Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 405, 2012 г.

Х. Д. Икрамов

УНИТАРНАЯ КОНГРУЭНТНОСТЬ С СОПРЯЖЕННО-НОРМАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ

1. Пусть $M_n(\mathbf{C})$ – множество комплексных $n \times n$-матриц. Матрицы $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ унитарно подобны, если подобие между ними можно осуществить посредством унитарной матрицы U :

$$B = U^* AU. \tag{1}$$

Проверить, что A и B унитарно подобны, можно с помощью классического критерия Шпехта (см. [1, раздел 2.2.6]).

Критерий Шпехта. Матрицы A и B унитарно подобны тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*) \tag{2}$$

для любого слова $W(s, t)$ от некоммутирующих переменных s и t.

Критерий Шпехта неэффективен, поскольку сводится к проверке бесконечного множества условий (2). Пирси (см. [2]) придал ему эффективную форму, показав, что для $n \times n$-матриц A и B проверку равенств (2) можно ограничить словами длины, не превосходящей $2n^2$. Однако и такая проверка при сколько-нибудь значительном n требует огромной вычислительной работы.

Информация о принадлежности A и B специальным матричным классам позволяет иногда существенно сократить объем вычислительной работы при проверке их унитарного подобия. В этом отношении класс нормальных матриц является наиболее показательным примером. Нормальные матрицы A и B унитарно подобны тогда и только тогда, когда имеют одни и те же собственные значения, а свойство изоспектральности можно установить, проверяя всего лишь n условий для следов, а именно

$$\operatorname{tr}(A^i) = \operatorname{tr}(B^i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

2. Предположим, что в паре (A, B), проверяемой на унитарное подобие, лишь про одну из матриц (для определенности, A) известно, что она нормальна. Если A и B унитарно подобны, то и B должна быть

Ключевые слова: унитарное подобие, унитарная конгруэнция, нормальная матрица, сопряженно-нормальная матрица, критерий Шпехта.

нормальной матрицей, что проще всего установить проверкой соотношения

$$BB^* = B^*B. \tag{4}$$

Если оно выполняется, то вопрос об унитарном подобии матриц A и B решается равенствами (3). Если же (4) не выполнено, то A и B не могут быть унитарно подобны.

С эстетической точки зрения, более удовлетворительным решением вопроса об унитарном подобии матриц A и B было бы добавление к системе (3) не матричного равенства (4), а одного или нескольких равенств для *следов* матриц, сформированных из A, A^* и B, B^*. Такое решение было предложено в недавней статье [3].

Теорема 1. *Пусть $A \in M_n(\mathbf{C})$ – нормальная матрица. Матрица $B \in M_n(\mathbf{C})$ тогда и только тогда унитарно подобна матрице A, когда выполняются равенства* (3) *и*

$$\|A\|_F = \|B\|_F. \tag{5}$$

Соотношение (5) для фробениусовых норм матриц A и B (называемых также евклидовыми матричными нормами) и есть желаемое дополнительное равенство для следов. Действительно, (5) эквивалентно условию

$$\operatorname{tr}(AA^*) = \operatorname{tr}(BB^*). \tag{6}$$

Приведем соображения, на которых основана теорема 1. Подобие (не обязательно унитарное) матриц A и B возможно лишь в случае, если они имеют одни и те же собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Нормальность матрицы A означает, что

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \|A\|_F^2. \tag{7}$$

Равенство (5) есть необходимое условие унитарного подобия между A и B. Напротив, если равенства (3) и (5) выполнены, то

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \|B\|_F^2,$$

что влечет за собой нормальность матрицы B (см., например, критерий 53 в [4]). Теперь унитарное подобие между A и B обеспечивается равенствами (3).

3. Цель настоящего сообщения – доказать аналог теоремы 1 для случая, когда вместо унитарных подобий рассматриваются унитарные конгруэнции, а свойство нормальности заменено свойством сопряженной нормальности. Напомним, что матрицы $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ конгруэнтны, если

$$B = U^T A U \tag{8}$$

для некоторой невырожденной матрицы U, и унитарно конгруэнтны, если матрицу U в соотношении (8) можно выбрать унитарной.

Вопрос об унитарной конгруэнтности матриц $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ решается критерием типа Шпехта–Пирси, недавно найденным в [5] (см. также [6]). К сожалению, этот критерий страдает тем же недостатком, что и его прообраз: для матриц A и B общего вида его применение требует огромной вычислительной работы. Сопряженно-нормальные матрицы являются одним из матричных классов, для которых эту работу удается радикально сократить.

Матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ называется сопряженно-нормальной, если

$$AA^* = \overline{A^* A}. \tag{9}$$

Утверждение, аналогичное теореме 1, формулируется так:

Теорема 2. *Пусть дана сопряженно-нормальная матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$. Матрица $B \in M_n(\mathbf{C})$ тогда и только тогда унитарно конгруэнтна матрице A, когда*

$$\operatorname{tr}[(\bar{A}A)^i] = \operatorname{tr}[(\bar{B}B)^i], \quad i = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

и

$$\|A\|_F = \|B\|_F. \tag{11}$$

4. Доказательство теоремы 2 основывается на следующих предложениях.

Лемма 1. *Если A и B унитарно конгруэнтны, то матрицы $A_L = \bar{A}A$ и $B_L = \bar{B}B$ унитарно подобны.*

Лемма 2. *Для сопряженно-нормальной матрицы A матрица A_L нормальна в обычном смысле.*

Теорема 3. *Сопряженно-нормальные матрицы $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ унитарно конгруэнтны тогда и только тогда, когда соответствующие им нормальные матрицы A_L и B_L унитарно подобны.*

Доказательства обеих лемм и теоремы 3 можно найти в [7].

Теорема 4. *Пусть $A \in M_n(\mathbf{C})$ и $\mu_1, \ldots, \mu_n$ – собственные значения матрицы A_L. Матрица A тогда и только тогда является сопряженно-нормальной, когда*

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu_i| = \|A\|_F^2. \tag{12}$$

Это один из 45 критериев сопряженной нормальности, приведенных в [8].

Мы можем теперь приступить к доказательству теоремы 2.

Необходимость. Согласно лемме 1, матрицы A_L и B_L подобны, а потому имеют одни и те же собственные значения $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Отсюда вытекают равенства (10). Равенство (11) есть следствие инвариантности нормы Фробениуса относительно умножения на унитарные матрицы. Заметим, что сопряженная нормальность матрицы A в этом рассуждении не была использована.

Достаточность. Равенства (10) обеспечивают совпадение собственных значений матриц A_L и B_L, по-прежнему обозначаемых через μ_1, $\ldots, \mu_n$. Для сопряженно-нормальной матрицы A справедливо соотношение (12). В силу (11) выполнено и равенство

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu_i| = \|B\|_F^2.$$

По теореме 4, B является сопряженно-нормальной матрицей. Согласно теореме 3, унитарная конгруэнтность сопряженно-нормальных матриц A и B гарантируется равенствами (10).

Литература

1. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир, М., 1989.
2. C. Pearcy, *A complete set of unitary invariants for operators generating finite W^*-algebras of type* I. — Pacific J. Math. **12** (1962), 1405–1416.
3. T. G. Gerasimova, *Unitary similarity to a normal matrix.* — Linear Algebra Appl. **436** (2012), 3777–3783.
4. R. Grone, C. R. Johnson, E. M. Sa, H. Wolkowicz, *Normal matrices.* — Linear Algebra Appl. **87** (1987), 213–225.
5. Ю. А. Альпин, Х. Д. Икрамов, *Критерий унитарной конгруэнтности матриц.* — Докл. РАН **437**, No. 1 (2011), 7–8.
6. Ю. А. Альпин, Х. Д. Икрамов, *Критерий унитарной конгруэнтности матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **395** (2011), 9–19.
7. Х. Д. Икрамов, *Критерий унитарной конгруэнтности сопряженно-нормальных матриц.* — Докл. РАН **410**, No. 1 (2006), 17–18.

8. H. Fassbender, Kh. D. Ikramov, *Conjugate-normal matrices: A survey.* — Linear Algebra Appl. **429** (2008), 1425–1441.

Ikramov Kh. D. Unitary congruence to a conjugate-normal matrix.

A matrix $A \in M_n(\mathbf{C})$ is said to be conjugate-normal if $AA^* = \overline{A^*A}$. The following proposition (which is the congruence analog of a recent result of T. G. Gerasimova) is proved: A matrix $B \in M_n(\mathbf{C})$ is unitarily congruent to a conjugate-normal matrix A if and only if

$$\operatorname{tr}[(\bar{A}A)^i] = \operatorname{tr}[(\bar{B}B)^i], \quad i = 1, \dots, n,$$

and

$$\|A\|_F = \|B\|_F.$$

This proposition dramatically reduces the amount of computational work for verifying unitary congruence as compared to the case of general matrices A and B.

Московский государственный университет
ГСП-1, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 15 мая 2012 г.