Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 405, 2012 г.

Л. Ю. Колотилина

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ВТОРОГО ПО ВЕЛИЧИНЕ СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

§1. Введение

Данная статья нацелена, прежде всего, на рассмотрение второго по величине собственного значения симметричной неотрицательной матрицы порядка $n \geqslant 2$, элементы которой не превосходят единицы. Следуя [4], мы используем обозначение

$$\mathcal{M}_n = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ A = A^T, \ 0 \leqslant a_{ij} \leqslant 1, \ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}.$$

В работе [4] для матрицы $A \in \mathcal{M}_n$, все строчные суммы которой равны между собой, была установлена верхняя оценка

$$\lambda_2(A) \leqslant n - r. \tag{1.1}$$

Оценка (1.1) использовалась для вывода оценки

$$\lambda_1(A) + \lambda_2(A) \leqslant n, \tag{1.2}$$

справедливой для матриц $A \in \mathcal{M}_n$, все строчные суммы которых равны.

В этой статье мы распространяем оценку (1.1) на произвольные матрицы из класса $\mathcal{M}_n$, не обязательно имеющие равные строчные суммы, а также и на произвольные симметричные неотрицательные матрицы. Наши рассмотрения базируются на исследовании подкласса

$$\mathcal{M}_n^0 = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n^0 : \ a_{ii} = 0 \text{ для всех } i = 1, \ldots, n\}$$

класса $\mathcal{M}_n$. Именно для него устанавливаются основные результаты, которые затем переносятся на случай матриц из класса $\mathcal{M}_n$ и на общий случай.

Ключевые слова: верхняя оценка для второго по величине собственного значения, перроновский корень, симметричная неотрицательная матрица, сумма собственный значений, собственные значения графа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант No. 10-01-00318-а.

Статья построена следующим образом. В §2 рассматриваются верхние оценки для второго по величине собственного значения. §3 посвящен оценкам для суммы двух старших собственных значений матриц из рассматриваемых классов. Также приводятся следствия для собственных значений графов.

В статье используются следующие обозначения:

• $\langle n\rangle = \{1,\dots,n\}$.

• Если $K \subseteq \langle n\rangle$, то через $A[K]$ обозначается главная подматрица матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, составленная из элементов, строчные и столбцовые индексы которых принадлежат K.

• $e = [1,\dots,1]^T \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор.

• I_n – единичная матрица порядка n.

• $J_{m\times n} = e\,e^T$ – $m \times n$ матрица, состоящая из единиц. При $m = n$ используется обозначение J_n.

• Для симметричной матрицы A через $\lambda_i(A)$ обозначается ее i-е по величине собственное значение с учетом кратностей, так что $\lambda_1(A) \geqslant \dots \geqslant \lambda_n(A)$.

• Для неотрицательной матрицы A через $\rho(A)$ обозначается ее перроновский корень, иначе говоря, ее старшее собственное значение $\lambda_1(A)$.

• Для $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ее строчные суммы определяются по формуле

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1,\dots,n,$$

при этом мы полагаем

$$r(A) = \min_{i\in\langle n\rangle} r_i(A), \quad R(A) = \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(A). \tag{1.3}$$

• Для симметричных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ неравенство $A \geqslant B$ понимается в смысле положительно определенных матриц, т.е. оно означает, что матрица $A - B$ положительно полуопределена.

• Для $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ мы полагаем

$$D_A = \mathrm{Diag}\,(a_{11},\dots,a_{nn}).$$

В завершение этого вводного параграфа напомним два результата из теории неотрицательных матриц, которые нам потребуются в этой работе.

Теорема 1.1 (**Теорема Фробениуса**, см., например, [7, Chapter II, Theorem 1.1]). *Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – неотрицательная матрица порядка*

$n \geqslant 1$. *Тогда*

$$r(A) \leqslant \rho(A) \leqslant R(A). \tag{1.4}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то равенство в (1.4) *имеет место тогда и только тогда, когда все строчные суммы A равны.*

Теорема 1.2 ([1, Следствие 5.1]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, не имеющая нулевых строк. Тогда при любом значении α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, справедливы оценки*

$$\min_{i,j:\ a_{ij}\neq 0} \left\{ r_i(A)^\alpha\, r_j(A)^{1-\alpha} \right\} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i,j:\ a_{ij}\neq 0} \left\{ r_i(A)^\alpha\, r_j(A)^{1-\alpha} \right\}. \tag{1.5}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то каждое из соотношений в (1.5) *является равенством тогда и только тогда, когда*
• *либо*

$$r_i(A) = \rho(A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

• *либо $\alpha = 1/2$ и выполнены следующие условия:*

(i) *матрица A является 2-циклической, т.е. для некоторого подмножества $S \subseteq \langle n\rangle$ выполнены условия:*

$$A[S] = 0 \quad \text{и} \quad A[\bar{S}] = 0;$$

(ii) *существует число $\gamma > 0$ такое, что*

$$r_i(A) = \begin{cases} \rho(A)\gamma, & i \in S \\ \rho(A)\gamma^{-1}, & i \in \bar{S}. \end{cases}$$

Замечание 1.1. В теореме 1.2 предположение о том, что матрица A не имеет нулевых строк обеспечивает нетривиальность нижней оценки для $\rho(A)$; для верхней оценки оно несущественно.

§2. Верхние оценки для $\lambda_2(A)$

В этом параграфе представлены верхние оценки для второго по величине собственного значения матрицы из класса $\mathcal{M}_n^0$, а также показано, как их можно обобщить на случай произвольных симметричных неотрицательных матриц и, в частности, матриц из класса $\mathcal{M}_n$.

Следующий результат является базовым для этого параграфа.

Предложение 2.1. *пусть $A \in \mathcal{M}_n^0$, $n \geqslant 2$. Положим $A' = J_n - I_n - A$. Тогда*

$$\lambda_2(A) \leqslant \rho(A') - 1. \tag{2.1}$$

Кроме того, соотношение (2.1) *является равенством тогда и только тогда, когда либо* $A = J_n - I_n$, *т.е.* $A' = 0$, *либо для некоторого непустого подмножества* $K \subseteq \langle n \rangle$ *выполнены следующие условия:*

(i) $A'[K]$ *является неприводимой компонентой* A'*;*
(ii) $\rho(A'[K]) = \rho(A')$*;*
(iii) $A'[K]$ – 2*-циклическая матрица;*
(iv) *существует ненулевой вектор* $x \in \mathbb{R}^n$ *такой, что*

$$A'x = \lambda_n(A')x \quad \text{и} \quad e^T x = 0.$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что $A' \in \mathcal{M}_n^0$ и

$$\lambda_n(A') \leqslant (\text{tr } A')/n = 0. \tag{2.2}$$

Учитывая соотношения

$$\lambda_1(J_n) = n \quad \text{и} \quad \lambda_2(J_n) = \dots = \lambda_n(J_n) = 0$$

и используя неравенство Вейля (см., например, [5, Theorem 4.3.1] или [8]) и (2.2), мы выводим

$$-1 = \lambda_2(J_n - I_n) = \lambda_2(A + A') \geqslant \lambda_2(A) + \lambda_n(A') = \lambda_2(A) - |\lambda_n(A')|.$$

Поскольку, по теореме Перрона–Фробениуса (см., например, [2, Chapter 2, Theorem 1.4]),

$$|\lambda_n(A')| \leqslant \rho(A'),$$

мы заключаем, что

$$\lambda_2(A) \leqslant \rho(A') - 1.$$

Тем самым оценка (2.1) установлена.

Если $A = J_n - I_n$, то (2.1) очевидно является равенством. Поэтому предположим, что $A \neq J_n - I_n$. Из приведенного выше вывода (2.1) ясно, что это соотношение является равенством тогда и только когда, когда

$$|\lambda_n(A')| = \rho(A') \tag{2.3}$$

и

$$\lambda_2(A) + \lambda_n(A') = \lambda_2(J_n - I_n). \tag{2.4}$$

По второй части теоремы Перрона–Фробениуса (см., например, [2, Chapter 2, Theorem 2.20]), равенство (2.3) справедливо тогда и только тогда, когда матрица A' имеет 2-циклическую неприводимую компоненту $A'[K]$ такую, что

$$\rho(A') = \rho(A'[K]),$$

а в этом случае, как нетрудно понять, мы также имеем

$$\lambda_n(A') = \lambda_{min}(A'[K]) = -\rho(A'[K]) = -\rho(A'). \tag{2.5}$$

С другой стороны, равенство (2.4) справедливо (см., например, [8]) тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\begin{gathered} Ax = \lambda_2(A)x, \quad A'x = \lambda_n(A')x \quad \text{и} \\ (J_n - I_n)x = \lambda_2(J_n - I_n)x \iff e^T x = 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Наконец, поскольку $A = J_n - I_n - A'$, из условия ортогональности $e^T x = 0$, равенств (2.5) и второго условия из (2.6) вытекает, что

$$Ax = (\rho(A') - 1)x.$$

Этим доказано, что $\rho(A') - 1$ является собственным значением матрицы A. Мы утверждаем, что $\rho(A') - 1$ – это не перроновский корень A. Действительно, с учетом (2.5), из соотношения

$$\rho(A) = \rho(A') - 1$$

следовало бы, что

$$\lambda_n(J_n - I_n) = -1 = \rho(A) - \rho(A') = \lambda_1(A) + \lambda_n(A'),$$

а тогда, по условиям равенства в неравенстве Вейля (см., например, [8]), для некоторого ненулевого вектора y мы бы имели

$$\begin{gathered} Ay = \rho(A)y, \quad A'y = \lambda_n(A')y \quad \text{и} \\ (J_n - I_n)y = \lambda_n(J_n - I_n)y \iff e^T y = 0. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Но первое и последнее условия в (2.7) не могут выполняться одновременно, поскольку перроновский вектор y, являясь неотрицательным, не может быть ортогональным единичному вектору e.

Таким образом мы приходим к заключению, что

$$\rho(A') - 1 \leqslant \lambda_2(A).$$

Вместе с неравенством (2.1) полученное соотношение доказывает, что $\lambda_2(A) = \rho(A') - 1$ и $Ax = \lambda_2(A)x$. Тем самым показано, что первое соотношение в (2.6) является следствием второго и третьего соотношений.

Предложение доказано. □

Замечание 2.1. Если в условиях предложения 2.1 имеет место равенство $\lambda_2(A) = \rho(A') - 1$, то вектор x, удовлетворяющий условию (iv), является собственным вектором A, отвечающим ее собственному значению $\lambda_2(A)$.

Следующий результат показывает, что для матриц из класса $\mathcal{M}_n^0$, строчные суммы которых все равны между собой, условия равенства из предложения 2.1 можно упростить, исключив (iv).

Следствие 2.1. *Пусть $A \in \mathcal{M}_n^0$, $n \geqslant 2$. Если все строчные суммы матрицы A равны, то равенство*

$$\lambda_2(A) = \rho(A') - 1$$

имеет место тогда и только тогда, когда у матрицы $A' = J_n - I_n - A$ имеется 2-циклическая неприводимая компонента.

Доказательство. Необходимость следует из предложения 2.1.

Достаточность. Ввиду предложения 2.1, достаточно показать, что в том случае, когда все строчные суммы матрицы A равны между собой, условия (ii) и (iv) следуют из условий (i) и (iii). Действительно, так как все строчные суммы A' также равны между собой, то, по теореме Фробениуса, перроновские корни всех неприводимых компонент A' совпадают, откуда и следует (ii).

Поскольку вектор e является перроновским вектором для матрицы A, он также является и перроновским вектором для матрицы A'. Следовательно, если $A'x = \lambda_n(A')x$, $x \neq 0$, то вектор x должен быть ортогонален вектору e, так что условие (iv) предложения 2.1 выполняется автоматически. □

Верхняя оценка из предложения 2.1 обобщается на произвольные симметричные неотрицательные матрицы следующим образом.

Теорема 2.1. *Пусть $A = (a_{ij})$ – симметричная неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$. Пусть*

$$a \geqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \{a_{ii}\} \tag{2.8}$$

и

$$M \geqslant \max_{i \neq j} \{a_{ij}\}. \tag{2.9}$$

Тогда

$$\lambda_2(A) \leqslant a - 2M + \rho[MJ_n - (A - D_A)]. \tag{2.10}$$

Доказательство. Заметим, что

$$A \leqslant aI_n + MA_0,$$

где $A_0 = (A - D_A)/M \in \mathcal{M}_n^0$, и применим оценку (2.1) к матрице A_0. □

Для матриц из класса $\mathcal{M}_n$ из теоремы 2.1 вытекает следующий результат.

Следствие 2.2. *Пусть* $A \in \mathcal{M}_n$, $n \geqslant 2$, *и пусть константа* a *удовлетворяет условию* (2.8). *Тогда*

$$\lambda_2(A) \leqslant \rho(J_n - A) - 2(1 - a). \tag{2.11}$$

Доказательство. Из оценки (2.10) при $M = 1$ получаем

$$\lambda_2(A) \leqslant a - 2 + \rho(J_n - A_0), \tag{2.12}$$

где $A_0 = A - D_A \in \mathcal{M}_n^0$. Поскольку для матрицы $A \in \mathcal{M}_n$, по свойству монотонности перроновского корня (см., например, [2, Chapter 2, Corollary 1.6]), мы имеем

$$\rho(J_n - A_0) - a = \rho(J_n - (aI_n + A_0)) \leqslant \rho(J_n - A),$$

то нужная оценка (2.11) немедленно следует из (2.12). □

Ясно, что для матрицы $A \in \mathcal{M}_n$, все строчные суммы которой равны r, по следствию 2.2 с $a = 1$ и по теореме Фробениуса, мы имеем

$$\lambda_2(A) \leqslant n - r.$$

Таким образом, известная оценка (1.1), справедливая для матриц, имеющих равные строчные суммы, является следствием общей оценки (2.10).

В следующем предложении представлена абсолютная верхняя оценка для второго по величине собственного значения, справедливая для всех матриц из $\mathcal{M}_n^0$.

Предложение 2.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n^0$, $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$\lambda_2(A) \leqslant (n - 2)/2. \tag{2.13}$$

Доказательство. Определим матрицы

$$D = \operatorname{diag}(r_1(A), \ldots, r_n(A))$$

и

$$Q = D + A = (D - A) + 2A.$$

Поскольку матрица $D-A$ симметрична и имеет слабое диагональное преобладание, она является положительно полуопределенной, откуда вытекает, что

$$Q \geqslant 2A.$$

Следовательно,

$$\lambda_2(A) \leqslant \lambda_2(Q)/2. \tag{2.14}$$

С другой стороны, мы имеем

$$Q = \sum_{i<j:\, a_{ij}\neq 0} Q_{ij}, \tag{2.15}$$

где используется обозначение

$$Q_{ij} = a_{ij}\left(e_{ii}+e_{ij}+e_{ji}+e_{jj}\right),$$

и для $1 \leqslant i,j \leqslant n$ через e_{ij} обозначается матричная единица, т.е. матрица, единственный ненулевой элемент которой равен единице и находится в позиции (i,j). Поскольку, очевидно,

$$0 \leqslant Q_{ij} \leqslant e_{ii}+e_{ij}+e_{ji}+e_{jj},$$

то из соотношения (2.15) следует, что

$$Q \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (e_{ii}+e_{ij}+e_{ji}+e_{jj}) = J_n + (n-2)I_n,$$

так что

$$\lambda_2(Q) \leqslant \lambda_2(J_n+(n-2)I_n) = n-2. \tag{2.16}$$

Итак, в силу (2.14) и (2.16), мы имеем

$$\lambda_2(A) \leqslant \lambda_2(Q)/2 \leqslant (n-2)/2.$$

□

Замечание 2.2. Для положительного лапласиана Q_G простого графа G с n вершинами оценка

$$\lambda_2(Q_G) \leqslant n-2,$$

которая является частным случаем оценки (2.16), известна (см., например, [3, p. 3024]).

Следующий результат, который обобщает предложение 2.2 на произвольные симметричные неотрицательные матрицы, устанавливается аналогично теореме 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная симметричная матрица порядка $n \geqslant 2$ и пусть константы a и M удовлетворяют условиям* (2.8) *и* (2.9)*. Тогда*

$$\lambda_2(A) \leqslant a + M(n-2)/2. \tag{2.17}$$

Ясно, что с помощью рассуждений, использованных при доказательстве теоремы 2.1, любую верхнюю оценку для второго по величине (как и любого другого) собственного значения матрицы из класса $\mathcal{M}_n^0$ можно обобщить на произвольные симметричные неотрицательные матрицы. По этой причине в дальнейшем мы сосредоточимся на матрицах из класса $\mathcal{M}_n^0$.

Следующий результат, который является следствием предложения 2.1 и теоремы Фробениуса, дает легко вычислимую верхнюю оценку для второго по величине собственного значения матрицы из класса $\mathcal{M}_n^0$, а также описывает условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эта оценка достигалась.

Теорема 2.3. *Пусть $A \in \mathcal{M}_n^0$, $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\lambda_2(A) \leqslant n - 2 - r(A). \tag{2.18}$$

Кроме того, соотношение (2.18) *является равенством тогда и только тогда, когда либо $A = J_n - I_n$, либо $A \neq J_n - I_n$ и для некоторого непустого подмножества $K \subseteq \langle n \rangle$ выполняются следующие условия:*

(i) $r_i(A) = r(A)$ *для всех* $i \in K$*;*
(ii) $A'[K]$ *– неприводимая компонента матрицы* $A' = J_n - I_n - A$*;*
(iii) $\rho(A'[K]) = \rho(A')$*;*
(iv) $A'[K]$ *– 2-циклическая матрица.*

Замечание 2.3. Из условия (i) следует, что для того, чтобы в (2.18) имело место равенство, т.е. $\lambda_2(A)$ принимало бы максимальное возможное значение, необходимо, чтобы по крайней мере $k = |K|$ строк матрицы A имели минимальную строчную сумму $r(A)$.

Доказательство. Оценка (2.18) немедленно вытекает из предложения 2.1 и верхней оценки Фробениуса

$$\rho(J_n - A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \{r_i(J_n - A)\} \leqslant n - r(A).$$

Рассмотрим случай равенства в (2.18). Если $A = J_n - I_n$, то $\lambda_2(A) = -1$, и (2.18) очевидно является равенством. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $A \neq J_n - I_n$, т.е. матрица A' ненулевая.

Необходимость. Предположим, что

$$\lambda_2(A) = n - 2 - r(A). \tag{2.19}$$

Поскольку, с учетом вывода оценки (2.1), равенства (2.19) и верхней оценки Фробениуса, мы имеем

$$\begin{aligned} -1 = \lambda_2(A + A') &\geqslant \lambda_2(A) + \lambda_n(A') \geqslant \lambda_2(A) - \rho(A') \\ &\geqslant n - 2 - r(A) - (n - 1 - r(A)) = -1, \end{aligned}$$

то все неравенства в последней цепочке соотношений являются равенствами. В частности,

$$\lambda_n(A') = -\rho(A') \tag{2.20}$$

и

$$\rho(A') = n - 1 - r(A) = \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(A'). \tag{2.21}$$

Предположим сперва, что матрица A' неприводима. В этом случае, по второй части теоремы Перрона–Фробениуса (см., например, [2, Chapter 2, Theorem 2.20]), из (2.20) следует, что матрица A' 2-циклическая. В силу теоремы Фробениуса, из (2.21) вытекает, что все строчные суммы матрицы A' равны $n - 1 - r(A)$, так что

$$r_i(A) = r(A) \quad \text{для всех} \quad i \in \langle n \rangle.$$

Итак, в неприводимом случае, условия (i)-(iv) выполняются для $K = \langle n \rangle$.

Пусть теперь матрица A' приводима. По второй части теоремы Перрона–Фробениуса, из (2.20) следует, что матрица A' имеет 2-циклическую неприводимую компоненту $A'[K]$, где $K \subset \langle n \rangle$, $|K| = k < n$, такую что

$$|\lambda_n(A')| = |\lambda_k(A'[K])| = \rho(A'[K]) = \rho(A'). \tag{2.22}$$

Остается доказать (i). В силу (2.21) и (2.22), мы имеем

$$\rho(A'[K]) = n - 1 - r(A). \tag{2.23}$$

С помощью (2.23), (ii) и теоремы Фробениуса мы выводим

$$r_i(A') = r_i(A'[K]) = n - 1 - r(A) \quad \text{для всех} \quad i \in K,$$

откуда следует, что

$$r_i(A) = n - 1 - r_i(A') = r(A) \quad \text{для всех} \quad i \in K.$$

Этим доказано (i). Необходимость условий (i)-(iv) установлена.

Достаточность. Пусть сперва $K = \langle n \rangle$, т.е. A' – неприводимая 2-циклическая матрица, причем

$$Ae = r(A)e.$$

В этом случае, по теореме Фробениуса,

$$\rho(A') = n - 1 - r(A),$$

и равенство (2.19) справедливо в силу следствия 2.1.

Остается рассмотреть тот случай, когда соотношения (i)-(iv) выполняются для некоторого собственного подмножества K, $|K| = k < n$, множества $\langle n \rangle$. Поскольку $A'[K]$ – неприводимая компонента матрицы A', то для всех $i \in K$ мы имеем

$$r_i(A'[K]) = r_i(A') = n - 1 - r_i(A).$$

Ввиду (i), отсюда следует, что

$$r_i(A'[K]) = n - 1 - r(A) \quad \text{для всех} \quad i \in K,$$

так что

$$r_i(A[K]) = k - 1 - r_i(A'[K]) = r(A) - n + k \quad \text{для всех} \quad i \in K. \tag{2.24}$$

Итак, все строчные суммы главной подматрицы $A[K]$ матрицы A одинаковы, а матрица $A'[K]$ является неприводимой и 2-циклической. В этом случае, по первой части доказательства достаточности и по (2.24), мы имеем

$$\lambda_2(A[K]) = k - 2 - r(A[K]) = n - 2 - r(A). \tag{2.25}$$

Поскольку, по неравенству Коши (см., например, [6, Part II, Assertion 4.47]),

$$\lambda_2(A) \geqslant \lambda_2(A[K]),$$

из (2.25) и (2.18) вытекает, что

$$\lambda_2(A) = n - 2 - r(A).$$

Теорема доказана полностью. □

Замечание 2.4. Из доказательства теоремы 2.3 следует, что в том случае, когда соотношение (2.18) является равенством, т.е. для некоторого подмножества $K \subseteq \langle n \rangle$ выполнены условия (i)-(iv), имеет место равенство $\lambda_2(A) = \lambda_2(A[K])$.

Отметим, что в том случае, когда оценка (2.18) достигается, т.е. $\lambda_2(A) = n - 2 - r(A)$, ввиду (2.13), мы имеем

$$n - 2 - r(A) \leqslant (n-2)/2,$$

т.е.

$$r(A) \geqslant (n-2)/2. \tag{2.26}$$

Таким образом, равенство в (2.18) может иметь место только в том случае, когда выполнено условие (2.26), что представляется нетривиальным фактом. В действительности, из теоремы 2.3 можно вывести следующий более сильный результат.

Следствие 2.3. *Если в условиях теоремы* 2.3 *справедливо равенство*

$$\lambda_2(A) = n - 2 - r(A) \tag{2.27}$$

и для некоторого подмножества $K \subseteq \langle n \rangle$, $|K| = k \leqslant n$, *выполнены условия* (i)-(iv), *то необходимо* k *– четное число, причем*

$$r(A) \geqslant n - 1 - k/2, \tag{2.28}$$

и

$$\lambda_2(A) \leqslant (k-2)/2. \tag{2.29}$$

Доказательство. Поскольку, в силу условия (i), при всех $i \in K$ строчные суммы $r_i(A)$ равны $r(A)$, то строчные суммы 2-циклической неприводимой компоненты $A'[K]$, фигурирующей в условиях (ii)-(iv), также равны между собой. Пусть эта неприводимая компонента имеет вид

$$A'[K] = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix},$$

где B – $p \times q$ матрица и $k = p + q$. Тогда для всех i, $1 \leqslant i \leqslant p$, и для всех j, $1 \leqslant j \leqslant q$, мы имеем

$$r_i(A'[K]) = (e^T B e)/p = r_j(A'[K]) = (e^T B^T e)/q,$$

откуда следует, что $p = q$, а значит $k = 2p$.

Далее, для всех $i \in K$, мы, очевидно, имеем

$$r_i(A') = r_i(A'[K]) \leqslant k/2,$$

так что при $i \in K$

$$r(A) = r_i(A) = n - 1 - r_i(A') \geqslant n - 1 - k/2.$$

Этим доказано неравенство (2.28). Из (2.28) и (2.27) следует (2.29).
□

Поскольку $k \leqslant n$, условие (2.28), очевидно, усиливает необходимое условие (2.26), а оценка (2.29) улучшает общую оценку (2.13).

Замечание 2.5. Стоит отметить, что для матриц, удовлетворяющих условию (2.26) (имеющих, грубо говоря, "достаточно плотные" строки), оценка (2.18) по крайней мере столь же точна, как и (2.13). С другой стороны, в том случае, когда $R(A) < (n-2)/2$, мы имеем

$$R(A) < (n-2)/2 < n-2-r(A),$$

так что как (2.13), так и (2.18) проигрывают элементарной оценке Фробениуса

$$\lambda_2(A) \leqslant \rho(A) \leqslant R(A).$$

Используя верхнюю оценку теоремы 1.2 вместо верхней оценки Фробениуса, мы приходим к следующему усилению оценки теоремы 2.3.

Теорема 2.4. *Пусть* $A \in \mathcal{M}_n^0$, $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$\lambda_2(A) \leqslant \max_{i \neq j \in \langle n \rangle:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{(n-1-r_i(A))(n-1-r_j(A))} - 1. \qquad (2.30)$$

Кроме того, соотношение (2.30) *является равенством тогда и только тогда, когда либо* $A = J_n - I_n$, *либо* $A \neq J_n - I_n$ *и для некоторого непустого подмножества* $K \subseteq \langle n \rangle$ *выполнено условие*

(i′) $r_i(A) = n-1-\max_{i \neq j \in n:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{(n-1-r_i(A))(n-1-r_j(A))}$ *для всех* $i \in K$, *а также условия* (ii)-(iv) *теоремы* 2.3.

Доказательство. С помощью предложения 2.1 и теоремы 1.2 мы выводим оценку (2.30) следующим образом:

$$\lambda_2(A) \leqslant \rho(A') - 1 \leqslant \max_{i \neq j \in \langle n \rangle:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{r_i(A') r_j(A')} - 1$$
$$= \max_{i \neq j \in \langle n \rangle:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{(n-1-r_i(A))(n-1-r_j(A))} - 1. \qquad (2.31)$$

Рассмотрим случай равенства в (2.30). **Необходимость.** Предположим, что

$$\lambda_2(A) = \max_{i \neq j \in \langle n \rangle:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{r_i(A') r_j(A')} - 1. \qquad (2.32)$$

Мы должны доказать, что для некоторого подмножества $K \in \langle n \rangle$ матрица A удовлетворяет условию (i′) и условиям (ii)-(iv) теоремы 2.3.

Если $A = J_n - I_n$, то (2.32) выполняется тривиальным образом. Рассмотрим тот случай, когда $A \neq J_n - I_n$, т.е. $A' \neq 0$. Из (2.31) и (2.32) вытекает, что

$$\lambda_2(A) = \rho(A') - 1 \tag{2.33}$$

и

$$\rho(A') = \max_{i \neq j \in \langle n \rangle:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{r_i(A') r_j(A')}. \tag{2.34}$$

В силу предложения 2.1, соотношение (2.33) может иметь место только в том случае, когда условия (i)-(iv) предложения 2.1 выполняются для некоторого $K \subseteq \langle n \rangle$.

Предположим сперва, что матрица A' неприводима. Тогда, по теореме 1.2, из (2.34) следует, что

- либо все строчные суммы A' равны между собой,
- либо матрица A' 2-циклическая, т.е. для $S \subseteq \langle n \rangle$, $A'[S] = 0$, $A'[\bar{S}] = 0$, и при некотором $\gamma > 0$ имеют место равенства

$$r_i(A') = \begin{cases} \rho(A')\gamma, & i \in S \\ \rho(A')\gamma^{-1}, & i \in \bar{S}. \end{cases} \tag{2.35}$$

Покажем, что в рассматриваемом случае константа γ в (2.35) равна единице. Действительно, из (2.35) легко следует, что

$$A' \begin{bmatrix} \gamma e \\ e \end{bmatrix} = \rho(A') \begin{bmatrix} \gamma e \\ e \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad A' \begin{bmatrix} \gamma e \\ -e \end{bmatrix} = -\rho(A') \begin{bmatrix} \gamma e \\ -e \end{bmatrix}.$$

Таким образом, вектор $\begin{bmatrix} \gamma e \\ -e \end{bmatrix}$ является собственным вектором матрицы A' и отвечает ее младшему собственному значению, а так как матрица A' является неприводимой и 2-циклической, то этот вектор определен однозначно (с точностью до скалярного множителя).

Очевидное условие ортогональности $\begin{bmatrix} \gamma e \\ -e \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} \gamma e \\ e \end{bmatrix}$ двух собственных векторов матрицы A' равносильно соотношению $\gamma^2 s = n - s$, где мы обозначили $|S| = s$. С другой стороны, по условию (iv) предложения 2.1, вектор $\begin{bmatrix} \gamma e \\ -e \end{bmatrix}$ должен быть ортогонален единичному вектору e, что равносильно соотношению $\gamma s = n - s$. Поскольку $\gamma > 0$, мы приходим к выводу, что $\gamma = 1$, а значит все строчные суммы матрицы A' равны между собой. Но тогда то же верно и для матрицы A.

Пусть теперь A' – приводимая матрица, удовлетворяющая при некотором $K \subset \langle n \rangle$ условиям (i)-(iv) предложения 2.1.

Пусть $K_{p_1}, \dots, K_{p_t}$ – это все подмножества множества $\langle n \rangle$ такие, что $A'[K_{p_q}]$, $q = 1, \dots, t$, – неприводимые компоненты матрицы A', обладающие тем свойством, что

$$\lambda_{\min}(A'[K_{p_q}]) = \lambda_n(A'), \quad q = 1, \dots, t. \tag{2.36}$$

Заметим, что, по теореме Перрона–Фробениуса, из (2.36) необходимо следует, что

$$\rho(A'[K_{p_q}]) \geqslant |\lambda_n(A')|, \quad q = 1, \dots, t,$$

а в силу условий (i)-(iii) предложения 2.1 мы имеем

$$|\lambda_n(A')| = \rho(A').$$

Таким образом,

$$\rho(A'[K_{p_q}]) = \lambda_{min}(A'[K_{p_q}]), \quad q = 1, \dots, t,$$

так что все неприводимые компоненты $A'[K_{p_q}]$, $q = 1, \dots, t$, являются 2-циклическими матрицами, и

$$\rho(A'[K_{p_q}]) = \rho(A'), \quad q = 1, \dots, t. \tag{2.37}$$

Но в силу (2.37), (2.34) и теоремы 1.2, мы имеем

$$\begin{aligned} \max_{i \neq j \in \langle n \rangle:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{r_i(A') r_j(A')} &= \rho(A'[K_{p_q}]) \\ &\leqslant \max_{i \neq j \in K_{p_q}:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{r_i(A'[K_{p_q}]) r_j(A'[K_{p_q}])} \\ &\leqslant \max_{i \neq j \in \langle n \rangle:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{r_i(A') r_j(A')}, \quad q = 1, \dots, t, \end{aligned}$$

так что имеют место равенства

$$\rho(A'[K_{p_q}]) = \max_{i \neq j \in K_{p_q}:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{r_i(A'[K_{p_q}]) r_j(A'[K_{p_q}])}, \qquad q = 1, \dots, t, \tag{2.8}$$

т.е. все неприводимые компоненты $A'[K_{p_q}], q = 1, \dots, t$, удовлетворяют условиям типа (2.34).

Для определенности будем считать (возможно, после соответствующей перестановки строк и столбцов), что

$$A' = \operatorname{Diag}(A'[K_{p_1}], \dots, A'[K_{p_t}], \dots).$$

Тогда блочные компоненты $x^{(p)}$ любого собственного вектора $x = (x^{(p)})_{p \geqslant 1}$, отвечающего $\lambda_n(A')$, либо состоят из нулей, либо являются собственными векторами, отвечающими наименьшим собственным значениям соответствующих неприводимых компонент $A'[K_{p_q}]$, где $1 \leqslant q \leqslant t$, т.е.

$$A'[K_{p_q}]x^{(p_q)} = \lambda_n(A')x^{(p_q)}.$$

Как было показано выше, в силу (2.38), собственные векторы $x^{(p_q)}$ компонент $A'[K_{p_q}]$ имеют вид

$$\begin{bmatrix} \gamma_{p_q} e \\ -e \end{bmatrix}, \quad q = 1, \ldots, t, \tag{2.39}$$

и, не теряя общности, можно считать, что

$$\gamma_{p_q} \geqslant 1, \quad q = 1, \ldots, t. \tag{2.40}$$

В силу ортогональности собственных векторов (2.39) соответствующим перроновским векторам

$$\begin{bmatrix} \gamma_{p_q} e \\ e \end{bmatrix}, \quad q = 1, \ldots, t,$$

мы имеем

$$\begin{gathered} \gamma_{p_q}^2 s_{p_q} = s'_{p_q}, \quad \text{где} \\ s'_{p_q} = k_{p_q} - s_{p_q},\ k_{p_q} = |K_{p_q}|,\ s_{p_q} = |S_{p_q}|, \quad q = 1, \ldots, t. \end{gathered} \tag{2.41}$$

Из (2.41) и (2.40) следует, что

$$e^T \begin{bmatrix} \gamma_{p_q} e \\ -e \end{bmatrix} = \gamma_{p_q} s_{p_q} - s'_{p_q} = s'_{p_q}/\gamma_{p_q} - s'_{p_q} \leqslant 0, \quad q = 1, \ldots, t. \tag{2.42}$$

Но соотношения (2.42) означают, что собственный вектор $x = (x^{(p)})$ может быть ортогональным единичному вектору e, как это требуется в условии (iv) предложения 2.1, тогда и только тогда, когда $\gamma_{p_q} = 1$ для все тех p_q, для которых $x^{(p_q)} \neq 0$. Это означает, что по крайней мере одна из неприводимых компонент $A'[K_{p_q}]$, $q = 1, \ldots, t$, матрицы A' имеет постоянные строчные суммы. По теореме Фробениуса, все эти строчные суммы равны $\rho(A'[K_{p_q}])$. Но тогда, в силу (2.37) и (2.34), мы имеем

$$\begin{aligned} r_i(A) &= n - 1 - r_i(A') = n - 1 - r_i(A'[K_{p_q}]) \\ &= n - 1 - \rho(A'[K_{p_q}]) = n - 1 - \rho(A') \\ &= n - 1 - \max_{i \neq j \in n:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{(n - 1 - r_i(A))(n - 1 - r_j(A))}, \quad i \in K_{p_q}. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали, что найдется такое подмножество K_{p_q}, $1 \leqslant q \leqslant t$, что выполнено условие (i$'$), а подматрица $A'[K_{p_q]}$ удовлетворяет равенству (2.37) и является 2-циклической неприводимой компонентой матрицы A'. Тем самым доказательство необходимости завершено.

Достаточность. Если $A = J_n - I_n$, то $\lambda_2(A) = -1$, и, очевидно, (2.30) является равенством. Пусть $A \neq J_n - I_n$. Из условия (i$'$) следует, что

$$r_i(A'[K]) = r_i(A') = n - 1 - r_i(A)$$
$$= \max_{i \neq j \in n:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{(n-1-r_i(A))(n-1-r_j(A))} \quad \text{для всех} \quad i \in K,$$

откуда, по теореме Фробениуса,

$$\rho(A'[K]) = \max_{i \neq j \in n:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{(n-1-r_i(A))(n-1-r_j(A))}, \tag{2.43}$$

и для всех $i \in K$ мы имеем

$$r_i(A[K]) = k - 1 - r_i(A'[K]) = k - 1 - \rho(A'[K]).$$

Итак, все строчные суммы $A[K]$ равны между собой, а матрица $A'[K]$ является 2-циклической и неприводимой. Следовательно, по следствию 2.1 и (2.43),

$$\lambda_2(A[K]) = \rho(A'[K]) - 1 = \max_{i \neq j \in n:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{(n-1-r_i(A))(n-1-r_j(A))} - 1.$$

Поскольку, с другой стороны, в силу (2.30) и неравенства Коши, справедливы соотношения

$$\max_{i \neq j \in n:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{(n-1-r_i(A))(n-1-r_j(A))} - 1 \geqslant \lambda_2(A) \geqslant \lambda_2(A[K]),$$

то мы можем заключить, что

$$\lambda_2(A) = \max_{i \neq j \in n:\ a_{ij} \neq 1} \sqrt{(n-1-r_i(A))(n-1-r_j(A))} - 1.$$

Этим установлено, что (2.30) является равенством. Теорема 2.4 доказана. □

Замечание 2.6. При доказательстве теоремы 2.4 нами было установлено, что в том случае, когда в (2.30) имеет место равенство, справедливо соотношение

$$\lambda_2(A) = \lambda_2(A[K]),$$

где K – подмножество, фигурирующее в условиях теоремы 2.4.

§3. Верхние оценки для суммы двух старших собственных значений

В этом параграфе, основываясь на результатах §2, мы выводим верхние оценки для суммы двух старших собственных значений для матриц из классов $\mathcal{M}_n^0$ и $\mathcal{M}_n$, а также приводим их следствия для графов.

Используя теорему Фробениуса и теорему 2.3, мы немедленно приходим к следующему результату.

Теорема 3.1. *Пусть $A \in \mathcal{M}_n^0$, $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\lambda_1(A) + \lambda_2(A) \leqslant n - 2 + R(A) - r(A). \tag{3.1}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то соотношение (3.1) *является равенством тогда и только тогда, когда все строчные суммы A равны между собой и либо $A = J_n - I_n$, либо матрица $A' = J_n - I_n - A$ имеет 2-циклическую неприводимую компоненту.*

В частности, из теоремы 3.1 вытекает, что если $A \in \mathcal{M}_n^0$ – такая неприводимая матрица, что $R(A) \neq r(A)$, то неравенство (3.1) является строгим.

Применяя теорему 3.1 к матрице смежности A_G графа G, мы приходим к следующему результату.

Следствие 3.1. *Если G – граф порядка $n \geqslant 2$, то*

$$\lambda_1(G) + \lambda_2(G) \leqslant n - 2 + \Delta - \delta, \tag{3.2}$$

где Δ и δ – максимальная и минимальная степени вершин G.

Кроме того, если граф G связен, то соотношение (3.2) *является равенством тогда и только тогда, когда граф G регулярен, причем*
- *либо G есть полный граф K_n,*
- *либо $G \neq K_n$ и дополнение графа G имеет двудольную компоненту связности.*

В частности, из следствия 3.1 вытекает, что для связного нерегулярного графа G неравенство (3.2) всегда является строгим.

Следующий результат относится к матрицам из класса $\mathcal{M}_n^0$, все строчные суммы которых равны между собой.

Теорема 3.2. *Если все строчные суммы матрицы $A \in \mathcal{M}_n^0$, $n \geqslant 2$, равны, то*

$$\lambda_1(A) + \lambda_2(A) \leqslant n - 2. \tag{3.3}$$

Кроме того, (3.3) *является равенством тогда и только тогда, когда либо* $A = J_n - I_n$*, либо матрица* $A' = J_n - I_n - A$ *имеет 2-циклическую неприводимую компоненту.*

Доказательство. Для матрицы, все строчные суммы которой равны $r(A)$, по теореме Фробениуса мы имеем $\lambda_1(A) = r(A)$. Следовательно, соотношение (3.3) является равенством тогда и только тогда, когда $\lambda_2(A) = n - 2 - r(A)$. Теперь нужный результат немедленно вытекает из теоремы 2.3. □

Для регулярных графов из теоремы 3.2 вытекает следующий результат, впервые установленный в работе [4].

Следствие 3.2. *Если* G *– регулярный граф порядка* $n \geqslant 2$*, то*

$$\lambda_1(G) + \lambda_2(G) \leqslant n - 2. \tag{3.4}$$

Кроме того, оценка (3.4) *достигается тогда и только тогда, когда либо* G *есть полный граф* K_n*, либо у дополнения* G *имеется двудольная компонента связности.*

Как указано в работе [4], неравенство (3.4) для регулярных графов, а также и для некоторых других классов графов, впервые было установлено Д. Гернертом [D. Gernert] (неопубликовано).

Для матриц из класса $\mathcal{M}_n$ мы приводим следующее обобщение предложения 3.1 из [4], в котором также сформулированы условия, необходимые и достаточные для того, чтобы соответствующая оценка достигалась.

Теорема 3.3. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$*,* $n \geqslant 2$*, и пусть*

$$a = \max_{i \in \langle n \rangle} a_{ii}.$$

Тогда

$$\lambda_1(A) + \lambda_2(A) \leqslant n - 2(1 - a) + R(A) - r(A). \tag{3.5}$$

Кроме того, если матрица A *неприводима, то* (3.5) *является равенством тогда и только тогда, когда все строчные суммы* A *равны между собой и*
- *либо* $A = J_n - (1 - a)I_n$*,*
- *либо для некоторого непустого подмножества* $K \subseteq \langle n \rangle$ *выполнены следующие условия:*

  (i) $a_{ii} = a$ *для всех* $i \in K$*;*

(ii) $\bar{A}[K]$ – *неприводимая компоненты матрицы* $\bar{A} = J_n - A$*;*
(iii) $\bar{A}[K]$ – 2-*циклическая матрица.*

Доказательство. Обозначим

$$A_0 = A - D_A.$$

Заметим, что поскольку для каждого $i \in \langle n \rangle$

$$r_i(A_0) = r_i(A) - a_{ii} \geqslant r_i(A) - a \geqslant r(A) - a,$$

то мы имеем

$$r(A_0) \geqslant r(A) - a. \tag{3.6}$$

Используя теорему Фробениуса, очевидное соотношение $\lambda_2(A) \leqslant a + \lambda_2(A_0)$, теорему 2.3 и неравенство (3.6), мы выводим оценку (3.5) следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_1(A) + \lambda_2(A) &\leqslant R(A) + a + \lambda_2(A_0) \\ &\leqslant R(A) + a + n - 2 - r(A_0) \\ &\leqslant n - 2(1 - a) + R(A) - r(A). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что матрица A неприводима, и рассмотрим случай равенства.

Необходимость. Предположим, что (3.5) является равенством. В этом случае из вывода (3.5) ясно, что

$$\lambda_1(A) = R(A), \tag{3.7}$$

$$\lambda_2(A_0) = n - 2 - r(A_0), \tag{3.8}$$

и

$$r(A_0) = r(A) - a. \tag{3.9}$$

Поскольку A неприводима, то, в силу теоремы Фробениуса, из (3.7) следует, что все строчные суммы матрицы A равны, т.е.

$$r_i(A) = r, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.10}$$

С другой стороны, по теореме 2.3, из (3.8) вытекает, что либо $A_0 = J_n - I_n$, либо условия (i)-(iv) теоремы 2.3 выполнены для некоторого $K \subseteq \langle n \rangle$ и матрицы $A' = J_n - I_n - A_0$.

В первом случае $r_i(A_0) = n - 1$, $i = 1, \ldots, n$, так что с учетом (3.10) мы имеем

$$a_{ii} = r_i(A) - r_i(A_0) = r - (n - 1) = a \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, n,$$

откуда следует, что

$$A = aI_n + A_0 = J_n + (a-1)I_n.$$

Предположим теперь, что $A_0 \neq J_n - I_n$. В силу условия (i) теоремы 2.3 и соотношений (3.9) и (3.10), для всех $i \in K$ справедливы равенства

$$r_i(A_0) = r(A_0) = r(A) - a = r - a.$$

С другой стороны, с учетом (3.10), мы имеем

$$r_i(A_0) = r_i(A) - a_{ii} = r - a_{ii}.$$

Тем самым необходимость условия (i) доказана.

Необходимость (ii) и (iii) следует из условий (ii) и (iv) теоремы 2.3 и соотношения

$$\bar{A}[K] = A'[K] + (1-a)I_k, \quad \text{где} \quad k = |K|, \tag{3.11}$$

которое имеет место, если выполнено условие (i).

Достаточность. Поскольку случай $A = J_n - (1-a)I_n$ тривиален, предположим, что $A \neq J_n - (1-a)I_n$ и что для некоторого $K \subseteq \langle n \rangle$ выполнены условия (3.10) и (i)-(iii).

С учетом (3.10), для доказательства того, что (3.5) есть равенство, нужно показать, что

$$\lambda_1(A) + \lambda_2(A) = n - 2(1-a). \tag{3.12}$$

Поскольку, по теореме Фробениуса, из (3.10) следует, что

$$\lambda_1(A) = r,$$

то условие (3.12) равносильно соотношению

$$\lambda_2(A) = n - 2(1-a) - r. \tag{3.13}$$

Установим (3.13). Покажем сперва, что

$$\lambda_2(A) = \lambda_2(A_0) + a. \tag{3.14}$$

Действительно, очевидно, что

$$\lambda_2(A) \leqslant \lambda_2(A_0) + a.$$

С другой стороны, с помощью неравенства Коши, условия (i) и замечания 2.4 мы выводим

$$\lambda_2(A) \geqslant \lambda_2(A[K]) = a + \lambda_2(A_0[K]) = a + \lambda_2(A_0).$$

Итак, равенство (3.14) имеет место.

Ввиду (3.14), для доказательства (3.13) остается убедиться в том, что

$$\lambda_2(A_0) = n - 2 + a - r. \tag{3.15}$$

С этой целью мы воспользуемся условиями равенства из теоремы 2.3.

Условия (ii) и (iv) теоремы 2.3 легко следуют из условий (ii) и (iii) теоремы 3.3, если принять во внимание (3.11).

Условие (i) теоремы 2.3 устанавливается следующим образом. Для всех $i \in \langle n \rangle$, по (3.10), мы имеем

$$r - a \leqslant r_i(A) - a_{ii} = r_i(A_0).$$

С другой стороны, по (i) и (3.10), для $i \in K$ выполнены равенства

$$r_i(A_0) = r_i(A) - a = r - a.$$

Таким образом, для всех $i \in K$,

$$r_i(A_0) = r - a = r(A_0). \tag{3.16}$$

Наконец, покажем, что выполнено условие (iii) теоремы 2.3, т.е.

$$\rho(A'[K]) = \rho(A'). \tag{3.17}$$

Действительно, для всех $i \in K$, принимая во внимание (i), (ii) и (3.10), мы выводим

$$\begin{aligned} r_i(A'[K]) &= r_i(J_k - I_k - A_0[K]) \\ &= r_i(J_k - A[K]) + a - 1 \\ &= r_i(\bar{A}[K]) + a - 1 \\ &= r_i(\bar{A}) + a - 1 \\ &= n - r + a - 1. \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме Фробениуса,

$$\rho(A'[K]) = n - r + a - 1. \tag{3.18}$$

Теперь с помощью свойства монотонности перроновского корня, (3.18), (3.10), и теоремы Фробениуса мы выводим

$$\begin{aligned} \rho(A') \geqslant \rho(A'[K]) = n - r + a - 1 = R(J_n - A + aI_n - I_n) \\ \geqslant R(J_n - I_n - A_0) \geqslant \rho(A'), \end{aligned}$$

откуда и следует справедливость равенства (3.17).

Итак, для A_0 справедливы все условия (i)-(iv) теоремы 2.3. Следовательно, в силу этой теоремы и (3.16), мы имеем

$$\lambda_2(A_0) = n - 2 - r(A_0) = n - 2 - r + a.$$

Этим установлено соотношение (3.15). Теорема 3.3 доказана. $\square$

Замечание 3.1. Предположение о неприводимости матрицы A используется только при доказательстве необходимости условий равенства теоремы 3.3; для того, чтобы эти условия были достаточными, неприводимость A несущественна.

Следующая теорема уточняет оценку (3.1) теоремы 3.1.

Теорема 3.4. *Пусть $A \in \mathcal{M}_n^0$, $A \neq 0$, $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\begin{aligned}\lambda_1(A) + \lambda_2(A) \leqslant &\max_{i,j\in\langle n\rangle:\, a_{ij}\neq 0} \sqrt{r_i(A) r_j(A)} \\ &+ \max_{i\neq j\in\langle n\rangle:\, a_{ij}\neq 1} \sqrt{(n-1-r_i(A))(n-1-r_j(A))} - 1.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то равенство в (3.19) *имеет место тогда и только тогда, когда*
• *либо $A = J_n - I_n$,*
• *либо $n = 3$ и, с точностью до перестановки строк и столбцов,* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,
• *либо все строчные суммы $A \neq J_n - I_n$ равны между собой и матрица $A' = J_n - I_n - A$ имеет 2-циклическую неприводимую компоненту.*

Доказательство. Оценка (3.19) немедленно следует из теорем 1.2 и 2.4.

Рассмотрим случай равенства.

Достаточность. Если все строчные суммы A равны r и A' имеет 2-циклическую неприводимую компоненту, то, по теореме Фробениуса, $\rho(A) = r$ и $\rho(A') = n - 1 - r$, а по следствию 2.1,

$$\lambda_2(A) = \rho(A') - 1 = n - 2 - r.$$

Итак,

$$\lambda_1(A) + \lambda_2(A) = n - 2,$$

и, очевидно, (3.19) является равенством.

Случаи $A = J_n - I_n$ и $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ проверяются непосредственно.

Необходимость. Пусть матрица A неприводима и пусть (3.19) является равенством. Тогда, необходимо,

$$\lambda_1(A) = \max_{i,j\in\langle n\rangle:,\ a_{ij}\neq 0} \sqrt{r_i(A)r_j(A)} \tag{3.20}$$

и

$$\lambda_2(A) = \max_{i\neq j\in\langle n\rangle:\, a_{ij}\neq 1} \sqrt{(n-1-r_i(A))(n-1-r_j(A))} - 1. \tag{3.21}$$

В силу теоремы 1.2, из (3.20) следует, что
• либо все строчные суммы A равны,
• либо A – 2-циклическая матрица, такая что для некоторой константы $\gamma > 0$ и некоторого подмножества $S \subset \langle n\rangle$ выполнены соотношения

$$r_i(A) = \begin{cases} \rho(A)\gamma, & i \in S, \\ \rho(A)\gamma^{-1}, & i \in \bar{S}. \end{cases} \tag{3.22}$$

С другой стороны, по теореме 2.4, из (3.21) вытекает, что либо $A = J_n - I_n$, либо для некоторого подмножества $K \subseteq \langle n\rangle$ имеют место равенства

$$r_i(A) = n - 1 - \max_{i\neq j\in\langle n\rangle:\, a_{ij}\neq 1} \sqrt{(n-1-r_i(A))(n-1-r_j(A))}, \quad i \in K, \tag{3.23}$$

а $A'[K]$ – 2-циклическая неприводимая компонента матрицы $A' = J_n - I_n - A$ такая, что

$$\rho(A'[K]) = \rho(A'). \tag{3.24}$$

Предположим сперва, что все строчные суммы A равны $r \leqslant n-1$ и, следовательно, оценка (3.19) имеет вид равенства

$$\lambda_1(A) + \lambda_2(A) = n - 2. \tag{3.25}$$

По теореме 3.2, из (3.25) следует, что либо $A = J_n - I_n$, либо A' имеет 2-циклическую неприводимую компоненту.

Остается рассмотреть тот случай, когда A – 2-циклическая матрица, удовлетворяющая условиям (3.22). Переставив, если необходимо, строки и столбцы матрицы A, мы можем предполагать, что она имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0_s & A_{12} \\ A_{21} & 0_{n-s} \end{bmatrix}, \quad s = |S|.$$

Пусть сперва $A_{12} \neq J_{s\times(n-s)}$. В этом случае, матрица A' является неприводимой, т.е. $K = \langle n \rangle$, так что, в силу (3.23), все строчные суммы A равны между собой, и мы оказываемся в ситуации, уже рассмотренной выше.

Пусть теперь $A_{12} = J_{s\times(n-s)}$. Без ограничения общности будем считать, что $s \geqslant n - s$. В этом случае, в силу (3.22), мы имеем

$$\rho(A) = s\gamma = (n-s)/\gamma,$$

т.е.

$$\gamma^2 = (n-s)/s.$$

Но матрица

$$A' = \begin{bmatrix} J_s - I_s & 0 \\ 0 & J_{n-s} - I_{n-s} \end{bmatrix}$$

должна иметь 2-циклическую неприводимую компоненту, удовлетворяющую условию (3.24). Поскольку, в силу сделанного предположения,

$$\rho(A') = \max\{s-1, n-s-1\} = s-1,$$

мы заключаем, что $s = 2$, а поскольку $n - s \leqslant s$, то $n \leqslant 4$.

Итак, с точностью до перестановки, возможны два случая:

$$\text{или} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{или} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В первом случае все строчные суммы A равны, а во втором случае A имеет указанный в теореме вид. □

Для графов из теоремы 3.4 мы немедленно получаем следующий результат, где через d_i, $i = 1, \ldots, n$, обозначены степени вершин графа, а $i \sim j$ означает, что вершины i и j являются смежными.

Следствие 3.3. *Пусть G – граф порядка $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\lambda_1(G) + \lambda_2(G) \leqslant \max_{i\sim j} \sqrt{d_i d_j} + \max_{i\neq j,\, i\nsim j} \sqrt{(n-1-d_i)(n-1-d_j)} - 1. \tag{3.26}$$

Кроме того, если граф G связен, то соотношение (3.26) *является равенством тогда и только тогда, когда*

- *либо* $G = K_n$,
- *либо* $n = 3$ *и* $A_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,
- *либо* G *– регулярный граф, отличный от* K_n, *и его дополнение имеет двудольную компоненту связности.*

Литература

1. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 77–122.
2. A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Academic Press, New York etc., 1979.
3. K. Ch. Das, *On conjectures involving second largest signless Laplacian eigenvalue of graphs.* — Linear Algebra Appl. **432** (2010), 3018–3029.
4. J. Ebrahimi, B. Mohar, V. Nikiforov, A. S. Ahmady, *On the sum of two largest eigenvalues of a symmetric matrix.* — Linear Algebra Appl. **429** (2008), 2781–2787.
5. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
6. M. Marcus, H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities.* Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1964.
7. H. Minc, *Nonnegative Matrices.* John Wiley and Sons, New York etc., 1988.
8. W. So, *Commutativity and spectra of Hermitian matrices. — Linear Algebra Appl.* **212/213** (1994), 121–129.

Kolotilina L. Yu. Upper bounds for the second largest eigenvalue of symmetric nonnegative matrices.

The paper suggests upper bounds on the second largest eigenvalue and the sum of two largest eigenvalues of symmetric nonnegative matrices and graphs. Conditions necessary and sufficient for some of the bounds to be attained are established. Special attention is paid to the subclass of matrices with zero diagonal entries and with off-diagonal entries not exceeding unity, which obviously contains the adjacency matrices of undirected graphs.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 15 октября 2012 г.