Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 405, 2012 г.

Х. Д. Икрамов

О РЕШЕНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАЗИТЕПЛИЦЕВЫМИ МАТРИЦАМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

1. Все матрицы, рассматриваемые в этой заметке, квадратные и имеют порядок $n+1$. Их элементы нумеруются индексами i и j, изменяющимися от 0 до n. Нумерация, начиная с нуля, есть соглашение, часто применяемое в задачах с теплицевыми матрицами. С учетом этого соглашения свойство матрицы T быть теплицевой записывается равенствами

$$t_{ij} = t_{i-1,j-1}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n. \tag{1}$$

Как известно, существует ряд прямых методов, позволяющих устойчиво решать системы линейных уравнений с теплицевыми матрицами коэффициентов и имеющих сложность $O(n^2)$ арифметических операций. Напомним, что решение общей системы порядка n (например, методом Гаусса) требует $O(n^3)$ операций. Ценой возможной потери численной устойчивости число операций в прямом методе для теплицевых систем можно снизить даже до $O(n\log_2^2 n)$ (так называемые сверхбыстрые алгоритмы), но мы ограничимся здесь просто быстрыми $O(n^2)$-методами.

Равенство (1) можно рассматривать как простейшее линейное соотношение между элементами квадрата, образованного позициями (i,j), $(i-1,j), (i,j-1)$ и $(i-1,j-1)$. В последнее десятилетие появилось несколько статей, в которых рассматриваются более сложные линейные связи между элементами указанного квадрата. Так, в [1] исследуется класс матриц $\mathcal{A}(\alpha,\beta)$ с элементами, подчиненными соотношению

$$a_{ij} = \alpha a_{i-1,j-1} + \beta a_{i-1,j}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

где коэффициенты α и β фиксированы. Нам потребуются некоторые предварительные определения, чтобы сформулировать основной результат этой работы.

Ключевые слова: теплицева матрица, матрица Паскаля, быстрые алгоритмы решения теплицевых систем.

Матрицей Паскаля порядка $n+1$ будем называть нижнетреугольную матрицу

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Уточнение по поводу нижней треугольной формы необходимо, поскольку термин “матрица Паскаля” применяется также к верхнетреугольной матрице $U_n = P_n^T$ и симметричной матрице

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Именно эта последняя матрица генерируется MATLAB-функцией pascal(n+1). При одинаковом порядке $n+1$ три указанных матрицы связаны равенством

$$S_n = P_n U_n.$$

Одно из многих замечательных свойств матрицы P_n состоит в том, что она почти не отличается от своей обратной матрицы:

$$\{P_n^{-1}\}_{ij} = (-1)^{i+j}\{P_n\}_{ij}, \quad i,j = 0,\dots,n. \tag{3}$$

С помощью диагональной матрицы

$$D_{-1} = \mathrm{diag}(1,-1,1,-1,\dots,(-1)^n) \tag{4}$$

равенствам (3) можно придать матричную форму

$$P_n^{-1} = D_{-1} P_n D_{-1}. \tag{5}$$

Обобщая определение (4), положим

$$D_x = \mathrm{diag}(1, x, x^2, \dots, x^n). \tag{6}$$

Символом $P_n(\alpha,\beta)$ будем обозначать матрицу

$$P_n(\alpha,\beta) = D_\beta P_n D_{\alpha\beta^{-1}}. \tag{7}$$

Элемент этой матрицы в позиции (i,j), $i \geqslant j$, равен

$$\alpha^j \beta^{i-j} \binom{i}{j}.$$

Мы полагаем $P_n(\alpha) = P_n(\alpha, \alpha)$.

Теперь можно сформулировать главный результат статьи [1].

Теорема 1. *Матрица A тогда и только тогда принадлежит классу $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$, когда она представима в виде*

$$A = P_n(\alpha, \beta)T, \tag{8}$$

где T – теплицева матрица.

Еще более общее, чем (2), соотношение

$$a_{ij} = \alpha a_{i-1,j-1} + \beta a_{i-1,j} + \gamma a_{i,j-1} \tag{9}$$

изучено в [2]. Будем считать, что $\beta, \gamma \neq 0$ (иначе (9) совпадет с (2) или с симметричным условием, где индексы i и j меняются местами). Обозначим соответствующий матричный класс через $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ и положим

$$\delta = 1 + \frac{\alpha}{\beta\gamma}. \tag{10}$$

Основной результат статьи [2] формулируется так:

Теорема 2. *Матрица A тогда и только тогда принадлежит классу $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$, когда она представима в виде*

$$A = P_n(\beta) D P_n^T(\gamma). \tag{11}$$

Здесь D – матрица, подчиненная равенствам

$$d_{ij} = \delta d_{i-1,j-1}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Обозначим через $\mathcal{A}(\delta)$ класс матриц, удовлетворяющих (при фиксированном δ) условиям (12). Матрицы всех трех классов $\mathcal{A}(\delta), \mathcal{A}(\alpha, \beta)$ и $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ будем называть квазитеплицевыми.

Как ни удивительно, ни в [1], ни в [2] не затрагивается вопрос об экономном решении систем линейных уравнений с квазитеплицевыми матрицами коэффициентов. Цель данной заметки – устранить это упущение. Ниже будет показано, что линейная система с квазитеплицевой матрицей любого из введенных выше классов может быть решена за $O(n^2)$ арифметических операций.

2. Начнем с наиболее простой ситуации, когда $A \in \mathcal{A}(\delta)$. Случай $\delta = 0$ не представляет интереса, так как в этом случае ранг матрицы A не превосходит 2.

Итак, пусть $\delta \neq 0$. Вынося из второй строки (напомним, что ее индекс равен 1) множитель δ, из третьей строки – множитель δ^2, и т.д., получим теплицеву матрицу T, первая строка которой та же, что у A, а поддиагональные элементы первого столбца суть числа

$$t_{i0} = \frac{a_{i0}}{\delta^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Иначе говоря, матрица A представлена в виде произведения

$$A = D_\delta T. \tag{14}$$

Поскольку теплицева матрица T полностью определяется элементами первой (т.е. нулевой) строки и первого столбца, ее вычисление сводится к выполнению n делений по формулам (13). Решение системы линейных уравнений

$$Ax = b \tag{15}$$

может теперь быть заменено решением теплицевой системы

$$Tx = D_\delta^{-1} b = D_{\delta^{-1}} b.$$

Как отмечено выше, для таких систем имеются численно устойчивые $O(n^2)$-алгоритмы.

3. Пусть известно, что $A \in \mathcal{A}(\alpha, \beta)$. Согласно теореме 1, A представима произведением (8). Из вида матрицы $P_n(\alpha, \beta)$ заключаем, что A и T имеют одну и ту же первую строку ($i = 0$). Чтобы T была полностью определена, нужно найти ее первый столбец t ($j = 0$). Если a – первый столбец матрицы A, то выполняется соотношение

$$P_n(\alpha, \beta) t = a. \tag{16}$$

Таким образом, вектор t можно вычислить, решая нижнетреугольную систему (16). Другая возможность состоит в том, чтобы определить t прямым матрично-векторным умножением:

$$t = P_n^{-1}(\alpha, \beta) a = D_{\beta\alpha^{-1}} P_n^{-1} D_{\beta^{-1}} a = D_{-\beta\alpha^{-1}} P_n D_{-\beta^{-1}} a. \tag{17}$$

В этих выкладках использованы формулы (6) и (7). Какой бы способ ни был выбран, требуется лишь $O(n^2)$ арифметических операций.

Пусть матрица T в представлении (8) уже определена. Тогда решение системы линейных уравнений (15) может быть заменено решением теплицевой системы

$$Tx = P_n^{-1}(\alpha, \beta) b = D_{-\beta\alpha^{-1}} P_n D_{-\beta^{-1}} b.$$

Вычисление правой части обходится в $O(n^2)$ операций, и такова же сложность последующего решения линейной системы.

4. Пусть теперь A – матрица класса $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$. Согласно теореме 2, A представима произведением (11), где D – матрица класса $\mathcal{A}(\delta)$, причем число δ известно (см. (10)). Поэтому D будет вполне определена, если мы найдем ее первую строку ($i = 0$) и первый столбец ($j = 0$).

Перепишем равенство (11) в виде

$$P_n(\beta)D = AP_n^{-T}(\gamma). \tag{18}$$

Верхнетреугольная матрица $P_n^{-T}(\gamma)$ имеет единичный первый столбец. Поэтому у произведения $AP_n^{-T}(\gamma)$ и матрицы A первый столбец один и тот же. Обозначим его через a, а первый столбец искомой матрицы D – через d. Согласно (18),

$$P_n(\beta)d = a. \tag{19}$$

Итак, столбец d может быть определен как решение треугольной системы (19) или прямым матрично-векторным умножением

$$d = P_n^{-1}(\beta)a = P_n^{-1}D_{\beta^{-1}}a = D_{-1}P_nD_{-\beta^{-1}}a.$$

Транспонируя равенство (11), получаем

$$A^T = P_n(\gamma)D^TP_n^T(\beta). \tag{20}$$

Применяя описанную выше процедуру к соотношению (20), найдем первый столбец матрицы D^T, т.е. первую строку матрицы D. Теперь D вполне определена, и ее вычисление обошлось нам в $O(n^2)$ операций.

Заменой неизвестного

$$y = P_n^T(\gamma)x \tag{21}$$

решение системы линейных уравнений (15) может быть сведено к решению системы

$$Dy = P_n^{-1}(\beta)b = D_{-1}P_nD_{-\beta^{-1}}b. \tag{22}$$

В разделе 2 было показано, как решается квазитеплицева система (22). По найденному вектору y восстанавливаем x из соотношения (21):

$$x = P_n^{-T}(\gamma)y = D_{-\gamma^{-1}}P_n^TD_{-1}y.$$

И здесь процесс решения системы (15) в целом обходится в $O(n^2)$ операций.

Литература

1. G.-S. Cheon, S.-G. Hwang, S.-H. Rim, S.-Z. Song, *Matrices determined by a linear recurrence relation among entries* — Linear Algebra Appl. **373** (2003), 89–99.
2. T. Mingshu, *Matrices associated to biindexed linear recurrence relations.* — Ars. comb. **86** (2008), 305–319.

Ikramov Kh. D. Solving systems of linear equations with quasi-Toeplitz coefficient matrices.

A matrix A is said to be quasi-Toeplitz if its entries in positions (i,j), $(i-1,j)$, $(i,j-1)$, and $(i-1,j-1)$ obey a linear relation with coefficients that are independent of i and j. It is shown that a system of linear equations with a quasi-Toeplitz $n\times n$ coefficient matrix can be solved in $O(n^2)$ arithmetic operations.

Московский государственный университет,
ГСП-1, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 5 марта 2012 г.