой целью выполняются следующие операции.

(1) Из нуль-пространства пучка $A_q + \mu_q B_q$ исчерпывается подпространство $\mathcal{H}_c[F]$ полиномиальных решений нулевого индекса с помощью, например, алгоритмов из [1, 5]. Результат исчерпывания обозначим через $\widehat{A}_q + \mu_q \widehat{B}_q$.

(2) Вычисляются все различные собственные значения μ_q^* пучка $\widehat{A}_q + \mu_q \widehat{B}_q$ постоянных матриц. Здесь могут использоваться, например, алгоритмы из работ [2, 5].

(3) Для фиксированного (каждого) собственного значения μ_q^* вычисляется постоянная матрица $\widehat{A}_q + \mu_q^* \widehat{B}_q$ и находится матрица Q^*, столбцы которой образуют ортонормированный базис ее правого нуль-пространства.

(4) Формируется наследственный пучок $D_q(\lambda; \mu_q^*) := Q_+^* - \lambda Q_-^*$, матрицы которого являются блоками матрицы Q^*: $Q^* = \begin{bmatrix} Q_+^* \\ Q_-^* \end{bmatrix}$.

(5) Если пучок $\widehat{A}_q + \mu_q \widehat{B}_q$ имеет хотя бы одно собственное значение, то следует положить $\nu_q := \mu_q^*$.

(6) Вычисляются значение $A_{q-1}(\nu_q)$ матрицы A_{q-1} из (2) и пучок постоянных матриц $A_{q-1}(\nu_q) + \mu_{q-1} B_{q-1}$.

(7) Для вычисления следующего параметра ν_{q-1} к пучку $A_{q-1}(\nu_q) + \mu_{q-1} B_{q-1}$ постоянных матриц применяются операции (1)–(6).

Процесс рекурсивного вычисления значений параметров многообразия $\overline{\nu}_{q-p}$ заканчивается на шаге $k = p$, когда будет построен пучок постоянных матриц $\widehat{A}_p(\overline{\nu}_{q-p}) + \mu_p \widehat{B}_p$ или соответствующий наследственный пучок $D_p(\lambda; \overline{\nu}_{q-p})$, не имеющий собственных значений. В результате получим некоторые из искомых многообразий $\overline{\nu}_{q-p}$, которые являются точками множества $\sigma_{r1}[F]$ при $p = 0$ или множества $\sigma_{r2}[F]$ при $p > 0$.

Для вычисления остальных точек множеств $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{r2}[F]$ приведенные выше операции нужно выполнить для всех собственных значений пучков $A_k(\overline{\nu}_{q-k}) + \mu_k B_k$.

3.2. Вычисление сингулярного спектра. При вычислении точек множеств $\sigma_{s1}[F]$ и $\sigma_{s2}[F]$ сингулярного спектра $\sigma_s[F]$ многопараметрического пучка (1), как и в предшествующем случае, используется последовательность пучков $\{A_k + \mu_k B_k\}$, сформированных на первой стадии.

Рассмотрим построение одного (типичного) многообразия $\overline{\varkappa}_{q-p} := (\varkappa_{p+1}, \ldots, \varkappa_q)$, принадлежащего при $p = 0$ множеству $\sigma_{s1}[F]$, а при $p > 0$ – множеству $\sigma_{s2}[F]$. Значения параметров, образующих многообразие $\overline{\varkappa}_{q-p}$, вычисляются в следующем порядке: $\varkappa_q$, $\varkappa_{q-1}, \ldots, \varkappa_{p+1}$.

На первом (типичном) шаге вычисляется значение параметра $\varkappa_q$. С этой целью выполняются следующие операции.

(1) Для однопараметрической матрицы (пучка)

$$A_q + \mu_q B_q = [B_{q-1}, A_{q-1}(\mu_q)]$$

с помощью алгоритмов работы [5] находится однопараметричекая полиномиальная матрица $W^{(q)}(\mu_q)$, столбцы которой образуют свободный (минимальый) базис ее правого нуль-пространства из полиномиальных решений.

(2) Формируется наследственный двухпараметрический пучок

$$\widetilde{D}_q(\lambda; \mu_q) := W_+^{(q)}(\mu_q) - \lambda W_-^{(q)}(\mu_q),$$

в котором полиномиальные матрицы $W_+^{(q)}(\mu_q)$ и $W_-^{(q)}(\mu_q)$ являются блоками матрицы $W^{(q)}(\mu_q)$:

$$W^{(q)}(\mu_q) = \begin{bmatrix} W_+^{(q)}(\mu_q) \\ W_-^{(q)}(\mu_q) \end{bmatrix}.$$

(3) С помощью алгоритмов из работ [1,2] вычисляется регулярный спектр двухпараметрического пучка $\widetilde{D}_q(\lambda;\mu_q)$.

(4) В качестве искомого параметра $\varkappa_q$ берется любое (каждое) собственное значение матрицы $[-W_-^{(q)}(\mu_q), W_+^{(q)}(\mu_q)]$, если соответствующий наследственный пучок имеет собственные значения.

(5) Вычисляются значение $A_{q-1}(\varkappa_q)$ матрицы A_{q-1} из (2) и пучок постоянных матриц $A_{q-1}(\varkappa_q) + \mu_{q-1}B_{q-1}$.

(6) Для вычисления следующего значения параметра $\varkappa_{q-1}$ искомого многообразия $\overline{\varkappa}_{q-p}$ к пучку $A_{q-1}(\varkappa_q) + \mu_{q-1}B_{q-1}$ применяются операции (1)–(5).

Процесс рекурсивного вычисления значений параметров многообразия $\overline{\varkappa}_{q-p}$ заканчивается на шаге $k = p$, когда будет построен пучок $\widetilde{D}_p(\lambda;\varkappa_{q-p})$, не имеющий собственных значений. В результате будут получены некоторые из искомых многообразий $\overline{\varkappa}_{q-p}$, которые являются точками множества $\sigma_{s1}[F]$ при $p = 0$ или множества $\sigma_{s2}[F]$ при $p > 0$.

Для вычисления остальных точек множеств $\sigma_{s1}[F]$ и $\sigma_{s2}[F]$ необходимо выполнить приведенные выше операции для всех собственных значений пучков $\widetilde{D}_k(\lambda;\mu_{q-k})$.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц*. 8. — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 150–167.
2. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц*. 9. — Зап. научн. семин. ПОМИ **395** (2011), 124–141.
3. В. Н. Кублановская, *К решению спектральных задач для q-параметрических полиномилальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 168–183.
4. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *К решению спектральных задач для q-параметрических полиномиальных матриц*. 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **395** (2011), 162–171.
5. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Численные методы решения параметрических задач алгебры.* Часть 1. *Однопараметрические задачи.*, Наука. С.-Петербург, 2004.

Kublanovskaya V.N. To solving spectral problems for q-parameter polynomial matrices. 3.

The paper suggests methods for computing points of the finite spectrum of a multiparameter matrix pencil (a multiparameter polynomial matrix linearly dependent on its parameters) of general form. At the first stage,

a sequence $\{A_k + \mu_k B_k\}$ of pencils is computed, where B_k are constant matrices and A_k are $(q-k)$-parameter matrices linearly dependent on parameters, $k = 1, \ldots, q$. At every step of the second stage, which is different for the regular and singular spectra, an auxiliary one- or two-parameter hereditary pencil is formed, and the points of its spectrum are computed. In order to determine whether the characteristics computed belong to spectrum points of the original matrix, the hereditary pencils are used. Their construction is based on computing bases of null spaces of constant or one-parameter matrices.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, С.-Петербург 191023,
Россия

Поступило 24 января 2012 г.