Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 405, 2012 г.

Х. Д. Икрамов

АНТИЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

1. Будем рассматривать комплексные $n \times n$-матрицы как операторы, действующие в $\mathbf{C}^n$. При этом $\mathbf{C}^n$ оснащено той или иной метрикой. Если метрика порождена стандартным скалярным произведением

$$(x, y) = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^T, \quad y = (y_1, \ldots, y_n)^T, \tag{1}$$

то эрмитовы, косоэрмитовы, унитарные и нормальные матрицы можно отождествить с одноименными линейными операторами в унитарном пространстве $\mathbf{C}^n$.

Если же в $\mathbf{C}^n$ вводится евклидово скалярное произведение

$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \tag{2}$$

то эрмитовыми, косоэрмитовыми и унитарными операторами становятся соответственно комплексные симметричные, кососимметричные и ортогональные матрицы.

Тип специальной матрицы сохраняется преобразованием подобия

$$A \longrightarrow Q^{-1}AQ, \tag{3}$$

если Q – унитарная матрица в случае скалярного произведения (1) и ортогональная матрица для скалярного произведения (2). Указанная инвариантность типа объясняется тем, что подобные матрицы суть представления одного и того же линейного оператора в различных базисах пространства, а унитарные (ортогональные) подобия специальным образом связаны с метрикой, заданной в $\mathbf{C}^n$.

Если вместо унитарных подобий

$$A \longrightarrow Q^*AQ, \qquad Q^*Q = I_n, \tag{4}$$

рассматривать унитарные конгруэнции

$$A \longrightarrow Q^TAQ, \qquad Q^*Q = I_n, \tag{5}$$

то и здесь можно выделить несколько классов специальных матриц, сохраняемых преобразованиями вида (5). Это симметричные, кососимметричные, унитарные и так называемые сопряженно-нормальные

Ключевые слова: унитарное подобие, унитарная конгруэнция, антилинейный оператор, сопряженно-нормальная матрица.

матрицы; последние описываются соотношением

$$AA^* = \overline{A^*A}, \tag{6}$$

где черта над символом матрицы обозначает поэлементное комплексное сопряжение.

Такое сочетание типов кажется противоестественным. В самом деле, почему с симметричными и кососимметричными матрицами сочетаются унитарные, а не ортогональные матрицы? И почему вместо комплексной нормальности, характеризуемой равенством

$$AA^* = A^*A, \tag{7}$$

появляется свойство (6)? Одна из задач данной статьи состоит в том, чтобы разрешить эти (кажущиеся) противоречия.

При изучении сопряженно-нормальных матриц (см., например, [1]) экспериментально обнаружено следующее обстоятельство: свойства этих матриц “повторяют” свойства обычных нормальных матриц с точностью до двух отличий:

1. Если в формулировке некоторого свойства нормальной матрицы участвует сопряженная матрица A^*, то в соответствующем свойстве сопряженно-нормальной матрицы A^* следует заменить транспонированной матрицей A^T.

2. Если свойство нормальной матрицы выражается некоторым отношением перестановочности, то “родственное” свойство сопряженно-нормальной матрицы описывается посредством псевдоперестановочности. Псевдоперестановочными мы называем матрицы B и C такие, что

$$B\bar{C} = C\bar{B}.$$

Так, равенство (7) есть требование перестановочности матриц A и A^*, тогда как (6) требует от матриц A и A^T, чтобы они были псевдоперестановочны.

Исследование, проводимое ниже, дает естественное объяснение указанным различиям. Оно основано на интерпретации матриц как *антилинейных* операторов, действующих в $\mathbf{C}^n$. Фактически мы даем эскиз элементарной теории антилинейных операторов, взяв за образец раздел ”Линейные операторы”, как он излагается во вводных курсах линейной алгебры. Для определенности, будем следовать главе 7 и (отчасти) главе 9 книги [2].

2. Оператор $\mathcal{A}$, действующий в $\mathbf{C}^n$, называется антилинейным, если он обладает следующими двумя свойствами:

а) $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{C}^n$ (аддитивность);

б) $\mathcal{A}(\alpha x) = \bar{\alpha}\mathcal{A}x \quad \forall \alpha \in \mathbf{C}, \forall x \in \mathbf{C}^n$ (полулинейность относительно комплексного сопряжения).

Несложно проверяется, что антилинейные операторы, действующие в $\mathbf{C}^n$, сами образуют комплексное линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения оператора на число из $\mathbf{C}$. Обычным образом определяется и произведение $\mathcal{C}$ операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{C}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) \qquad \forall x \in \mathbf{C}^n.$$

Здесь, однако, уже обнаруживаются отличия от теории линейных операторов. Как известно, линейные операторы, действующие в $\mathbf{C}^n$, образуют кольцо (см. [2, §58]). Аналогичный факт для антилинейных операторов не может иметь места, поскольку произведение двух антилинейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ *не является* антилинейным оператором:

$$\mathcal{C}(\alpha x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\alpha x)) = \mathcal{B}(\bar{\alpha}\mathcal{A}x) = \alpha\mathcal{B}(\mathcal{A}x) = \alpha\mathcal{C}x \quad \forall \alpha \in \mathbf{C}.$$

Таким образом, $\mathcal{C}$ – *линейный* оператор.

Фиксируем теперь какой-либо базис $\{e\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ в $\mathbf{C}^n$. Точно таким же образом, как для линейных операторов, всякому антилинейному оператору $\mathcal{A}$ можно сопоставить $n \times n$-матрицу A_e, построенную по следующему правилу: j-й столбец этой матрицы состоит из координат вектора $\mathcal{A}e_j$ в базисе $\{e\}$, т.е.

$$A_e = (a_{ij})_{i,j=1}^n, \tag{8}$$

где

$$\mathcal{A}e_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n, \qquad j = 1, 2, \dots, n. \tag{9}$$

Это соответствие между антилинейными операторами и квадратными комплексными матрицами взаимно однозначно.

Пусть $\mathcal{B}$ – еще один антилинейный оператор и B_e – отвечающая ему матрица. Посмотрим, какая матрица C_e соответствует произведению операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Согласно правилу (8)–(9), имеем

$$C_e = (c_{ij})_{i,j=1}^n,$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}e_i = \mathcal{C}e_j = \mathcal{B}(\mathcal{A}e_j) = \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathcal{B}(a_{kj}e_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{kj}}\mathcal{B}e_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{kj}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ik}e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\overline{a_{kj}}\right)e_i.$$

Отсюда

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\overline{a_{kj}}, \qquad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Итак,

$$C_e = B_e\overline{A_e}.$$

Если допустить, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ перестановочны, то их матрицы A_e и B_e должны удовлетворять соотношению

$$A_e\overline{B_e} = B_e\overline{A_e},$$

т.е. условию псевдоперестановочности. Таким образом, псевдоперестановочность комплексных матриц есть матричное проявление свойства коммутирования определяемых ими антилинейных операторов.

3. Наряду с $\{e\}$, фиксируем еще один базис $\{f\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ в $\mathbf{C}^n$. Найдем связь между матрицами A_e и A_f антилинейного оператора $\mathcal{A}$.

Пусть $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$. Это значит, что

$$f_i = p_{1i}e_1 + p_{2i}e_2 + \cdots + p_{ni}e_n, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \tag{10}$$

и в разложениях произвольного вектора x по обоим базисам

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j \tag{11}$$

координаты подчиняются соотношениям

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\eta_j, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{12}$$

Вычислим вектор $y = \mathcal{A}x$, пользуясь обоими разложениями (11):

$$y = \mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i \mathcal{A}e_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{\xi}_i\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}e_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ki}\bar{\xi}_i\right)e_k. \tag{13}$$

Если положить

$$A_f=(\tilde{a}_{ij})_{i,j=1}^{n},$$

то аналогично выводим

$$y=\mathcal{A}x=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{lj}\bar{\eta}_j\right)f_l. \tag{14}$$

Подставляя (12) в (13) и (10) в (14), находим

$$y=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ki}\left(\overline{\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\eta_j}\right)\right)e_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ki}\bar{p}_{ij}\right)\bar{\eta}_j\right)e_k$$

и

$$y=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{lj}\bar{\eta}_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n}p_{kl}e_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}p_{kl}\tilde{a}_{lj}\right)\bar{\eta}_j\right)e_k.$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ki}\bar{p}_{ij}\right)\bar{\eta}_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}p_{kl}\tilde{a}_{lj}\right)\bar{\eta}_j,\qquad k=1,2,\ldots,n.$$

Поскольку эти равенства справедливы для любого набора $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ki}\bar{p}_{ij}=\sum_{l=1}^{n}p_{kl}\tilde{a}_{lj},\qquad k,j=1,2,\ldots,n.$$

Эти скалярные равенства эквивалентны матричному соотношению

$$A_e\bar{P}=PA_f,$$

откуда

$$A_f=P^{-1}A_e\bar{P}. \tag{15}$$

Матричное преобразование, описывающее переход от A_e к A_f, называется псевдоподобием. Таким образом, матрицы, отвечающие в различных базисах одному и тому же антилинейному оператору, связаны друг с другом преобразованиями псевдоподобия.

Если в матричном равенстве

$$B=P^{-1}A\bar{P}$$

матрица P унитарная, то, полагая $\bar{P} = Q$, получаем

$$B = Q^T A Q,$$

т.е. приходим к унитарной конгруэнции (см. (5)) как частному случаю псевдоподобия.

4. Введем теперь в $\mathbf{C}^n$ унитарное скалярное произведение (1). Оператор, сопряженный к антилинейному оператору $\mathcal{A}$, определим как антилинейный оператор $\mathcal{A}^*$ такой, что

$$(\mathcal{A}x, y) = \overline{(x, \mathcal{A}^* y)} \qquad \forall x, y \in \mathbf{C}^n. \tag{16}$$

Пусть $\{e\}$ – ортонормированный базис пространства $\mathbf{C}^n$. Найдем связь между матрицами A_e и

$$(\mathcal{A}^*)_e = (\hat{a}_{ij})_{i,j=1}^n .$$

Имеем

$$a_{ij} = (\mathcal{A}e_j, e_i) = \overline{(e_j, \mathcal{A}^* e_i)} = (\mathcal{A}^* e_i, e_j) = \hat{a}_{ji}.$$

Тем самым сопряженному оператору $\mathcal{A}^*$ отвечает транспонированная матрица, т.е.

$$(\mathcal{A}^*)_e = A_e^T.$$

Если для антилинейных операторов эрмитово и косоэрмитово свойства определить обычными условиями

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$$

и

$$\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*,$$

то немедленно приходим к такому выводу:

Предложение 1. *Матрица, отвечающая эрмитову (косоэрмитову) антилинейному оператору в произвольном ортонормированном базисе унитарного пространства* $\mathbf{C}^n$, *симметрична (кососимметрична).*

Учитывая антилинейность оператора, свойство унитарности следует определить соотношением

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = \overline{(x, y)} \qquad \forall x, y \in \mathbf{C}^n.$$

В ортонормированном базисе $\{e\}$ это определение приводит к матричному равенству

$$A_e^* A_e = I_n,$$

т.е. матрица A_e унитарна. Оформим этот результат как

Предложение 2. *Матрица, отвечающая унитарному антилинейному оператору в произвольном ортонормированном базисе унитарного пространства* $\mathbf{C}^n$*, является унитарной.*

Наконец, назовем антилинейный оператор $\mathcal{A}$ нормальным, если

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y) \qquad \forall x, y \in \mathbf{C}^n. \tag{17}$$

Пока мы имеем дело с операторами, определение (17) приводит к обычному равенству

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*.$$

Однако, переходя к матрицам в ортонормированном базисе $\{e\}$ и учитывая матричное представление произведения антилинейных операторов, получаем

$$(\mathcal{A}^*)_e\bar{A}_e = A_e\overline{(\mathcal{A}^*)_e},$$

или

$$A_e^T\bar{A}_e = A_e\overline{A_e^T},$$

или

$$A_eA_e^* = \overline{A_e^*A_e},$$

т.е. A_e – это сопряженно-нормальная матрица. Итак, наш заключительный вывод можно сформулировать так:

Предложение 3. *Матрица, отвечающая нормальному антилинейному оператору в произвольном ортонормированном базисе унитарного пространства* $\mathbf{C}^n$*, является сопряженно-нормальной.*

Литература

1. H. Fassbender, Kh. D. Ikramov, *Conjugate-normal matrices: A survey.* — Linear Algebra Appl. **429** (2008), 1425–1441.
2. В. В. Воеводин, *Линейная алгебра.* — Наука, М., 1980.

Ikramov Kh. D. Antilinear operators and special matrices.

The following facts are proved: (a) Concommutation of complex matrices means the conventional commutation of the antilinear operators defined by these matrices. (b) Symmetric, skew-symmetric, unitary, and conjugate-normal matrices interpreted as antilinear operators acting in the unitary

space $\mathbf{C}^n$ are Hermitian, skew-Hermitian, unitary, and normal operators, respectively.

Московский государственный университет
ГСП-1, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 5 марта 2012 г.