Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 405, 2012 г.

Ю. К. Демьянович

СПЛАЙН-ВЭЙВЛЕТЫ ПРИ ОДНОКРАТНОМ ЛОКАЛЬНОМ УКРУПНЕНИИ СЕТКИ

Исследования в области обработки числовой информации ведут к созданию гибкого аппарата сплайн-вэйвлетных аппроксимаций с учетом свойств гладкости и скорости изменения числовых потоков. Для этого необходимы исследования сплайновых аппроксимаций различных порядков на неравномерных сетках, исследования разложений со свойствами локальности в отдельных частях рассматриваемой области, а также нужны аппроксимации, пригодные для распараллеливания вычислений. В работе [1] рассмотрена структура сплайн-вэйвлетных разложений для аппроксимаций первого порядка при удалении группы последовательных узлов, а в работе [2] изучен эффект интерференции при удалении двух узлов с сохранением разделяющего их узла.

Цель данной работы состоит в том, чтобы рассмотреть структуру сплайн-вэйвлетного разложения в случае однократного локального укрупнения неравномерной сетки (с удалением группы "нечетных" узлов), получить соответствующие алгоритмы декомпозиции/реконструкции и дать оценки величины вэйвлетного потока в случае, когда исходный поток представляет собой последовательность значений дважды непрерывно дифференцируемой функции.

§1. Предварительные сведения

Бесконечная система векторов $\{\mathbf{b}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ пространства $\mathbb{R}^2$ называется полной цепочкой векторов (см., например, [1]), если $\det(\mathbf{b}_{j-1},\mathbf{b}_j)\neq 0$ при $j\in\mathbb{Z}$.

На интервале (α,β) рассмотрим бесконечную сетку

$$X:\ldots<x_{-2}<x_{-1}<x_0<x_1<x_2<\ldots,$$
$$\lim_{j\to-\infty}x_j=\alpha,\ \lim_{j\to+\infty}x_j=\beta, \tag{1.1}$$

Ключевые слова: сплайны, вэйвлеты, локальное укрупнение, матрица вложения, матрица продолжения, интерференция, стоячие волны.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 10-01-00297 и 10-01-00245.

и обозначим

$$S_j \stackrel{\text{def}}{=} (x_j, x_{j+1}) \cup (x_{j+1}, x_{j+2}), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad G \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (x_i, x_{i+1}). \tag{1.2}$$

Пусть $A \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ – полная цепочка двумерных векторов.

Рассмотрим двухкомпонентную вектор-функцию $\varphi(t)$, непрерывную на интервале (α, β). Предположим, что ее компоненты линейно независимы на любом интервале $(a', b') \subset G$.

Зададим функции $\omega_j(t)$, $t \in G$, $j \in \mathbb{Z}$, с помощью аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{a}_j \, \omega_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in G, \quad \omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in G \backslash S_j, \ j \in \mathbb{Z}; \tag{1.3}$$

из (1.3) находим функции $\omega_j(t)$, $j \in \mathbb{Z}$, заданные на множестве G:

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)} & \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}), \\ \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} & \text{при } t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \\ 0 \quad \text{при } t \in G \backslash S_j, \end{cases} \tag{1.4}$$

Дальше рассматривается пространство $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \, \mathcal{L}\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, где $\mathcal{L}\{\ldots\}$ – линейная оболочка функций, указанных в фигурных скобках, а Cl_p – замыкание в топологии поточечной сходимости. Заметим, что ввиду предположений относительно вектор-функции $\varphi(t)$ функции $\omega_j(t)$, $j \in \mathbb{Z}$, линейно независимы на множестве G и, следовательно, являются базисом пространства $\mathbb{S}$.

Пусть s и r – целые числа и $s < r$. Из сетки (1.1) удалим группу узлов с нечетными номерами в количестве $r - s$, а именно, удалим узлы

$$x_{2s+1}, x_{2s+3}, x_{2s+5}, \ldots, x_{2r-1}, \tag{1.5}$$

так что укрупненная сетка имеет вид

$$\widetilde{X} : \ \ldots < \widetilde{x}_{-2} < \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \widetilde{x}_2 < \ldots,$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_i &= x_i && \text{при} \quad i \leqslant 2s, \\ \widetilde{x}_{2s+i} &= x_{2s+2i} && \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant r - s, \\ \widetilde{x}_{s+r+i} &= x_{2r+i} && \text{при} \quad 1 \leqslant i. \end{aligned}$$

Описанный переход от сетки X к сетке $\widetilde{X}$ будем называть *локальным однократным* (s, r)*-укрупнением сетки* X.

Эквивалентная форма представления узлов новой сетки $\widetilde{X}$ такова:

$$\widetilde{x}_i = x_i \qquad \text{при} \quad i \leqslant 2s, \tag{1.6}$$

$$\widetilde{x}_{i'} = x_{2i'-2s} \qquad \text{при} \quad 2s+1 \leqslant i' \leqslant s+r, \tag{1.7}$$

$$\widetilde{x}_{i''} = x_{r-s+i''} \qquad \text{при} \quad s+r+1 \leqslant i''. \tag{1.8}$$

Аналогично (1.2) положим

$$\widetilde{S}_j \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1}) \cup (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2}), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \widetilde{G} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} (\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{i+1}).$$

Кроме того, введем обозначения

$$I_*^h \stackrel{\text{def}}{=} \{\ldots, 2s-4, 2s-3, 2s-2\}, \quad I_*^m \stackrel{\text{def}}{=} \{2s-1, \ldots, s+r-1\},$$

$$I_*^t \stackrel{\text{def}}{=} \{s+r, s+r+1, \ldots\}.$$

Очевидно, что

$$I_*^h \cup I_*^m \cup I_*^t = \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим цепочку векторов $\widetilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\ldots, \widetilde{\mathbf{a}}_{-2}, \widetilde{\mathbf{a}}_{-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_0, \widetilde{\mathbf{a}}_1, \ldots\}$, предполагая, что выполнено условие

(A) *Цепочка векторов* $\widetilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}$ *полная и справедливы соотношения*

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j = \mathbf{a}_j \qquad \textit{при} \quad j \in I_*^h, \tag{1.9}$$

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j = \mathbf{a}_{2j-2s+1} \qquad \textit{при} \quad j \in I_*^m, \tag{1.10}$$

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j = \mathbf{a}_{j+r-s} \qquad \textit{при} \quad j \in I_*^t. \tag{1.11}$$

В дальнейшем предполагается, что условие (A) выполнено. Переход от пары (X, A) к паре $(\widetilde{X}, \widetilde{A})$ будем называть *однократным локальным укрупнением.*

Построим систему функций $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, отыскивая ее из соотношений

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}_j \, \widetilde{\omega}_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \widetilde{G}, \tag{1.12}$$

$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \widetilde{G} \setminus \widetilde{S}_j, \ j \in \mathbb{Z}$. Из (1.12) получаем

$$\widetilde{\omega}_j(t) = \begin{cases} \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_j)} & \text{при } t \in (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1}), \\ \frac{\det(\varphi(t), \widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_j, \widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})} & \text{при } t \in (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2}), \\ 0 & \text{при } t \in \widetilde{G} \setminus \widetilde{S}_j. \end{cases} \tag{1.13}$$

Замечание 1. В дальнейшем считаем, что все рассматриваемые функции сужены на множество G.

Введем пространство

$$\widetilde{\mathbb{S}} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\,\mathcal{L}\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}. \tag{1.14}$$

Теорема 1. *При $t \in G$ верны следующие формулы:*

$$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv \omega_j(t) \qquad \textit{при} \quad j \in I_*^h, \tag{1.15}$$

$$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv \omega_{r-s+j}(t) \qquad \textit{при} \quad j \in I_*^t. \tag{1.16}$$

Доказательство. Заметив, что функция ω_j определяется тройкой векторов $\mathbf{a}_{j-1}$, $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{a}_{j+1}$, а функция $\widetilde{\omega}_j$ определяется тройкой векторов $\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_j, \widetilde{\mathbf{a}}_{j+1}$ (см. формулы (1.4) и (1.13)), в силу условий (1.9) и (1.11) получаем (1.15) и (1.16). Теорема доказана. □

Теорема 2. *Если $i \leqslant r-s-1$, то при $t \in (\widetilde{x}_{2s+i}, \widetilde{x}_{2s+i+1})$ справедливы соотношения*

$$\widetilde{\omega}_{2s+i}(t) \equiv \frac{\det(\mathbf{a}_{2s+2i-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{2s+2i-1}, \mathbf{a}_{2s+2i+1})}, \tag{1.17}$$

а если $i \leqslant r-s-2$, то при $t \in (\widetilde{x}_{2s+i+1}, \widetilde{x}_{2s+i+2})$ верны соотношения

$$\widetilde{\omega}_{2s+i}(t) \equiv \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{2s+2i+3})}{\det(\mathbf{a}_{2s+2i+1}, \mathbf{a}_{2s+2i+3})}. \tag{1.18}$$

Доказательство. Из формулы (1.13) получаем

$$\widetilde{\omega}_{2s+i}(t) = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i-1}, \varphi(t))}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i})} \quad \text{при } t \in (\widetilde{x}_{2s+i}.\widetilde{x}_{2s+i+1}). \tag{1.19}$$

Полагая в (1.10) $j = 2s+i-1$, находим

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i-1} = \mathbf{a}_{2s+2i-1} \qquad \text{при} \quad i \leqslant r-s, \tag{1.20}$$

а полагая там $j = 2s+i$, выводим

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i} = \mathbf{a}_{2s+2i+1} \qquad \text{при} \quad i \leqslant r-s-1. \tag{1.21}$$

Подставляя (1.20) и (1.21) в (1.19), получаем (1.17).

Для $\widetilde{\omega}_{2s+i}(t)$ при $t \in (\widetilde{x}_{2s+i+1}, \widetilde{x}_{2s+i+2})$ согласно (1.13) находим

$$\widetilde{\omega}_{2s+i}(t) = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{\varphi(t),2s+i+1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i}, \widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i+1})};$$

здесь используем соотношение (1.21) и получаемую из (1.10) при $j = 2s+i+1$ формулу

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{2s+i+1} = \mathbf{a}_{2s+2i+3} \qquad \text{при} \quad i \leqslant r-s-2.$$

В результате устанавливаем, что тождество (1.18) справедливо.
Теорема доказана. □

§2. Матрица вложения

Теорема 3. *При условии* (A) *справедливо включение*

$$\widetilde{\mathbb{S}} \subset \mathbb{S}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Для доказательства включения (2.1) будем удалять по одному узлы $x_{2s+1}, x_{2s+3}, \dots x_{2r-1}$. На каждом шаге получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно координатных сплайнов на укрупненной сетке, откуда выводим представление этих сплайнов в виде линейной комбинации координатных сплайнов на мелкой сетке. В результате находим представление сплайнов $\widetilde{\omega}_j$ в виде линейной комбинации сплайнов ω_i (детали доказательства можно восстановить после знакомства с работой [3]). □

Рассмотрим пространство C_X, определяемое прямым произведением

$$C_X \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} C\langle x_i, x_{i+1}\rangle,$$

где $C\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ – линейное пространство функций, непрерывных на интервале (x_i, x_{i+1}) и имеющих конечные предельные значения на концах этого интервала.

Ясно, что $\omega_j \in C_X$, $j \in \mathbb{Z}$, и $\widetilde{\mathbb{S}} \subset \mathbb{S} \subset C_X$.

Пусть $\{g_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ – система функционалов над C_X, биортогональная системе функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\langle g_i, \omega_j\rangle = \delta_{i,j}$, со свойством $\operatorname{supp} g_j \subset [x_j, x_j + \varepsilon)$, $j \in \mathbb{Z}$; здесь $\varepsilon > 0$ – произвольное положительное число.[1]

Рассмотрим матрицу $\mathfrak{P}$ с элементами

$$\mathfrak{p}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \langle g_j, \widetilde{\omega}_i\rangle, \quad i, j \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

---

[1] В некотором линейном пространстве U функций $u(t)$, $t \in [c,d]$, рассмотрим подпространство $U_{[\gamma,\delta)}$ функций, равных нулю на промежутке $[\gamma,\delta) \subset [c,d]$; для линейного функционала $g \in U^*$ запись $\operatorname{supp} g \in [\gamma,\delta)$ эквивалентна тому, что этот функционал равен нулю на всех функциях подпространства $U_{[\gamma,\delta)}$: $\langle g, u\rangle = 0\ \forall u \in U_{[\gamma,\delta)}$. Если при этом оказывается, что некоторое множество M не пересекается с $[\gamma,\delta)$, то пишем $\operatorname{supp} g \cap M = \varnothing$.

Заметим, что достаточные условия существования упомянутой выше системы функционалов даны в [1].

Для удобства введем обозначение $\mathrm{supp}_+\widetilde{\omega}_i = [\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{i+2})$ и рассмотрим три группы значений индекса j, а именно

$$I_H \stackrel{\text{def}}{=} \{\dots, 2s-4, 2s-3, 2s-2\},$$
$$I_T \stackrel{\text{def}}{=} \{2r, 2r+1, \dots\}$$

и

$$I_M \stackrel{\text{def}}{=} \{2s-1, 2s, \dots, 2r-1\}.$$

Очевидно, что $I_H \cup I_M \cup I_T = \mathbb{Z}$, $I_*^h = I_H$.

Если для рассматриваемых индексов $i, j \in \mathbb{Z}$ верно соотношение (B_{ij})

$$\mathrm{supp}\, g_j \cap \mathrm{supp}_+\widetilde{\omega}_i = \varnothing,$$

то будем говорить, что справедливо условие (B_{ij}).

Лемма 1. *Для чисел* (2.2) *справедливы равенства*

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad \forall i \in \mathbb{Z},\ j \in I_H. \tag{2.3}$$

Доказательство. Согласно соотношению (1.15) для $i, j \in I_H$ имеем $\mathfrak{p}_{ij} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_i\rangle = \langle g_j, \omega_i\rangle = \delta_{i,j}$. При $j \in I_H$ и $i \in \{2s-1, 2s, \dots, N-1\}$ выполнено условие (B_{ij}), и потому получаем соотношения (2.5).

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{j,i-s+r} \quad \textit{при} \quad \forall i \in \mathbb{Z},\ j \in I_T. \tag{2.4}$$

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1. При $i \in \{\dots, s+r-4, s+r-3, s+r-2\}$, благодаря тому, что выполнено условие (B_{ij}), имеем $\mathfrak{p}_{ij} = 0$.

2. Если $i \in \{s+r, s+r+1, \dots\}$, то в соответствии с (1.16) получаем $\mathfrak{p}_{ij} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_i\rangle = \langle g_j, \omega_{i-s+r}\rangle = \delta_{j,i-s+r}$.

3. Рассмотрим еще случай $i = s+r-1$. Если $j \neq 2r$, то выполнено условие (B_{ij}), и потому

$$\mathfrak{p}_{s+r-1,j} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_{s+r-1}\rangle = 0 \quad \text{при } j \in \mathbb{Z}\backslash\{2r\},$$

а для $\mathfrak{p}_{s+r-1,2r}$ имеем

$$\mathfrak{p}_{s+r-1,2r} = \langle g_{2r}, \widetilde{\omega}_{s+r-1}\rangle = \left\langle g_{2r}, \frac{\det(\varphi, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+r-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})}\right\rangle$$
$$= \frac{\det(\mathbf{a}_{2r}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+r-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})} = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+r}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+r-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r})} = 0.$$

Таким образом, $\mathfrak{p}_{s+r-1,j} = 0 \quad$ при $j \in I_T$. Объединяя результаты, полученные для этих трех случаев, видим, что соотношения (2.4) доказаны. $\square$

Для вычисления $\mathfrak{p}_{ij} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_i \rangle$ при $j \in I_M$ потребуется проанализировать расположение носителя функционала g_j при четных и при нечетных j. Поскольку $\mathrm{supp} g_j \subset [x_j, x_j + \varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$, то достаточно рассмотреть расположение узлов x_j относительно множеств $\mathrm{supp}_+ \widetilde{\omega}_i$.

Прежде всего, заметим, что если $s \leqslant q \leqslant r$, то узел x_{2q} исходной сетки X сохраняется в укрупненной сетке $\widetilde{X}$ и в ней имеет номер $(2q - 2s)/2 + 2s = s + q$, так что

$$x_{2q} = \widetilde{x}_{s+q} \quad \text{при} \quad s \leqslant q \leqslant r. \tag{2.5}$$

Узел x_{2q+1} с нечетным номером при $s \leqslant q \leqslant r - 1$ находится между узлами $x_{2q} = \widetilde{x}_{s+q}$ и $x_{2q+2} = \widetilde{x}_{s+q+1}$:

$$x_{2q} = \widetilde{x}_{s+q} < x_{2q+1} < x_{2q+2} = \widetilde{x}_{s+q+1} \quad \text{при} \quad s \leqslant q \leqslant r - 1. \tag{2.6}$$

В дальнейшем часто используется условие

$$s \leqslant q \leqslant r - 1. \tag{2.7}$$

Рассмотрим функционалы с нечетным индексом g_{2q+1}.

Лемма 3. *При условии $s - 1 \leqslant q \leqslant r - 1$ справедливы соотношения*

$$\mathfrak{p}_{i,2q+1} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \backslash \{s + q\}, \tag{2.8}$$

$$\mathfrak{p}_{s+q,2q+1} = 1. \tag{2.9}$$

Доказательство. 1. Очевидно, что

$$\mathfrak{p}_{i,2q+1} = \langle g_{2q+1}, \widetilde{\omega}_i \rangle = 0 \quad \text{при} \quad i \in I_*^h \cup I_*^t$$

из-за выполнения условия $(B_{i,2q+1})$ для рассматриваемых i.

2. Пусть теперь $i \in I_*^m$. Рассмоторим здесь три подслучая.

2.1. Если $i \in \{2s, 2s + 1, \ldots, s + r - 2\}$, то

$$\mathfrak{p}_{i,2q+1} = \langle g_{2q+1}, \widetilde{\omega}_i \rangle = 0 \quad \text{при} \quad i \in I_*^m \backslash \{s + q - 1, s + q\}, \tag{2.10}$$

ибо для рассматриваемых i выполнены условия $(B_{i,2q+1})$; действительно, в этом случае согласно (2.6) $\widetilde{x}_{s+q} < x_{2q+1} < \widetilde{x}_{s+q+1}$ и для нарушения упомянутого условия нужно, чтобы узел x_{2q+1} попал во множество $\mathrm{supp}_+ \widetilde{\omega}_j$, т.е. в промежуток $[\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+2})$. Последнее возможно лишь в двух случаях: либо $j = s + q - 1$, либо $j = s + q$; таким образом, соотношение (2.10) установлено.

2.2. Пусть теперь $i=s+q-1$. Поскольку $\mathfrak{p}_{s+q-1,2q+1}=\langle g_{2q+1},\widetilde{\omega}_{s+q-1}\rangle$, то, используя здесь представление (1.13), получаем

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q+1}=\left\langle g_{2q+1},\frac{\det(\varphi,\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1},\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}\right\rangle=\frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1},\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1},\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}.$$

Ввиду условия леммы, $2s-1\leqslant s+q\leqslant r+s-1$, так что $s+q\in I^m_*$, и в силу свойства (1.11) находим

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q}=\mathbf{a}_{2q+1}; \tag{2.11}$$

теперь видно, что $\mathfrak{q}_{s+q-1,2q+1}=0$. Таким образом, верно соотношение (2.8).

2.3. Рассмотрим последний случай: $i=s+q$. Рассматривая $\mathfrak{p}_{s+q,2q+1} = \langle g_{2q+1},\widetilde{\omega}_{s+q}\rangle$ и снова используя представление (1.13), находим

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q+1}=\left\langle g_{2q+1},\frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1},\varphi)}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1},\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}\right\rangle=\frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1},\mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1},\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}.$$

Применяя здесь соотношение (2.11), приходим к равенству (2.9).

Лемма доказана. □

Для завершения исследования в отношении случая $j\in I_M$ рассмотрим функционалы g_j с четным индексом $j=2q$ при условии (2.7). Поскольку $\operatorname{supp} g_{2q}\subset[x_{2q},x_{2q}+\varepsilon)\ \forall\varepsilon>0$, то важно заметить, что в этом случае справедливы формулы (2.5). Обратимся к вычислению значений $\mathfrak{p}_{i,2q}=\langle g_{2q},\widetilde{\omega}_i\rangle$.

Лемма 4. *При условии* (2.7) *имеют место соотношения:*

$$\mathfrak{p}_{i,2q}=0\quad\forall i\in\mathbb{Z}\backslash\{s+q-1,s+q\}, \tag{2.12}$$

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q}=\frac{\det(\mathbf{a}_{2q},\mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1},\mathbf{a}_{2q+1})}, \tag{2.13}$$

$$\mathfrak{p}_{s+q,2q}=\frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1},\mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1},\mathbf{a}_{2q+1})}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Очевидно, что значения $\mathfrak{p}_{i,2q}$ могут быть ненулевыми лишь при условии $\widetilde{x}_{s+q}\in\operatorname{supp}_+\widetilde{\omega}_i$ (оно эквивалентно условию $\widetilde{x}_{s+q}\in[\widetilde{x}_j,\widetilde{x}_{j+2})$); последнее равносильно соотношению $i\in\{s+q-1,s+q\}$. Отсюда следуют соотношения (2.12).

Теперь рассмотрим значения индекса i, исключенные в (2.12).

1. Пусть $i=s+q-1$. Поскольку выполнено соотношение (2.7), то $s+q-1,s+q\in I^m_*$, и в силу (1.10) имеем

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}=\mathbf{a}_{2q-1},\qquad\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q}=\mathbf{a}_{2q+1}. \tag{2.15}$$

Используя формулу (1.13), получаем

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q} = \langle g_{2q}, \widetilde{\omega}_{s+q-1}\rangle = \Big\langle g_{2q}, \frac{\det(\varphi, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}\Big\rangle.$$

Подставляя сюда соотношения (2.15), выводим формулу (2.13).

2. Пусть теперь $i = s + q$. По-прежнему справедливы соотношения (2.15). Из (1.13) имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_{s+q,2q} = \langle g_{2q}, \widetilde{\omega}_{s+q}\rangle &= \Big\langle g_{2q}, \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \varphi)}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}\Big\rangle \\ &= \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Используя соотношения (2.15), из (2.16) выводим равенство (2.14).

Лемма доказана. □

Объединение результатов лемм 1–4 показывает, что доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}&\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{i,j} && \textit{при} \quad \forall i \in \mathbb{Z},\ j \in I_H, \\ &\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{j,i-s+r} && \textit{при} \quad \forall i \in \mathbb{Z},\ j \in I_T;\end{aligned}$$

остальные элементы вычисляются при $q \in \{s-1, s, \ldots, r-1\}$ *по формулам*

$$\mathfrak{p}_{i,2q} = \mathfrak{p}_{i,2q+1} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}\backslash\{s+q-1, s+q\}, \tag{2.17}$$

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q+1} = 0, \qquad \mathfrak{p}_{s+q,2q+1} = 1; \tag{2.18}$$

при $q \in \{s, s+1, \ldots, r-1\}$ *справедливы соотношения*

$$\mathfrak{p}_{s+q-1,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}, \qquad \mathfrak{p}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}. \tag{2.19}$$

Теорема 4, доказанная выше, была представлена в “построчной” формулировке, но в некоторых случаях нам удобнее использовать эквивалентную ”постолбцовую” формулировку этой теоремы, а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Элементы матрицы* $\mathfrak{P}$ *вычисляются по формулам*

$$\mathfrak{p}_{i',j} = \delta_{i',j} \qquad \textit{при} \quad \forall j \in \mathbb{Z},\ i' \in I_*^h, \tag{2.20}$$

$$\mathfrak{p}_{i',j} = \delta_{i',j+s-r} \qquad \textit{при} \quad \forall j \in \mathbb{Z},\ i' \in I_*^t; \tag{2.21}$$

остальные элементы вычисляются по формулам

$$\mathfrak{p}_{i',i} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}\backslash\{2(i'-s), 2(i'-s)+1, 2(i'-s)+2,\},$$

$$\mathfrak{p}_{i',2(i'-s)} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2(i'-s)-1}, \mathbf{a}_{2(i'-s)})}{\det(\mathbf{a}_{2(i'-s)-1}, \mathbf{a}_{2(i'-s)+1})} \quad \textit{при} \quad i' \in I_*^m\backslash\{2s-1\},$$

$$\mathfrak{p}_{2s-1,2s-2} = 0, \quad \mathfrak{p}_{r+s-1,2r} = 0, \quad \mathfrak{p}_{i',2(i'-s)+1} = 1 \quad \textit{при} \quad i' \in I_*^m,$$

$$\mathfrak{p}_{i',2(i'-s)+2} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2(i'-s)+2}, \mathbf{a}_{2(i'-s)+3})}{\det(\mathbf{a}_{2(i'-s)+1}, \mathbf{a}_{2(i'-s)+3})} \quad \textit{при} \quad i' \in I_*^m\backslash\{s+r-1\}.$$

§3. Матрица продолжения

Рассмотрим систему функционалов $\{\widetilde{g}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, биортогональную к системе $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\langle\widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_j\rangle = \delta_{i,j}$, со свойством

$$\operatorname{supp}\widetilde{g}_i \subset [\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \quad \forall\varepsilon > 0, \quad i \in \mathbb{Z}; \quad \operatorname{supp}\widetilde{g}_{-1} \subset (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_0 + \varepsilon). \tag{3.1}$$

Используя соотношение

$$\langle\widetilde{g}_i, \varphi\rangle = \widetilde{\mathbf{a}}_i, \tag{3.2}$$

вычислим матрицу $\mathfrak{Q}$ размеров $(\widetilde{N}+1)\times(N+1)$ с элементами $\mathfrak{q}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \langle\widetilde{g}_i, \omega_j\rangle$; здесь $i, j \in \mathbb{Z}$.

Для ряда значений i и j справедливо равенство

$$(C_{i,j}) \qquad \operatorname{supp}\widetilde{g}_i \cap \operatorname{supp}_+\omega_j = \varnothing;$$

на него в дальнейшем будем ссылаться, как на соотношение $(C_{i,j})$.

Лемма 5. *Для всех $i \in \mathbb{Z}$ справедливы формулы*

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j} \qquad \textit{при} \quad j \in I_H, \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j+s-r} \qquad \textit{при} \quad j \in I_T. \tag{3.4}$$

Доказательство. Благодаря соотношению (1.15) имеем

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \langle\widetilde{g}_i, \omega_j\rangle = \langle\widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_j\rangle = \delta_{i,j} \quad \text{при} \quad j \in I_H,\ i \in \mathbb{Z};$$

таким образом, формула (3.3) доказана. Заметим теперь, что применяя формулу (1.16) в виде

$$\widetilde{\omega}_{j'}(t) \equiv \omega_{r-s+j'}(t) \quad \text{при} \quad s+r \leqslant j'$$

и полагая в ней $j = r - s + j'$, найдем

$$\widetilde{\omega}_{j+s-r}(t) \equiv \omega_j(t) \quad \text{при} \quad 2r \leqslant j.$$

Учитывая последнее соотношение, получим

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \langle \widetilde{g}_i, \omega_j \rangle = \langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_{j+s-r} \rangle = \delta_{i,j+s-r} \quad \text{при } 2r \leqslant j,\ i \in \mathbb{Z}.$$

Последнее эквивалентно соотношению (3.4).

Лемма полностью доказана. □

Лемма 6. *Если* $2s \leqslant 2q+1 \leqslant 2r$, *то для всех* $i \in \mathbb{Z} \setminus \{s+q\}$ *справедливы соотношения*

$$\mathfrak{q}_{i,2q} = 0; \tag{3.5}$$

кроме того

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}. \tag{3.6}$$

Доказательство. В условиях леммы имеем эквивалентности

$$2s-1 \leqslant 2q \leqslant 2r-1 \iff 2s \leqslant 2q \leqslant 2r-2 \iff s \leqslant q \leqslant r-1. \tag{3.7}$$

Положим

$$\varepsilon_{\widetilde{X}} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{2s \leqslant i \leqslant 2r} (x_{i+1} - x_i).$$

Ясно, что для

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\widetilde{X}}) \tag{3.8}$$

верна эквивалентность

$$[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \cap [\widetilde{x}_{s+q}, \widetilde{x}_{s+q+1}) \neq \varnothing \iff i = s+q. \tag{3.9}$$

Используя (2.5) и (3.7), имеем $\widetilde{x}_{s+q} = x_{2q}$, так что из (3.9) следует

$$[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \cap \operatorname{supp}_+ \omega_{2q} \neq \varnothing \iff i = s+q.$$

Из (3.1) видно, что условие $C_{i,2q}$ выполнено для $i \in \mathbb{Z}$; соотношение (3.5) доказано.

Теперь найдем $\mathfrak{q}_{s+q,2q}$, используя (1.4) и (3.2):

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{s+q,2q} &= \langle \widetilde{g}_{s+q}, \omega_{2q} \rangle \\ &= \left\langle \widetilde{g}_{s+q}, \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \varphi)}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})} \right\rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_{s+q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ввиду соотношения (3.7) согласно (1.10) имеем $\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q} = \mathbf{a}_{2q+1}$ и из (3.10) получаем (3.6). □

Лемма 7. *Если выполнено соотношение* (2.7), *то справедливы равенства*

$$\mathfrak{q}_{i,2q+1} = 0 \quad \textit{при } i \in \mathbb{Z}\backslash\{s+q+1\}. \tag{3.11}$$

При $q = s-1$ *верны формулы*

$$\mathfrak{q}_{i,2s-1} = 0 \quad \textit{при } i \in \mathbb{Z}\backslash\{2s-1, 2s\}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 6 при условиях (2.7) и (3.8) имеем эквивалентность

$$[x_{2(i-s)}, x_{2(i-s)} + \varepsilon) \cap [x_{2q+1}, x_{2q+3}) \neq \varnothing \iff 2(i-s) = 2q+2.$$

С учетом формулы (2.5) имеем $\widetilde{x}_i = x_{2(i-s)}$, так что предыдущую эквивалентность можно записать в виде

$$[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \cap [x_{2q+1}, x_{2q+3}) \neq \varnothing \iff i = s+q+1,$$

что эквивалентно соотношению

$$[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \cap \operatorname{supp}_+ \omega_{2q+1} \neq \varnothing \iff i = s+q+1.$$

Таким образом, формула (3.11) доказана.

Перейдем к доказательству формулы (3.12). Очевидна эквивалетность

$$[x_i, x_i + \varepsilon) \cap [x_{2s-1}, x_{2s+1}) \neq \varnothing \iff i \in \{2s-1, 2s\}.$$

Теперь заметим, что из (1.6) – (1.7) вытекают равенства

$$\widetilde{x}_{2s-1} = x_{2s-1}, \qquad \widetilde{x}_{2s} = x_{2s},$$

и, следовательно, верна формула

$$[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon) \cap [x_{2s-1}, x_{2s+1}) \neq \varnothing \iff i \in \{2s-1, 2s\}.$$

Отсюда видно, что соотношение (3.12) справедливо. □

Лемма 8. *Верны соотношения*

$$\mathfrak{q}_{s+q+1,2q+1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+3}, \mathbf{a}_{2q+2})}{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q+2})} \quad \textit{при } s-1 \leqslant q \leqslant r-2, \tag{3.13}$$

$$\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1} = 1, \quad \mathfrak{q}_{s+r,2r-1} = 0. \tag{3.14}$$

Доказательство. Найдем $\mathfrak{q}_{s+q+1,2q+1}$, используя (1.4) и (3.2):

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{s+q+1,2q+1} = \langle \widetilde{g}_{s+q+1}, \omega_{2q+1} \rangle &= \left\langle \widetilde{g}_{s+q+1}, \frac{\det(\varphi, \mathbf{a}_{2q+2})}{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q+2})} \right\rangle \\ &= \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q+1}, \mathbf{a}_{2q+2})}{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q+2})}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Поскольку $2s-1 \leqslant s+q \leqslant r+s-1$, то согласно (1.10) находим $\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q+1} = \mathbf{a}_{2q+3}$; из (3.15) получаем (3.13).

Теперь найдем $\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1}$. Используя формулу (1.4), выводим

$$\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1} = \langle \widetilde{g}_{2s-1}, \omega_{2s-1} \rangle = \left\langle \widetilde{g}_{2s-1}, \frac{\det(\mathbf{a}_{2s-2}, \varphi)}{\det(\mathbf{a}_{2s-2}, \mathbf{a}_{2s-1})} \right\rangle.$$

Применяя равенство (3.2), отсюда находим

$$\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2s-2}, \widetilde{\mathbf{a}}_{2s-1})}{\det(\mathbf{a}_{2s-2}, \mathbf{a}_{2s-1})};$$

учитывая здесь, что в соответствии с (1.10) $\widetilde{\mathbf{a}}_{2s-1} = \mathbf{a}_{2s-1}$, приходим к первому из соотношений (3.14).

Рассмотрим случай $q = r-1$. Здесь $s+q+1 = s+r$, и ввиду (1.11) справедливы равенства $\widetilde{\mathbf{a}}_{s+q+1} = \widetilde{\mathbf{a}}_{s+r} = \mathbf{a}_{2r}$. Замечая, что в этом случае $2q+2 = 2r$, из (3.15) выводим второе соотношение в (3.14).

Лемма доказана. □

Теорема 6. *Элементы матрицы $\mathfrak{Q}$ вычисляются по следующим формулам.*

1. *Для всех $i \in \mathbb{Z}$ справедливы соотношения*

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j} \qquad \text{при} \quad j \in I_H, \tag{3.16}$$

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j+s-r} \qquad \text{при} \quad j \in I_T. \tag{3.17}$$

2. *Кроме того*

$$\mathfrak{q}_{i,2q} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \backslash \{s+q\}, \quad s \leqslant q \leqslant r-1, \tag{3.18}$$

$$\mathfrak{q}_{i,2s-1} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \backslash \{2s-1, 2s\}, \tag{3.19}$$

$$\mathfrak{q}_{i,2q+1} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \backslash \{s+q+1\} \text{ при } s \leqslant q \leqslant r-2, \tag{3.20}$$

$$\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1} = 1, \qquad \mathfrak{q}_{i,2r-1} = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{3.21}$$

3. *Наконец, справедливы соотошения*

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})} \quad \text{при } s \leqslant q \leqslant r-1, \tag{3.22}$$

$$\mathfrak{q}_{s+q+1,2q+1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+3}, \mathbf{a}_{2q+2})}{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q+2})} \quad \text{при } s-1 \leqslant q \leqslant r-2. \tag{3.23}$$

Доказательство. Все три утверждения очевидным образом следуют из лемм 5, 6, 7, 8. □

Иногда удобнее использовать следующую эквивалентную формулировку теоремы 6.

Теорема 7. *Элементы матрицы $\mathfrak{Q}$ вычисляются по следующим формулам.*

1. *Для всех $i \in \mathbb{Z}$ справедливы соотношения*

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad j \in I_H, \tag{3.24}$$

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j+s-r} \quad \textit{при} \quad j \in I_T. \tag{3.25}$$

2. *Кроме того*

$$\mathfrak{q}_{2s-1,j} = \delta_{2s-1,j} \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{3.26}$$

$$\mathfrak{q}_{s+q,j} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \backslash \{2q-1, 2q\} \quad \textit{при} \quad s \leqslant q \leqslant r-1. \tag{3.27}$$

3. *Наконец, справедливы соотошения*

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}, \tag{3.28}$$

$$\mathfrak{q}_{s+q,2q-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})} \quad \textit{при } s \leqslant q \leqslant r-1. \tag{3.29}$$

Доказательство. Доказательство формул (3.24)–(3.29) получается из теоремы 6 простыми подстановками индексов; детали доказательства предлагается восстановить читателю. □

Теорема 8. *Справедливо соотношение $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I$, где I – единичная матрица.*

Доказательство этой теоремы проводится по схеме, предложенной автором ранее (см., например, [2]).

§4. Вэйвлетное разложение

Рассмотрим оператор P проектирования пространства $\mathbb{S}$ на подпространство $\widetilde{\mathbb{S}}$, задаваемый формулой

$$Pu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle \widetilde{g}_j, u \rangle \, \widetilde{\omega}_j \qquad \forall u \in \mathbb{S},$$

и введем оператор $Q = \mathcal{I} - P$, где $\mathcal{I}$ – тождественный в $\mathbb{S}$ оператор.

Пространством вэйвлетов (всплесков) называется пространство $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} Q\mathbb{S}$, а прямое разложение $\mathbb{S} = \widetilde{\mathbb{S}} \dot{+} \mathbb{W}$ называется *сплайн-вэйвлетным разложением* пространства $\mathbb{S}$.

Проводя стандартные рассуждения (см., например, [1]) получаем *формулы реконструкции* $c_j = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i \mathfrak{p}_{i,j} + b_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}$ и *формулы декомпозиции*

$$b_j = c_j - \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j'\in\mathbb{Z}} c_{j'} \mathfrak{q}_{i,j'} \mathfrak{p}_{i,j} \qquad \forall j \in \mathbb{Z},$$

$$a_i = \sum_{j'\in\mathbb{Z}} c_{j'} \mathfrak{q}_{i,j'} \qquad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Введя вектор-столбцы

$$\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)^T, \quad \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)^T,$$

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)^T,$$

находим $\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q} \mathbf{c}$, $\mathbf{a} = \mathfrak{Q} \mathbf{c}$.

Вектор $\mathbf{a}$ называем *основной*, а вектор $\mathbf{b}$ – *вэйвлетной* составляющей исходного вектора (потока) $\mathbf{c}$.

Для вычисления оператора декомпозиции найдем произведение $\mathfrak{U} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}$. Для элементов $\mathfrak{u}_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, квадратной матрицы $\mathfrak{U}$ порядка $N+1$ имеем

$$\mathfrak{u}_{i,j} = \sum_{i'\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}_{i',i} \mathfrak{q}_{i',j} = S^h_{i,j} + S^m_{i,j} + S^t_{i,j}, \tag{4.1}$$

где

$$S^h_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i'\in I^h_*} \mathfrak{p}_{i',i} \mathfrak{q}_{i',j}, \quad S^m_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i'\in I^m_*} \mathfrak{p}_{i',i} \mathfrak{q}_{i',j}, \quad S^t_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i'\in I^t_*} \mathfrak{p}_{i',i} \mathfrak{q}_{i',j}. \tag{4.2}$$

Лемма 9. *Верны равенства*

$$S^m_{i,j} = 0 \quad \textit{при} \quad i \in I_M, \quad j \in \mathbb{Z} \backslash I_M, \tag{4.3}$$

и для всех $j \in \mathbb{Z}$ *справедливы формулы*

$$S^h_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad i \in I_H, \qquad S^h_{i,j} = 0 \quad \textit{при} \quad i \notin I_H, \tag{4.4}$$

$$S^t_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad i \in I_T, \qquad S^t_{i,j} = 0 \quad \textit{при} \quad i \notin I_T. \tag{4.5}$$

Доказательство. Формулы (4.3) непосредственно вытекают из структуры перемножаемых матриц $\mathfrak{P}^T$ и $\mathfrak{Q}$.

Используя формулы (2.20), находим $S^h_{i,j} = \sum_{i'\in I^h_*} \delta_{i',i} \mathfrak{q}_{i',j}$, так что

$$S^h_{i,j} = \mathfrak{q}_{i,j} \quad \text{при} \quad i \in I^h_*, \qquad S^h_{i,j} = 0 \quad \text{при} \quad i \notin I^h_*.$$

Принимая во внимание формулы (3.16) и равенство $I_*^h = I_H$, получаем получаем соотношение (4.4).

Аналогичным образом с помощью формул (2.21) находим $S^t_{i,j} = \sum_{i\,'\in I_*^t} \delta_{i\,',i-r+s}\mathfrak{q}_{i\,',j}$, откуда

$$S^t_{i,j} = \mathfrak{q}_{i-r+s,j} \quad \text{при} \quad i \in I_T, \qquad S^t_{i,j} = 0 \quad \text{при} \quad i \notin I_T.$$

Учитывая формулы (3.17), отсюда немедленно получаем соотношения (4.5).

Лемма доказана. □

Лемма 10. *Для всех $j \in I_M$ справедливы формулы*

$$S^m_{2q,j} = \mathfrak{p}_{s+q,2q}\mathfrak{q}_{s+q,j} + \mathfrak{p}_{s+q-1,2q}\mathfrak{q}_{s+q-1,j} \tag{4.6}$$

$$\textit{при} \quad q \in \{s, \ldots, r-1\}, \tag{4.7}$$

$$S^m_{2q+1,j} = \mathfrak{q}_{s+q,j} \quad \textit{при} \quad q \in \{s-1, \ldots, r-1\}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что индекс $i\,'$ в сумме $S^m_{i,j}$ лежит во множестве $I_*^m = \{2s-1, \ldots, s+r-1\}$. Применяя формулы (2.17) и (2.19) при $i = 2q$, получаем соотношения (4.6), где должны выполняться включения $s+q \in I_*^m$ и $s+q-1 \in I_*^m$ одновременно, а они эквивалентны включению $q \in \{s, \ldots, r-1\}$; таким образом, соотношения (4.6) – (4.7) доказаны.

Аналогичным образом благодаря формулам (2.18) при $i = 2q+1$ с учетом включения $s+q \in I_*^m$ выводим соотношения (4.8).

Лемма полностью доказана. □

Лемма 11. *Для*

$$q \in \{s+1, \ldots, r-1\} \tag{4.9}$$

справедливы формулы

$$S^m_{2q,2q-3} = \mathfrak{p}_{s+q-1,2q}\mathfrak{q}_{s+q-1,2q-3}, \tag{4.10}$$

$$S^m_{2q,2q-2} = \mathfrak{p}_{s+q-1,2q}\mathfrak{q}_{s+q-1,2q-2}, \tag{4.11}$$

$$S^m_{2q,2q-1} = \mathfrak{p}_{s+q,2q}\mathfrak{q}_{s+q,2q-1}, \tag{4.12}$$

а для

$$q \in \{s, \ldots, r-1\} \tag{4.13}$$

верны формулы

$$S^m_{2q,2q} = \mathfrak{p}_{s+q,2q}\mathfrak{q}_{s+q,2q}, \tag{4.14}$$

$$S^m_{2q,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j \in I_M \backslash \{2q-3, 2q-2, 2q-1, 2q\}, \tag{4.15}$$

и, наконец, верно равенство

$$S^m_{2s,2s-1} = \mathfrak{p}_{2s,2s}\mathfrak{q}_{2s,2s-1} + \mathfrak{p}_{2s-1,2s}\mathfrak{q}_{2s-1,2s-1}. \tag{4.16}$$

Доказательство. Используя (4.6), где $j = 2q-3$, получаем

$$S^m_{2q,2q-3} = \mathfrak{p}_{s+q,2q}\mathfrak{q}_{s+q,2q-3} + \mathfrak{p}_{s+q-1,2q}\mathfrak{q}_{s+q-1,2q-3}.$$

Согласно условию (4.9) число $j = 2q-3$ содержится во множестве I_M. В соответствии с формулами (3.20) и (3.23) имеем $\mathfrak{q}_{s+q,2q-3} = 0$, и потому справедливо соотношение (4.10).

Аналогичным образом из (4.6) при $j = 2q-2$ с учетом формул (3.18) и (3.22) найдем $\mathfrak{q}_{s+q,2q-2} = 0$, откуда получаем формулу (4.11).

Наконец, тем же путем из (4.6) при $j = 2q-1$ в силу формул (3.20) и (3.23) выводим равенство $\mathfrak{q}_{s+q-1,2q-1} = 0$; следовательно, справедливо соотношение (4.12).

Теперь в (4.8) положим $j = 2q$; в этом случае при выполнении соотношения (4.13) с помощью формул (3.18) и (3.22) находим $\mathfrak{q}_{s+q-1,2q} = 0$; таким образом, доказано равенство (4.14).

Соотношения (4.15) вытекают из (4.6) и теоремы 6.

Наконец, равенство (4.16) получается из (4.6) при $q = s$ и $j = 2s-1$.

Лемма доказана. $\square$

Лемма 12. *Для $q \in \{s+1, \ldots, r-1\}$ справедливы формулы*

$$S^m_{2q,2q-3} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q-2})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \tag{4.17}$$

$$S^m_{2q,2q-2} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \tag{4.18}$$

$$S^m_{2q,2q-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}, \tag{4.19}$$

а для $q \in \{s, \ldots, r-1\}$ верны формулы

$$S^m_{2q,2q} = 1, \tag{4.20}$$

$$S^m_{2q,j} = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad j \in I_M \backslash \{2q-3, 2q-2, 2q-1, 2q\}, \tag{4.21}$$

и, наконец, верно равенство

$$S^m_{2s,2s-1} = 0. \tag{4.22}$$

Доказательство. Применяя формулы (2.19), (3.22) и (3.23) в соотношениях (4.10)–(4.14), получим равенства (4.17)–(4.20).

Равенства (4.21) совпадают с ранее доказанными равенствами (4.15). Формула (4.22) получается из (4.16) использванием соотношений (2.13) и (2.14) при $q = s$, а также равенств (3.23) при $q = s - 1$ и первого из соотношений (3.21).

Лемма доказана. □

Теорема 9. *Элементы матрицы* $\mathfrak{U}$ *могут быть представлены в виде*

$$\mathfrak{u}_{i,j} = \delta_{i,j} \qquad \textit{при} \quad i \in I_H \cup I_T \cup \{2s-1, 2s\},\ j \in \mathbb{Z}, \tag{4.23}$$

$$\mathfrak{u}_{i,j} = 0 \qquad \textit{при} \quad i \in I_M,\ j \in \mathbb{Z} \backslash I_M, \tag{4.24}$$

При $q \in \{s+1, s+2, \dots, r-1\}$ *справедливы равенства*

$$\mathfrak{u}_{2q,2q-3} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q-2})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \tag{4.25}$$

$$\mathfrak{u}_{2q,2q-2} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \tag{4.26}$$

$$\mathfrak{u}_{2q,2q-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}, \qquad \mathfrak{u}_{2q,2q} = 1, \tag{4.27}$$

$$\mathfrak{u}_{2q,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j \in I_M \backslash \{2q-3, 2q-2, 2q-1, 2q\}. \tag{4.28}$$

Доказательство. Соотношения, перечисленные в данной теореме, установлены в леммах 9 и 12, а именно, для доказательства соотношений (4.23)–(4.24) следует обратиться к полученным там формулам (4.3)–(4.5), (4.20), (4.22), а соотношения (4.25)–(4.28) вытекают из (4.17)–(4.21). □

Теорема 10. *При условии* (4.13) *верны соотношения*

$$\mathfrak{u}_{2q+1,2q-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}, \tag{4.29}$$

$$\mathfrak{u}_{2q+1,2q} = \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q})}, \tag{4.30}$$

$$\mathfrak{u}_{2q+1,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j \in I_M \backslash \{2q-1, 2q\}. \tag{4.31}$$

Кроме того,

$$\mathfrak{u}_{2s-1,j} = \delta_{2s-1,j} \quad \forall j \in I_M. \tag{4.32}$$

Доказательство. При доказательстве используем леммы 9–12 и соотношение (4.1).

Прежде всего заметим, что при условии (4.13) числа $2q-1$ и $2q$ лежат во множестве I_M. Полагая в (4.8) $j=2q-1$ и $j=2q$, имеем

$$S^m_{2q+1,2q-1} = \mathfrak{q}_{s+q,2q-1}, \qquad S^m_{2q+1,2q} = \mathfrak{q}_{s+q,2q}. \tag{4.33}$$

Применяя в (4.33) формулы (3.22)–(3.23), выводим (4.29) и (4.30). Соотношения (4.31) следуют из (2.17), а формула (4.32) получается из (4.8) при $q=s-1$:

$$S^m_{2s-1,j} = \mathfrak{q}_{2s-1,j} = \delta_{2s-1,j};$$

последнее равенство справедливо благодаря соотношению (3.26).

Теорема доказана. □

Теорема 11. *Коммутатор* $\mathfrak{V} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}$ *матриц* $\mathfrak{Q}$ *и* $\mathfrak{P}^T$ *представляет собой матрицу с элементами* $\mathfrak{v}_{i,j}$, *ненулевые элементы которой вычисляются по формулам*

$$\mathfrak{v}_{2q,j} = -\mathfrak{u}_{2q,j} \quad \textit{при} \quad q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\},$$
$$j \in \{2q-3, 2q-2, 2q-1\}, \tag{4.34}$$

а при $q \in \{s, s+1, \ldots, r-1\}$ *справедливы соотношения*

$$\mathfrak{v}_{2q+1,j} = -\mathfrak{u}_{2q+1,j} \quad \textit{для} \quad j \in \{2q-1, 2q\}, \quad \mathfrak{v}_{2q+1,2q+1} = 1. \tag{4.35}$$

Остальные элементы матрицы $\mathfrak{V}$ *равны нулю.*

Доказательство. Утверждение теоремы 11 непосредственно вытекает из теорем 9 и 10. □

Теорема 12. *Ненулевые компоненты вэйвлетного потока*

$$\mathbf{b} = (I - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q})\mathbf{c}$$

имеют вид

$$b_{2q-1} = -\mathfrak{u}_{2q-1,2q-3}c_{2q-3} - \mathfrak{u}_{2q-1,2q-2}c_{2q-2} + c_{2q-1}$$
$$\textit{при} \quad q \in \{s+1, s+2, \ldots, r\}, \tag{4.36}$$
$$b_{2q} = -\mathfrak{u}_{2q,2q-3}c_{2q-3} - \mathfrak{u}_{2q,2q-2}c_{2q-2} - \mathfrak{u}_{2q,2q-1}c_{2q-1}$$
$$\textit{при} \quad q \in \{s+1, s+2, \ldots, r-1\}. \tag{4.37}$$

Доказательство. Утверждение следует из представлений (4.34) и (4.35) элементов матрицы $\mathfrak{V}$ (см. теорему 11). □

§5. Интерференция при локальном укрупнении сетки

Лемма 13. *В матрице $\mathfrak{V}$ строки с номерами $2q-1$ и $2q$ пропорциональны, а именно, строка с номером $2q$ получается из строки с номером $2q-1$ умножением на множитель*

$$\kappa_q \overset{\text{def}}{=} \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})}; \tag{5.1}$$

здесь $q \in \{s+1, s+2, \dots, r-1\}$.

Доказательство. Ввиду формул (4.34)–(4.35) достаточно доказать, что умножение вектора $\mathbf{u}_{2q-1} \overset{\text{def}}{=} (\mathfrak{u}_{2q-1,2q-3}, \mathfrak{u}_{2q-1,2q-2}, -1)$ на число κ_q дает вектор $\mathbf{u}_{2q} \overset{\text{def}}{=} (\mathfrak{u}_{2q,2q-3}, \mathfrak{u}_{2q,2q-2}, \mathfrak{u}_{2q,2q-1})$. Используя формулы (4.25)–(4.27) и (4.29)–(4.30), представим эти векторы в виде

$$\mathbf{u}_{2q-1} = \left(\frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q-2})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, -1 \right), \tag{5.2}$$

$$\mathbf{u}_{2q} = \left(\frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \cdot \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q-2})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \right.$$
$$\left. \frac{\det(\mathbf{a}_{2q}, \mathbf{a}_{2q+1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \cdot \frac{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-1})}{\det(\mathbf{a}_{2q-3}, \mathbf{a}_{2q-2})}, \frac{\det(\mathbf{a}_{2q+1}, \mathbf{a}_{2q})}{\det(\mathbf{a}_{2q-1}, \mathbf{a}_{2q+1})} \right). \tag{5.3}$$

Теперь видно, что умножение (5.2) на множитель (5.1) даст вектор (5.3). □

Теорема 13. *При $q \in \{s+1, s+2, \dots, r-1\}$ для компонент вэйвлетного потока справедливы равенства*

$$b_{2q} = \kappa_q b_{2q-1}, \tag{5.4}$$

где число κ_q не зависит от исходного потока $\mathfrak{c}$ и определяется формулой (5.1).

Доказательство. Используя лемму 13 и формулы (4.36)–(4.37), получаем доказываемое утверждение. □

Линейная зависимость между компонентами числового потока называется *интерференцией*, а пропорциональность соседних компонент с коэффициентом, не зависящим от исходного потока, называется *стоячей волной* (см. [2]).

Теорема 13 показывает, что порождение вэйвлетов первого порядка при однократном укрупнении сопровождается образованием системы стоячих волн, а размерность пространства вэйвлетов равна $r - s$; таким образом, эта размерность совпадает с числом удаляемых узлов (см. (1.5)).

§6. Об аппроксимационных свойствах вэйвлетного потока

Предположим, что $\varphi \in C[a,b]$. Для непрерывности рассматриваемых сплайнов необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{a}_j = \varphi_{j+1}$; здесь $\varphi_j \stackrel{\text{def}}{=} = \varphi(x_j)$.

Пусть вектор-функция $\varphi(t)$ имеет вид $\varphi(t) = (1, f(t))^T$, где $f \in C[a,b]$. В этом случае

$$\det(\varphi(t'), \varphi(t'')) = f(t'') - f(t'). \tag{6.1}$$

Обозначая $f_i \stackrel{\text{def}}{=} f(x_i)$, согласно формулам (4.29)–(4.30) и (6.1) имеем

$$\mathfrak{u}_{2q-1,2q-3} = \frac{f_{2q-1} - f_{2q}}{f_{2q-1} - f_{2q-2}}, \qquad \mathfrak{u}_{2q-1,2q-2} = \frac{f_{2q} - f_{2q-2}}{f_{2q-1} - f_{2q-2}}. \tag{6.2}$$

Таким образом, в случае непрерывных вэйвлетов из (4.36) с помощью (6.2) получаем

$$b_{2q-1} = \frac{f_{2q} - f_{2q-1}}{f_{2q-1} - f_{2q-2}} \cdot c_{2q-3} - \frac{f_{2q} - f_{2q-2}}{f_{2q-1} - f_{2q-2}} \cdot c_{2q-2} + c_{2q-1}. \tag{6.3}$$

Ввиду теоремы 13 компонента b_{2q} отличается от b_{2q-1} множителем κ_q, который в рассматриваемом случае (см. формулы (5.1) и (6.1)) может быть записан в виде

$$\kappa_q = \frac{f_{2q+2} - f_{2q+1}}{f_{2q+2} - f_{2q}}. \tag{6.4}$$

В случае, когда $\varphi(t) = (1,t)^T$ имеем $f(t) = t$, $f_i = x_i$, и формулы (6.3)–(6.4) принимают вид

$$b_{2q-1} = \frac{x_{2q} - x_{2q-1}}{x_{2q-1} - x_{2q-2}} \cdot c_{2q-3} - \frac{x_{2q} - x_{2q-2}}{x_{2q-1} - x_{2q-2}} \cdot c_{2q-2} + c_{2q-1}, \tag{6.5}$$

$$\kappa_q = \frac{x_{2q+2} - x_{2q+1}}{x_{2q+2} - x_{2q}}. \tag{6.6}$$

В случае равномерной сетки $x_j = jh$, $h > 0$, из (6.5)–(6.6) получаем

$$b_{2q-1} = c_{2q-3} - 2c_{2q-2} + c_{2q-1}, \tag{6.7}$$

$$\kappa_q = 1/2. \tag{6.8}$$

Предполагая, что источником исходного потока $\{c_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ является функция $u \in C^2$, а именно $c_j = u(jh)$, из (6.7) имеем $b_{2q-1} = h^2 u''(\zeta)$, где ζ – некоторая точка интервала (x_{2q-3}, x_{2q-1}). Ввиду теоремы 13 согласно соотношениям (5.4) и (6.8) имеем $b_{2q} = \frac{1}{2} h^2 u''(\zeta)$.

Литература

1. Ю. К. Демьянович, И. Д. Мирошниченко, *Гнездовые сплайн-вэйвлетные разложения.* — Проблемы мат. анализа, **64** (2012), 51–61.
2. Ю. К. Демьянович, *Интерференция в сплайн-вэйвлетных разложениях.* — Проблемы мат. анализа **66** (2012), 89–100.
3. Yu. K. Dem'yanovich, *Embedding of non-polynomial spline spaces.* — Math. Sci. **6**, No. 28 (2012), doi:10.1186/2251-7456-6-28.

Dem'yanovich Yu. K. Spline-wavelets in the case of a single local coarsening of the grid.

The structure of the spline-wavelet decomposition in the case of a single local coarsening of a grid is discussed. Algorithms of decomposition and reconstruction are obtained. The wavelet flow is evaluated in the case where the initial flow is generated by a smooth function.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: yuri.demjanovich@gmail.com

Поступило 3 ноября 2012 г.