Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 405, 2012 г.

А. Э. Гутерман, М. А. Ефимов

МОНОТОННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МАТРИЦ ИНДЕКСА 1

§1. Введение

Пусть $M_n(\mathbb{F})$ обозначает пространство квадратных матриц порядка n с коэффициентами из произвольного поля $\mathbb{F}$.

Определение 1.1. Матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ имеет *индекс* l ($\operatorname{Ind} A = l$), если $\operatorname{rk} A^l = \operatorname{rk} A^{l+1}$ и l – минимальное натуральное число с таким свойством.

Наиболее важный для нашей работы класс матриц – множество матриц индекса 1, поэтому сформулируем его определение отдельно.

Определение 1.2. Матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ имеет *индекс* 1 ($\operatorname{Ind} A = 1$), если $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^2$, или, что эквивалентно, $\dim(\operatorname{Im} A) = \dim(\operatorname{Im} A^2)$.

Обозначим через $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ подмножество матриц индекса 1 из $M_n(\mathbb{F})$.

Заметим, что по определению множество матриц индекса 1 содержит множество идемпотентов, однако множество матриц индекса 1 шире. В частности, оно содержит все диагонализуемые матрицы и все жордановы блоки с ненулевыми собственными значениями.

Множество матриц индекса 1 может быть частично упорядочено при помощи отношения порядка, определяемого посредством групповой обратной матрицы:

Определение 1.3. *Групповая обратная* $A^\sharp$ для матрицы A – это матрица, удовлетворяющая следующей системе матричных уравнений:

а) $AA^\sharp A = A$; б) $A^\sharp AA^\sharp = A^\sharp$; в) $AA^\sharp = A^\sharp A$.

Хорошо известно, что групповая обратная матрица $A^\sharp$ для данной матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$ существует тогда и только тогда, когда матрица A имеет индекс 1, см. [8, 21]. Кроме того, если $A^\sharp$ существует, то она единственна, см. [22,29]. Более подробно свойства групповой обратной

Ключевые слова: монотонные отображения матриц, групповая обратная матрица, матричные порядки.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов МД-2502.2012.1 и РФФИ-12-01-00140.

могут быть найдены в работах [3, 9, 28]. Напомним, что посредством групповой обратной можно определить отношение порядка на матрицах:

Определение 1.4 ([22])**.** Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, если $A = B$ или $\operatorname{Ind} A = 1$ и $AA^\sharp = BA^\sharp = A^\sharp B$. Более того, если $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$ и $A \neq B$, то $A \overset{\sharp}{<} B$.

Следующее разложение произвольной матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$ существует и единственно (см. [3, гл. 4.8]):

Определение 1.5. *Нильпотентым разложением* матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$ назовем представление в виде $A = C_A + N_A$, где $C_A N_A = N_A C_A = 0$, $\operatorname{Ind} C_A = 1$ и матрица N_A нильпотентна.

Ниже мы приведем определения некоторых других частичных порядков на матрицах, которые будут полезны в дальнейшем.

Определение 1.6 ([17, 24])**.** Будем обозначать $A \overline{\lessgtr} B$ для произвольных матриц A и B, если $\operatorname{rk}(B - A) = \operatorname{rk} B - \operatorname{rk} A$.

Определение 1.7 ([18])**.** Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $A \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} B$, если $C_A \overset{\sharp}{\leqslant} C_B$ и $N_A \overline{\lessgtr} N_B$.

Заметим, что на множестве матриц индекса 1 $\overset{\sharp}{<}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{<}$-порядки совпадают. Стоит отметить, что с многих точек зрения $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядок является наиболее естественным отношением порядка на множестве матриц индекса 1, см. [23, гл. IV].

Лемма 1.8 ([18])**.** *Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$ позволяет заключить, что $A \overline{\lessgtr} B$.*

Отметим, что более детальное описание свойств различных матричных порядков может быть найдено в монографии [23].

Другим важным отношением на матрицах является ортогональность, см. [31].

Определение 1.9 ([31])**.** Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Матрицы A и B *ортогональны* ($A \perp B$), если $AB = BA = 0$.

Определение 1.10. Отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ назовем *0-аддитивным*, если для любых матриц $A, B \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ со свойством $A \perp B$ имеем:

а) $T(A) \perp T(B)$; б) $T(A+B) = T(A) + T(B)$.

Пусть $\leqslant$ – некоторый частичный порядок на $M_n(\mathbb{F})$.

Определение 1.11. Пусть $M \subseteq M_n(\mathbb{F})$. Отображение $T\colon M \to M$ назовем *монотонным* относительно $\leqslant$-порядка, если для произвольных матриц $A, B \in M$ из условия $A \leqslant B$ следует $T(A) \leqslant T(B)$.

Определение 1.12. Пусть $M \subseteq M_n(\mathbb{F})$. Отображение $T\colon M \to M$ назовем *строго-монотонным* относительно $\leqslant$-порядка, если для произвольных матриц $A, B \in M$ условия $A \leqslant B$ и $T(A) \leqslant T(B)$ эквивалентны.

Исследование линейных отображений матриц, монотонных относительно различных отношений частичного порядка, является активно развивающимся разделом линейной алгебры и восходит к работам [2, 27], см. также [1, 10, 12–15, 26]. В нелинейном случае Овчинников в [25] и Шемрл в [30, 31] охарактеризовали биективные отображения на множестве идемпотентных матриц, которые являются строго-монотонными относительно минус-порядка. Легиша в работе [19] расширил этот результат до характеризации биективных отображений на пространстве всех матриц с вещественными или комплексными коэффициентами, которые являются строго-монотонными относительно этого порядка. Параллельно с этим Чой и Лим, см. [5], охарактеризовали аддитивные отображения на пространстве всех матриц над произвольным полем, которые являются монотонными относительно минус-порядка и не обязательно удовлетворяют условию биективности или условию строгой монотонности. Более того, в отличие от линейного случая, аддитивные отображения, сохраняющие минус-порядок, могут не являтся сюръективными. Недавно Легиша в работе [20] получил характеризацию сюръективных отображений пространства всех матриц над полем вещественных или комплексных чисел, которые являются строго-монотонными относительно порядка Дразина. Монотонные отображения банаховых алгебр над бесконечномерными гильбертовыми пространствами исследовались Шемрлом в [32] и Долинаром и Маровтом в работе [6]. Богданов и первый автор в [4] охарактеризовали линейные биективные отображения на матрицах с коэффициентами из произвольного поля, которые являются монотонными относительно

$\overset{\sharp}{<}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{<}$-порядков. Далее второй автор в работе [7] предложил метод, позволяющий устранить требование биективности рассматриваемых отображений, последнее условие предполагалось выполненным в [4].

В настоящей работе предложен новый метод спектрально-ортогональных разложений матриц, являющийся эффективным инструментом для работы на множестве матриц индекса 1. В качестве иллюстрации данного метода характеризуются биективные отображения матриц, которые являются монотонными относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка на множестве матриц индекса 1.

Перечислим основные результаты работы по параграфам. Во втором разделе мы вводим в рассмотрение и исследуем спектрально-ортогональные разложения матриц и демонстрируем, что такие разложения являются эффективным инструментом исследования монотонных отображений. Далее мы применяем полученные результаты для нахождения характеризации биективных отображений, монотонных относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. В разделе 3 доказываются некоторые предварительные результаты о свойствах таких отображений. Раздел 4 посвящен построению ряда примеров "диких" биективных отображений, не являющихся аддитивными, которые являются монотонными относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. В пятом разделе получена полная характеризация биективных отображений на множестве матриц индекса 1, которые являются монотонными относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. В разделе 6 установлено, что биективное отображение является строго-монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка на множестве матриц индекса 1 тогда и только тогда, когда это отображение является 0-аддитивным в смысле определения 1.10. Более того, построен пример, наглядно демонстрирующий отсутствие требуемой сюръективности без дополнительного условия строгой монотонности.

§2. Спектральные ортогональные матричные разложения

В этом разделе рассмотрены различные свойства матриц индекса 1, которые будут полезны в дальнейшем.

Пусть $\overline{\mathbb{F}}$ – алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}$. Через $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$ обозначим блочно-диагональную матрицу с блоками $A_1 \in M_k(\mathbb{F})$

и $A_2 \in M_{n-k}(\mathbb{F})$, $0 \leqslant k \leqslant n$. При этом, если $k = 0$, то $A = A_2$, а если $k = n$, то $A = A_1$. Кроме того, если $A_1 \in GL_k(\mathbb{F})$, то подматрица A_1 обратима при $k > 0$.

Утверждение 2.1. *Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $A \perp B$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $A_1 \in GL_k(\mathbb{F})$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ для некоторых $B_1 \in M_{n-k}(\mathbb{F})$.*

Доказательство. Будем считать, что B представлена в виде $B = \begin{pmatrix} B_4 & B_3 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}$, где $B_4 \in M_k(\mathbb{F}), B_1 \in M_{n-k}(\mathbb{F})$. Так как $AB = 0$, то $A_1B_4 = 0$, $A_1B_3 = 0$ и $B_2A_1 = 0$. Но $A_1 \in GL_k(\mathbb{F})$, откуда $B_2 = B_3 = B_4 = 0$ и B имеет требуемую форму. □

Утверждение 2.2. *Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$, $\operatorname{Ind} A = 1$, $\operatorname{rk} A = k$. Тогда существуют такие обратимые матрицы $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$ и $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$, что $A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.*

Доказательство. Так как $\operatorname{Ind} A = 1$, то A не имеет нильпотентных жордановых блоков, и утверждение напрямую следует из теоремы о жордановой нормальной форме матрицы. □

Утверждение 2.3. *Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $A \perp B$, $\operatorname{Ind} A = 1$, $\operatorname{rk} A = k$. Тогда существуют такие обратимые матрицы $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$, $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$ и $B_1 \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$, что $A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, $B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} P^{-1}$.*

Доказательство. По утверждению 2.2 существуют такие матрицы $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$ и $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$, что $A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Так как матрицы A и B ортогональны, то матрицы $\widetilde{A} = P^{-1}AP$ и $\widetilde{B} = P^{-1}BP$ также ортогональны. Таким образом, по утверждению 2.1 матрица $\widetilde{B}$ имеет вид $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$, где $B_1 \in M_{n-k}(\mathbb{F})$. □

Лемма 2.4. *Пусть матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ортогональны, $\operatorname{Ind} A = 1$. Тогда*

1. $\operatorname{rk}(A + B) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$;
2. $\operatorname{Ind}(A + B) = \operatorname{Ind} B$.

Доказательство. По утверждению 2.3 найдется такая матрица $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$, что $A = P\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$, $B = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}P^{-1}$ для некоторых $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$ и $B_1 \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

1) Заметим, что $\operatorname{rk}(A+B) = \operatorname{rk} A_1 + \operatorname{rk} B_1 = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$.

2) Далее, пусть i – произвольное натуральное число. Так как матрицы A и B ортогональны, то $(A+B)^i = A^i + B^i$. Тем самым, $\operatorname{rk}(A^i + B^i) = \operatorname{rk} A^i + \operatorname{rk} B^i$, а по условию $\operatorname{rk} A^i = \operatorname{rk} A$. Следовательно,

$$\operatorname{rk}(A+B)^i = \operatorname{rk}(A^i + B^i) = \operatorname{rk} A^i + \operatorname{rk} B^i = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B^i \text{ для всех } i.$$

Если $\operatorname{Ind} B = 1$, то $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} B^k$ для всех целых $k > 0$. Тем самым,

$$\operatorname{rk}(A+B)^i = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B^i = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B = \operatorname{rk}(A+B)$$

и $\operatorname{Ind}(A+B) = 1$.

Если же $\operatorname{Ind} B = l > 1$, то $\operatorname{rk} B^{l-1} \neq \operatorname{rk} B^l = \operatorname{rk} B^{l+1} = \operatorname{rk} B^{l+k}$ для всех целых $k > 0$. Для такого l имеем $\operatorname{rk}(A+B)^{l-1} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B^{l-1} \neq \operatorname{rk}(A+B)^l = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B^l = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B^{l+1} = \operatorname{rk}(A+B)^{l+1}$ и $\operatorname{Ind}(A+B) = l$.

В результате $\operatorname{Ind}(A+B) = \operatorname{Ind} B$. □

Лемма 2.5. *Пусть* $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$, $\operatorname{Ind} A = 1$.

1. $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$ *тогда и только тогда, когда* $A \perp (C - A)$.
2. *Если* $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$ *и* $C \perp B$, *то* $A \perp B$.

Доказательство. 1. Пусть $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$. По определению $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка имеем $AA^\sharp = CA^\sharp = A^\sharp C$. Тогда $(C-A)A = (C-A)AA^\sharp A = (CA^\sharp - AA^\sharp)A^2 = 0$. Аналогично, $A(C-A) = 0$, т.е. $A \perp (C-A)$.

Кроме того, если $A \perp (C-A)$, то $(C-A)A^\sharp = (C-A)A(A^\sharp)^2 = 0$ и $CA^\sharp = AA^\sharp$. Аналогично, $A^\sharp C = AA^\sharp$ и $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$.

2. Так как $C \perp B$, то $CB = 0$ и $BC = 0$. Следовательно,

$$AB = AA^\sharp AB = AA^\sharp CB = 0.$$

Аналогично, $BA = 0$ и $A \perp B$. □

Напомним, что $\mathbb{F}$ – произвольное поле и $\overline{\mathbb{F}}$ – его алгебраическое замыкание, $A \in M_n(\mathbb{F})$. Ниже мы рассмотрим две хорошо известные функции, описывающие структуру жордановой формы матрицы.

Определение 2.6. Функцию $k_A\colon \overline{\mathbb{F}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+$ определим по следующему правилу: для $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$ и $r \in \mathbb{N}$ значение функции $k_A(\lambda, r)$ равно количеству жордановых блоков матрицы A порядка r, отвечающих собственному значению λ. Если таких жордановых блоков у матрицы A нет, то положим $k_A(\lambda, r) = 0$.

Определение 2.7. Функция $K_A\colon \overline{\mathbb{F}} \to \mathbb{Z}_+$ определяет общее количество жордановых блоков матрицы A, отвечающих собственному числу λ, т.е. $K_A(\lambda) = \sum\limits_{r=1}^{\infty} k_A(\lambda, r)$.

Заметим, что $\operatorname{Spec} A = \{\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \mid K_A(\lambda) > 0\}$.

Лемма 2.8. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $\operatorname{Ind} A = 1$. Тогда из $A \perp B$ следует, что $k_{A+B}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r) + k_B(\lambda, r)$ для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$ и $r \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. По утверждению 2.3 найдется такая матрица $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$, что $A = P\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$, $B = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}P^{-1}$ для некоторых $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$ и $B_1 \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Тогда для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$ и $r \in \mathbb{N}$ имеем

$$k_{A+B}(\lambda, r) = k_{A_1}(\lambda, r) + k_{B_1}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r) + k_B(\lambda, r). \qquad \square$$

Лемма 2.9. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $\operatorname{Ind} A = 1$. Тогда из $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$ следует, что $k_A(\lambda, r) \leqslant k_B(\lambda, r)$ для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$ и $r \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Так как $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, имеем $A \perp (B - A)$ по лемме 2.5. Тогда по лемме 2.8

$$k_B(\lambda, r) = k_A(\lambda, r) + k_{B-A}(\lambda, r) \geqslant k_A(\lambda, r)$$

для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$ и $r \in \mathbb{N}$. $\square$

Для дальнейших рассуждений нам потребуется следующая лемма, которая может быть непосредственно проверена и является частным случаем результата [33, гл. VII].

Лемма 2.10 ([33, гл. VII]). *Пусть* $\mathbb{F}$ – *произвольное поле,* $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$, $AB = BA$, *и* $\operatorname{Spec} A_1 \cap \operatorname{Spec} A_2 = \varnothing$. *Тогда* $B_{12} = 0$ *и* $B_{21} = 0$.

Лемма 2.11. *Пусть* $\mathbb{F}$ – *произвольное поле,* $A, A', B \in M_n(\mathbb{F})$. *Пусть матрицы* A *и* A' *подобны,* $\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind} A' = 1$, $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, $A' \overset{\sharp}{\leqslant} B$, *и* $K_A(\lambda) \cdot (K_B(\lambda) - K_A(\lambda)) = 0$ *при всех* $\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$. *Тогда* $A = A'$.

Доказательство. 1. Так как $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, то $A \perp (B - A)$ по лемме 2.5. По утверждению 2.3 найдется такая обратимая матрица $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$, что $A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, $B - A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} P^{-1}$ для некоторых $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$ и $B_1 \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$, где $0 \leqslant k \leqslant n$. Обозначим $\widetilde{A} = P^{-1}AP$, $\widetilde{B} = P^{-1}BP$. Тогда имеем $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$.

2. По условию $K_A(\lambda) \cdot (K_B(\lambda) - K_A(\lambda)) = 0$ при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$, $\lambda \neq 0$, что может быть эквивалентно переписано как $K_{A_1}(\lambda) \cdot K_{B_1}(\lambda) = 0$ при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}, \lambda \neq 0$, т.е. матрицы A_1 и B_1 не имеют общих ненулевых собственных значений. Более того, $0 \notin \operatorname{Spec} A_1$. Тем самым, $\operatorname{Spec} A_1 \cap \operatorname{Spec} B_1 = \varnothing$.

3. Обозначая $\widetilde{A}' = P^{-1}A'P$, получаем $\widetilde{A}' \overset{\sharp}{\leqslant} \widetilde{B}$. Так как матрицы A и A' подобны, то $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}'$ также подобны, т.е. найдется такая обратимая матрица $Q_1 \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$, что $\widetilde{A} = Q_1^{-1}\widetilde{A}'Q_1$. Положим $\widetilde{C} = Q_1^{-1}\widetilde{B}Q_1$. Тогда

$$\widetilde{A} = Q_1^{-1}\widetilde{A}'Q_1 \overset{\sharp}{\leqslant} Q_1^{-1}\widetilde{B}Q_1 = \widetilde{C}.$$

Следовательно, $\widetilde{A} \perp (\widetilde{C} - \widetilde{A})$ по лемме 2.5. Тем самым, $\widetilde{C} - \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$ для некоторой матрицы $C_1 \in M_m(\overline{\mathbb{F}})$ по утверждению 2.1.

4. Так как матрицы $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ подобны, то подматрицы $B_1 \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$ и $C_1 \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$ также подобны, т.е. найдется такая обратимая матрица $P_1 \in GL_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$, что $B_1 = P_1^{-1}C_1P_1$. Положим $Q_2 = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$, $Q = Q_1Q_2$. Тогда прямые вычисления показывают, что $Q_2^{-1}\widetilde{A}Q_2 = \widetilde{A}$ и $Q_2^{-1}\widetilde{C}Q_2 = \widetilde{B}$. Следовательно, $Q^{-1}\widetilde{A}'Q = \widetilde{A}$ и $Q^{-1}\widetilde{B}Q = \widetilde{B}$.

5. Разобьем матрицу Q на блоки, согласованные со структурой матриц A и B, т.е. $Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \in M_n(\overline{\mathbb{F}})$, где $Q_{11} \in M_k(\overline{\mathbb{F}})$, $Q_{22} \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$. По лемме 2.10 согласно пунктам 2 и 4 получаем, что $Q_{12} = 0$ и $Q_{21} = 0$. Более того, $A_1 Q_{11} = Q_{11} A_1$. Тем самым, $\widetilde{A}Q = Q\widetilde{A}$ и $\widetilde{A} = Q\widetilde{A}Q^{-1} = \widetilde{A}'$. Следовательно, $A = P\widetilde{A}P^{-1} = P\widetilde{A}'P^{-1} = A'$. □

В следующей лемме будут охарактеризованы матрицы A, удовлетворяющие условию $K_A(\lambda) \leqslant 1$.

Лемма 2.12. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда число матриц $X \in M_n(\overline{\mathbb{F}})$ индекса 1, удовлетворяющих условию $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$, конечно тогда и только тогда, когда $K_A(\lambda) \leqslant 1$ при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$, $\lambda \neq 0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что $K_A(\lambda) \geqslant 2$ для некоторого $\lambda \neq 0$. Пусть матрица $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$ такова, что матрица $P^{-1}AP$ – жорданова нормальная форма матрицы A и жордановы блоки, отвечающие собственному числу λ, расположены в левом верхнем углу. Положим $A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} P^{-1}$, где $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$ – первый жорданов блок. Отметим, что по сделанному предположению первое собственное число матрицы A_2 также равно λ.

Зафиксируем некоторое $\mu \in \overline{\mathbb{F}}$ и рассмотрим прямоугольную матрицу $Z_\mu = \mu E_{1,k} \in M_{n-k,k}(\overline{\mathbb{F}})$. Тогда

$$Z_\mu A_1 = \mu E_{1,k} \cdot \lambda E_{k,k} = \lambda\mu E_{1,k} = \lambda E_{1,1} \cdot \mu E_{1,k} = A_2 Z_\mu.$$

Положим $X_\mu = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ Z_\mu & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. Так как $\lambda \neq 0$, то $\operatorname{Ind} X_\mu = 1$. Кроме того, $X_\mu \perp (A - X_\mu)$. В самом деле,

$$X_\mu(A - X_\mu) = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ Z_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -Z_\mu & A_2 \end{pmatrix} P^{-1} = 0,$$

$$(A - X_\mu)X_\mu = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -Z_\mu & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ Z_\mu & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = 0,$$

так как $-Z_\mu A_1 + A_2 Z_\mu = 0$. Тем самым, мы доказали, что $X_\mu \overset{\sharp}{\leqslant} A$ по лемме 2.5.

Более того, $X_{\mu_1} \neq X_{\mu_2}$ для любых $\mu_1 \neq \mu_2 \in \overline{\mathbb{F}}$. Поле $\overline{\mathbb{F}}$ алгебраически замкнуто и, следовательно, бесконечно. Тогда множество

$\{X \in M_n(\overline{\mathbb{F}}) \mid \operatorname{Ind} X = 1, X \overset{\sharp}{\leqslant} A\}$ также бесконечно. Полученное противоречие показывает, что $K_A(\lambda) \leqslant 1$ для всех $\lambda \neq 0$.

Достаточность. Предположим, что $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$. Тогда $0 \leqslant K_X(\lambda) \leqslant K_A(\lambda) \leqslant 1$ при $\lambda \neq 0$. Следовательно, $K_X(\lambda) \cdot (K_A(\lambda) - K_X(\lambda)) = 0$ при $\lambda \neq 0$. По лемме 2.11 для всех $\Lambda \subseteq \operatorname{Spec} A \setminus \{0\}$ найдется не более, чем одна матрица X такая, что $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$ и $\operatorname{Spec} X \setminus \{0\} = \Lambda$. Из леммы 2.9 следует, что $\operatorname{Spec} X \subseteq \operatorname{Spec} A \cup \{0\}$ для всех $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$. Тем самым, множество $\{X \in M_n(\overline{\mathbb{F}}) \mid \operatorname{Ind} X = 1, X \overset{\sharp}{\leqslant} A\}$ конечно. □

В качестве иллюстрации доказанной леммы приведем следующий пример.

Пример 2.13. В случае бесконечного поля $\mathbb{F}$ легко видеть, что

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \overset{\sharp}{>} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad a \notin \{0, 1\},$$

и нет других матриц, которые меньше, чем A, относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Однако нетрудно заметить, что $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\sharp}{>} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ для всех $b \in \mathbb{F}$.

Таким образом, существует бесконечно много матриц, меньших B, и ровно две матрицы, меньшие A.

Лемма 2.14. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$. Фиксируем $\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$. Тогда существует единственная матрица $X \in M_n(\overline{\mathbb{F}})$ такая, что* $\operatorname{Ind} X = 1$, *$X \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $K_X(\lambda) = K_A(\lambda)$, и $K_X(\mu) = 0$ при всех $\mu \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0, \lambda\}$.*

Доказательство. Если $K_A(\lambda) = 0$, положим $X = 0$. Предположим, что $K_A(\lambda) > 0$. Пусть матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$ такова, что $P^{-1}AP$ – жорданова нормальная форма матрицы A и имеет вид

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

где $\operatorname{Spec} A_1 = \{\lambda\}$, $\lambda \notin \operatorname{Spec} A_2$. Положим $X = P\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$. Тогда $\operatorname{Ind} X = 1$, $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $K_X(\lambda) = K_A(\lambda)$ и $K_X(\mu) = 0$ для всех ненулевых $\mu \neq \lambda$, что и требовалось.

Пусть $X' \in M_n(\overline{\mathbb{F}})$, $X' \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $K_{X'}(\lambda) = K_A(\lambda)$ и $K_{X'}(\mu) = 0$ для всех $\mu \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0, \lambda\}$. Так как для всех $Y \in M_n(\overline{\mathbb{F}})$ имеем $K_Y(\lambda) = \sum\limits_{r \in \mathbb{N}} k_Y(\lambda, r)$ и $k_{X'}(\lambda, r) \leqslant k_A(\lambda, r)$ при $r \in \mathbb{N}$ по лемме 2.9, то $k_{X'}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r) = k_X(\lambda, r)$ для всех $r \in \mathbb{N}$. Тем самым, $k_X(\mu, r) = k_{X'}(\mu, r)$ для всех ненулевых $\mu \in \overline{\mathbb{F}}$ и $r \in \mathbb{N}$. Более того, $k_X(0, r) = 0 = k_{X'}(0, r)$ при всех $r > 1$, откуда $k_X(0, 1) = k_{X'}(0, 1)$. Следовательно, матрицы X и X' подобны, и $X = X'$ по лемме 2.11. □

Известно, что любая матрица $A \in M_n(\overline{\mathbb{F}})$ может быть приведена к нормальной жордановой форме. Заметим, что эта матричная форма определена единственным образом с точностью до перестановки жордановых блоков, и существует много жордановых базисов для данной матрицы. Нашей целью является представление произвольной матрицы в виде суммы некоторых единственным образом определенных матриц $S_A^1(\lambda)$, где $\operatorname{Spec} S_A^1(\lambda) \subseteq \{0, \lambda\}$, $S_A^1(\lambda) \perp S_A^1(\mu)$ при всех $\lambda \neq \mu$. Такое представление матрицы A назовем *спектральным ортогональным матричным разложением*. Рассматриваемые матрицы $S_A^1(\lambda)$ имеют ряд полезных свойств. В частности, для любого $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$ найдется такой многочлен $f_\lambda \in \overline{\mathbb{F}}[t]$, что $S_A^1(\lambda) = f_\lambda(A)$.

Ниже определим отображения $S^i : \overline{\mathbb{F}} \times M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\overline{\mathbb{F}})$, $i = 1, 2, 3$. Для удобства мы будем обозначать $S^i(\lambda, A) = S_A^i(\lambda)$. Пусть матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ фиксирована, тогда рассмотрим S_A^i как отображение $\overline{\mathbb{F}} \to M_n(\overline{\mathbb{F}})$.

Определение 2.15. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$, $A = C_A + N_A$ – нильпотентное разложение матрицы A. Тогда $S_A^1(0) = N_A$, и для всех $\lambda \neq 0$ матрица $S_A^1(\lambda) = X_\lambda$ такова, что $\operatorname{Ind} X_\lambda = 1$, $X_\lambda \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $K_{X_\lambda}(\lambda) = K_A(\lambda)$ и $K_{X_\lambda}(\mu) = 0$ для всех $\mu \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0, \lambda\}$;

$$S_A^2(\lambda) = S_{A+I}^1(\lambda + 1) - S_A^1(\lambda) \quad \text{при всех} \quad \lambda \in \overline{\mathbb{F}};$$

$$S_A^3(\lambda) = S_A^1(\lambda) - \lambda S_A^2(\lambda) \quad \text{при всех} \quad \lambda \in \overline{\mathbb{F}}.$$

Это определение корректно, так как по лемме 2.14 матрица X_λ с вышеперечисленными свойствами существует и единственна для всех $\lambda \neq 0$.

Замечание 2.16. Из определения 2.15 следует, что

$$S^i_{P^{-1}AP}(\lambda) = P^{-1} S^i_A(\lambda) P$$

при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$, $A \in M_n(\mathbb{F})$, $P \in GL_n(\mathbb{F})$ и $i = 1, 2, 3$. Следовательно, матрицы $S^i_A(\lambda)$ определяют не только разложение матрицы A, но также разложение соответствующего линейного оператора на $\mathbb{F}^n$.

Теорема 2.17. *Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$.*

1. *Если $\lambda \notin \operatorname{Spec} A \subseteq \overline{\mathbb{F}}$, то $S^i_A(\lambda) = 0$ при $i = 1, 2, 3$.*
2. $\operatorname{rk}(S^2_A(\lambda)) = \deg_{\chi_A}(z - \lambda)$ *является кратностью корня λ в характеристическом многочлене χ_A.*
3. *$S^i_A(\lambda) \perp S^j_A(\mu)$ для всех $\lambda \neq \mu$, $i, j = 1, 2, 3$.*
4. *$S^i_A(\lambda) S^2_A(\lambda) = S^2_A(\lambda) S^i_A(\lambda) = S^i_A(\lambda)$ для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$, $i = 1, 2, 3$.*
5. *Матрица $S^2_A(\lambda)$ идемпотентна при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$.*
6. *Матрица $S^3_A(\lambda)$ нильпотентна при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$.*
7. $A = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S^1_A(\lambda) = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} (\lambda S^2_A(\lambda) + S^3_A(\lambda))$, $I = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S^2_A(\lambda)$.

Доказательство. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ различные собственные значения матрицы A и через $r_1, \ldots, r_p$ – кратности этих собственных значений.

Пусть $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$ такова, что $P^{-1}AP$ – жорданова нормальная форма матрицы A, тогда

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix} P^{-1},$$

где $A_s \in M_{r_s}(\overline{\mathbb{F}})$, $\operatorname{Spec} A_s = \{\lambda_s\}$ при $s = 1, \ldots, p$. Обозначим

$$X_s = P \begin{pmatrix} \delta_{s1} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_{sp} A_p \end{pmatrix} P^{-1},$$

где $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{если } s = t, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$ Тогда $S^1_A(\lambda) = \begin{cases} X_s, & \text{если } \lambda = \lambda_s, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$ так как $S^1_A(0) = N_A$, и все необходимые условия для матрицы $S^1_A(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$

выполнены. Положим

$$D_s = P \begin{pmatrix} \delta_{s1} I_{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_{sp} I_{r_p} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Легко видеть, что $S^1_{A+I}(\lambda+1) = \begin{cases} X_s + D_s, & \text{если } \lambda = \lambda_s, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

Следовательно, $S^2_A(\lambda) = \begin{cases} D_s, & \text{если } \lambda = \lambda_s, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

1. Если $\lambda \notin \operatorname{Spec} A$, то $S^1_A(\lambda) = 0$ и $S^2_A(\lambda) = 0$, откуда $S^3_A(\lambda) = 0$.

2. Заметим, что $\operatorname{rk} D_s = \operatorname{rk} I_{r_s} = r_s$ и $\operatorname{rk} S^2_A(\lambda) = \begin{cases} r_s, & \text{если } \lambda = \lambda_s, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

3. Перемножением блочных матриц проверяем, что $S^i_A(\lambda) \perp S^j_A(\mu)$ для всех $\lambda \neq \mu$, $i, j = 1, 2, 3$.

4. Аналогично, $S^i_A(\lambda) S^2_A(\lambda) = S^2_A(\lambda) S^i_A(\lambda) = S^i_A(\lambda)$ для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$ и $i = 1, 2, 3$.

5. Из пункта 4 следует, что матрица $S^2_A(\lambda)$ идемпотентна.

6. Непосредственной проверкой доказывается, что $\operatorname{Spec} S^3_A(\lambda)=\{0\}$, таким образом, матрица $S^3_A(\lambda)$ нильпотентна.

7. Наконец, $\sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S^1_A(\lambda) = \sum\limits_{s=1}^{p} X_s = A$ и $\sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S^2_A(\lambda) = \sum\limits_{s=1}^{p} D_s = I$. □

Определение 2.18. Будем называть разложения вида $A = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S^1_A(\lambda) = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} (\lambda S^2_A(\lambda) + S^3_A(\lambda))$ *спектральными ортогональными матричными разложениями*.

Это определение корректно по теореме 2.17.

Ниже спектральные ортогональные разложения будут использованы для вычисления многочленов от матриц.

Теорема 2.19. *Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$.*

1. *Для любого многочлена $f \in \overline{\mathbb{F}}[t]$ имеем*

$$f(A) = \sum_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} \left(f(\lambda) S^2_A(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!} S^3_A(\lambda) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} (S^3_A(\lambda))^{n-1} \right).$$

2. $\overline{\mathbb{F}}[A] = \{f(A)\}_{f\in\overline{\mathbb{F}}[t]} = \langle\{S_A^2(\lambda), S_A^3(\lambda), \ldots, (S_A^3(\lambda))^{n-1}\}_{\lambda\in\overline{\mathbb{F}}}\rangle$, *и ненулевые матрицы системы* $\{S_A^2(\lambda), S_A^3(\lambda), \ldots, (S_A^3(\lambda))^{n-1}\}_{\lambda\in\overline{\mathbb{F}}}$ *линейно независимы.*

3. *Если* $\lambda \in \mathbb{F}$, *то* $S_A^i(\lambda) \in M_n(\mathbb{F})$, $i = 1, 2, 3$.

Доказательство. 1. С учетом линейности достаточно доказать утверждение для $f(t) = t^d$, где $d \geqslant 0$.

Если $d = 0$, то $f(A) = I = \sum\limits_{\lambda\in\overline{\mathbb{F}}} S_A^2(\lambda)$ по пукту 7 теоремы 2.17. Если же $d \geqslant 1$, то $f(A) = A^d = (\sum\limits_{\lambda\in\overline{\mathbb{F}}} S_A^1(\lambda))^d = \sum\limits_{\lambda\in\overline{\mathbb{F}}} (S_A^1(\lambda))^d$, так как матрицы $S_A^1(\lambda)$ и $S_A^1(\mu)$ ортогональны при $\lambda \neq \mu$. Итак,

$$(S_A^1(\lambda))^d = (\lambda S_A^2(\lambda) + S_A^3(\lambda))^d$$

$$= \lambda^d S_A^2(\lambda) + d\lambda^{d-1} S_A^3(\lambda) + \frac{d(d-1)}{2}\lambda^{d-2}(S_A^3(\lambda))^2 + \cdots + (S_A^3(\lambda))^d$$

$$= f(\lambda) S_A^2(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!} S_A^3(\lambda) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}(S_A^3(\lambda))^{n-1},$$

так как $(S_A^3(\lambda))^d = 0$ при всех $d \geqslant n$, и утверждение доказано.

2. Положим $\mathcal{A} = \langle\{S_A^2(\lambda), S_A^3(\lambda), \ldots, (S_A^3(\lambda))^{n-1}\}_{\lambda\in\overline{\mathbb{F}}}\rangle$. Тогда $\overline{\mathbb{F}}[A] \subseteq \mathcal{A}$ по пункту 1. Докажем, что $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathbb{F}}[A]$.

Фиксируем $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$ и построим такой многочлен $f_0 \in \overline{\mathbb{F}}[t]$, что $f_0(A) = S_A^2(\lambda)$. Если $\lambda \notin \operatorname{Spec} A$, то $S_A^2(\lambda) = 0$ и $f_0(t) \equiv 0$. Если же $\lambda \in \operatorname{Spec} A$, то $\lambda = \lambda_q$ для некоторого $q = 1, \ldots, p$. Обозначим через $g(t)$ характеристический многочлен матрицы A, $h_0(t) = \frac{g(t)}{(t-\lambda_q)^{r_q}} \in \overline{\mathbb{F}}[t]$, $h_0(\lambda_q) \neq 0$. Положим $h(t) = (h_0(\lambda_q))^{-1} h_0(t)$. Тогда $h(\lambda_q) = 1$, $h^{(j)}(\lambda_s) = 0$ при всех $s \neq q$, $j = 0, 1, \ldots, r_s - 1$. По пункту 1 имеем $h(A) = S_A^2(\lambda) + N$, где

$$N = \frac{h'(\lambda)}{1!} S_A^3(\lambda) + \cdots + \frac{h^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}(S_A^3(\lambda))^{n-1}.$$

Нетрудно видеть, что $S_A^2(\lambda)N = NS_A^2(\lambda) = N$ и матрица N нильпотента. Тем самым, $(I - h(A))^n = I - S_A^2(\lambda)$. Тогда если $f_0(t) = 1 - (1 - h(t))^n \in \overline{\mathbb{F}}[t]$, то $f_0(A) = S_A^2(\lambda)$.

Следовательно, $S_A^2(\lambda) = f_0(A) \in \overline{\mathbb{F}}[A]$, $S_A^3(\lambda) = (A - \lambda I) f_0(A) \in \overline{\mathbb{F}}[A]$, откуда $(S_A^3(\lambda))^j \in \overline{\mathbb{F}}[A]$ при $j = 1, \ldots, n - 1$.

Предположим, что скаляры $\alpha_s^{(j)} \in \overline{\mathbb{F}}$ при $s = 1, \ldots, p$, $j = 0, \ldots, n-1$ таковы, что $\alpha_s^{(j)} = 0$, если $(S_A^3(\lambda_s))^j = 0$ и

$$\sum_{s=1}^{p} \Big(\alpha_s^{(0)} S_A^2(\lambda_s) + \alpha_s^{(1)} S_A^3(\lambda_s) + \ldots + \alpha_s^{(n-1)} (S_A^3(\lambda_s))^{n-1} \Big) = 0.$$

Умножая на $S_A^2(\lambda_s)$, имеем

$$\alpha_s^{(0)} S_A^2(\lambda_s) + \alpha_s^{(1)} S_A^3(\lambda_s) + \cdots + \alpha_s^{(n-1)} (S_A^3(\lambda_s))^{n-1} = 0$$

при всех $s = 1, \ldots, p$. Предположим, что эта линейная комбинация нетривиальна. Если $S_A^3(\lambda_s) = 0$, то $\alpha_s^{(j)} = 0$ при $j > 0$ и $\alpha_s^{(0)} S_A^2(\lambda_s) = 0$, откуда $\alpha_s^{(0)} = 0$. Итак, $S_A^3(\lambda_s) \neq 0$. Положим

$$j_1 = \min\{j = 0, 1, \ldots, n-1 \mid \alpha_s^{(j)} \neq 0\},$$

$$j_2 = \max\{j = 1, \ldots, n-1 \mid (S_A^3(\lambda_s))^j \neq 0\}.$$

Тогда $j_1 \leqslant j_2$. Умножая линейную комбинацию на $(S_A^3(\lambda_s))^{j_2 - j_1}$, имеем $\alpha_s^{(j_1)} (S_A^3(\lambda_s))^{j_2} = 0$, что невозможно. Тем самым, ненулевые матрицы системы $\{S_A^2(\lambda), S_A^3(\lambda), \ldots, (S_A^3(\lambda))^{n-1}\}_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}}$ линейно независимы.

3. По построению полинома $f_0(t)$ имеем $f_0(t) \in \mathbb{F}[t]$. Таким образом, $S_A^2(\lambda) = f_0(A) \in M_n(\mathbb{F})$. Следовательно, $S_A^1(\lambda), S_A^3(\lambda) \in M_n(\mathbb{F})$. □

В следующей теореме изучается взаимосвязь между спектральными ортогональными матричными разложениями и ортогональностью матриц, а также $\overset{\sharp}{<}$-порядком.

Теорема 2.20. *Пусть* $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. *Если* A *коммутирует с некоторой* $B \in M_n(\mathbb{F})$, *то* $S_A^i(\lambda)$ *коммутируют с* B *при всех* $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$ *и* $i = 1, 2, 3$.

2. *Если* $\operatorname{Ind} A = 1$ *и* A *ортогональна некоторой матрице* $B \in M_n(\mathbb{F})$, *то*

a) *все матрицы* $S_A^i(\lambda)$ *ортогональны* B,

b) $S_{A+B}^i(\lambda) = S_A^i(\lambda) + S_B^i(\lambda)$ *при* $\lambda \neq 0$ *и* $i = 1, 2, 3$,

c) $S_A^i(\lambda) \perp S_B^j(\mu)$ *при всех* $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$, $i, j = 1, 2, 3$.

3. *Если* $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$ *для некоторой* $C \in M_n(\mathbb{F})$, *то при всех* $\Lambda \subseteq \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$ *имеем* $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S_A^i(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S_C^i(\lambda)$, $i = 1, 2$. *В частности,* $S_A^i(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} S_C^i(\lambda)$ *при* $\lambda \neq 0$ *и* $i = 1, 2$.

Доказательство. 1. Так как матрицы A и B коммутируют, то все матрицы из множества $\overline{\mathbb{F}}[A]$ коммутируют с B. По теореме 2.19(2) имеем $S_A^i(\lambda) \in \overline{\mathbb{F}}[A]$ при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$, $i = 1, 2, 3$.

2. По условию, $\operatorname{Ind} A = 1$, $A \perp B$. По утверждению 2.3 найдется такая обратимая матрица $Q \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$, что $A = Q \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$, $B = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} Q^{-1}$ для некоторых $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$ и $B_1 \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Нетрудно видеть, что

$$S_A^i(\lambda) = Q \begin{pmatrix} S_{A_1}^i(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad S_B^j(\mu) = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{B_1}^j(\mu) \end{pmatrix} Q^{-1}$$

при всех ненулевых $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{F}}$ и $i, j = 1, 2, 3$. Следовательно, $S_A^i(\lambda) \perp B$, $S_A^i(\lambda) \perp S_B^j(\mu)$ при $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$, $i, j = 1, 2, 3$. Более того,

$$S_{A+B}^i(\lambda) = Q \begin{pmatrix} S_{A_1}^i(\lambda) & 0 \\ 0 & S_{B_1}^i(\lambda) \end{pmatrix} Q^{-1}$$

и $S_{A+B}^i(\lambda) = S_A^i(\lambda) + S_B^i(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$, $i = 1, 2, 3$.

3. Если $A = C$, то доказывать нечего. Пусть $A \neq C$, $\operatorname{Ind} A = 1$. Так как $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$, то $A \perp (C - A)$ по лемме 2.5. Положим $B = C - A$. Тогда $S_A^i(\lambda) \perp S_B^i(\mu)$ при всех $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$, $i = 1, 2$ по пункту 2. Следовательно, $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S_A^i(\lambda) \perp \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S_B^i(\lambda)$. Однако $S_C^i(\lambda) = S_A^i(\lambda) + S_B^i(\lambda)$ при всех $\lambda \neq 0$, откуда $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S_A^i(\lambda) \perp \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} (S_C^i(\lambda) - S_A^i(\lambda))$. Более того, $\operatorname{Ind}\left(\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S_A^i(\lambda)\right) = 1$ по лемме 2.4, и $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S_A^i(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S_C^i(\lambda)$ по лемме 2.5. □

Следствие 2.21. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле,* $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$, $\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind} B = 1$, $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$, $B \overset{\sharp}{\leqslant} C$ *и* $\operatorname{Spec} A \cap \operatorname{Spec} B \subseteq \{0\}$. *Тогда* $A \perp B$.

Доказательство. Если $\lambda \notin \operatorname{Spec} A$, то $S_A^1(\lambda) = 0$ по пункту 1 теоремы 2.17. Более того, $\operatorname{Ind} A = 1$ и $S_A^1(0) = N_A = 0$. Обозначим $\Lambda_A = \operatorname{Spec} A \setminus \{0\}$, $\Lambda_B = \operatorname{Spec} B \setminus \{0\}$. Имеем $S_A^1(\lambda) = 0$ при $\lambda \notin \Lambda_A$. Однако $A = \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{F}} S_A^1(\lambda)$ по пункту 7 теоремы 2.17 и $A = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda_A} S_A^1(\lambda)$.

Аналогично, $B = \sum_{\lambda\in\Lambda_B} S^1_B(\lambda)$. Так как $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$ и $B \overset{\sharp}{\leqslant} C$, то

$$A = \sum_{\lambda\in\Lambda_A} S^1_A(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} \sum_{\lambda\in\Lambda_A} S^1_C(\lambda), \quad B = \sum_{\lambda\in\Lambda_B} S^1_B(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} \sum_{\lambda\in\Lambda_B} S^1_C(\lambda)$$

по пункту 3 теоремы 2.20. Заметим, что $\Lambda_A \cap \Lambda_B = \varnothing$ и $S^1_C(\lambda) \perp S^1_C(\mu)$ при всех $\lambda \neq \mu$. Тем самым, $\sum_{\lambda\in\Lambda_A} S^1_C(\lambda) \perp \sum_{\lambda\in\Lambda_B} S^1_C(\lambda)$. Следовательно, $A \perp \sum_{\lambda\in\Lambda_B} S^1_C(\lambda)$ по лемме 2.5, и $A \perp B$ по той же лемме. □

Лемма 2.22. *Пусть* $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$, $\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind} B = 1$, $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$, $B \overset{\sharp}{\leqslant} C$ *и* $A \perp B$. *Тогда* $A + B \overset{\sharp}{\leqslant} C$.

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{Ind}(A+B) = \operatorname{Ind} B = 1$ по лемме 2.4. Обозначим $F = C - (A + B)$. Так как $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$, то $A \perp (C - A)$ по лемме 2.5. Кроме того, $A \perp B$, откуда следует, что матрицы A и $F = (C - A) - B$ ортогональны. Аналогично, так как $B \perp (C - B)$ и $B \perp A$, то $B \perp F = (C - B) - A$. Следовательно, $(A + B) \perp F$, и по лемме 2.5 имеем $A + B \overset{\sharp}{\leqslant} C$. □

§3. Свойства матричных цепей

Напомним, что через $\mathrm{I}^1_n(\mathbb{F})$ мы обозначаем подмножество $M_n(\mathbb{F})$ матриц индекса 1.

Определение 3.1. Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$. Семейство матриц $A_1, A_2, ..., A_m$ назовем *левой цепью* для матрицы A относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, если

$$A_1 \overset{\sharp}{<} A_2 \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} A_m \overset{\sharp}{<} A.$$

Аналогично, $A_1, A_2, \ldots, A_l$ назовем *правой цепью*, если

$$A \overset{\sharp}{<} A_1 \overset{\sharp}{<} A_2 \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} A_l.$$

Значения m и l будем называть *длинами* цепей.

Определение 3.2. Максимально возможное значение длины левой (соотв. правой) цепи для матрицы A над полем $\mathbb{F}$ относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка назовем *левой* (соотв. *правой*) *длиной* матрицы A и обозначим $L_{\mathbb{F}}(A)$ (соотв. $R_{\mathbb{F}}(A)$). Если левых (соотв. правых) цепей для A

относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка нет, то соответствующее значение полагаем равным нулю.

Замечание 3.3. Пример 3.4 показывает, что левая длина матрицы зависит от основного поля, однако в лемме 3.6 будет доказано, что правая длина не зависит от поля.

Пример 3.4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Тогда ненулевые матрицы, которые строго меньше A относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, – это $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$ и $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \setminus M_2(\mathbb{R})$, и только они. Тем самым, $L_{\mathbb{C}}(A) = 2$, но $L_{\mathbb{R}}(A) = 1$.

Замечание 3.5. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, биективное отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Тогда из $A_1 \overset{\sharp}{<} A_2 \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} A_k \overset{\sharp}{<} A$ следует, что $T(A_1) \overset{\sharp}{<} T(A_2) \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} T(A_k) \overset{\sharp}{<} T(A)$, и $L_{\mathbb{F}}(T(A)) \geqslant L_{\mathbb{F}}(A)$ при всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Аналогично, $R_{\mathbb{F}}(T(A)) \geqslant R_{\mathbb{F}}(A)$ при всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Более того, если биективное отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, то $L_{\mathbb{F}}(T(A)) = L_{\mathbb{F}}(A)$ и $R_{\mathbb{F}}(T(A)) = R_{\mathbb{F}}(A)$ при всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$.

Лемма 3.6. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Тогда*

1. $L_{\overline{\mathbb{F}}}(A) = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}, \lambda \neq 0} K_A(\lambda)$ *для всех* $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$;
2. $R_{\mathbb{F}}(A) = n - \operatorname{rk} A$ *для всех* $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Тогда найдется такая обратимая матрица $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$, что $P^{-1}AP$ — жорданова нормальная форма матрицы A, и $A = P\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$, где $C_1 = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix} \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$, $k = \operatorname{rk} A$. Так как $\operatorname{Ind} A = 1$, то у A нет ненулевых нильпотентных жордановых блоков.

1.a) Положим $L_A^0 = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}, \lambda \neq 0} K_A(\lambda) = p$ и покажем, что $L_{\overline{\mathbb{F}}}(A) \geqslant L_A^0$.

Для всех $s = 1, \ldots, p$ через $\widetilde{A}_s$ обозначим блочно-диагональную матрицу из $M_n(\mathbb{F})$ с блоками $J_1, \ldots, J_s$ на диагонали и нулевым блоком подходящего размера. Обозначим также $A_s = P\widetilde{A}_s P^{-1}$ для $s = 1, \ldots, p$. Тогда $0 \overset{\sharp}{<} A_1 \overset{\sharp}{<} A_2 \overset{\sharp}{<} \ldots \overset{\sharp}{<} A_{p-1} \overset{\sharp}{<} A_p = A$ и $L_{\overline{\mathbb{F}}}(A) \geqslant p = L_A^0$.

1.б) Покажем, что $L_{\overline{\mathbb{F}}}(A) \leqslant L_A^0$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – такое семейство матриц, что $A_1 \overset{\sharp}{<} A_2 \cdots \overset{\sharp}{<} A_m \overset{\sharp}{<} A$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что из условия $X \overset{\sharp}{<} Y$ для некоторых матриц X и Y индекса 1 следует неравенство $L_X^0 < L_Y^0$. В самом деле, $k_X(\lambda, r) \leqslant k_Y(\lambda, r)$ для всех $\lambda \neq 0$ и $r \in \mathbb{N}$ по лемме 2.9. Имеем

$$L_X^0 = \sum_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}, \lambda \neq 0} K_X(\lambda) \sum_{\substack{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}, \lambda \neq 0 \\ r \in \mathbb{N}}} k_X(\lambda, r) \leqslant \sum_{\substack{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}, \lambda \neq 0 \\ r \in \mathbb{N}}} k_Y(\lambda, r) = L_Y^0,$$

причем равенство возможно только в случае $X = Y$. Следовательно,

$$L_A^0 \geqslant L_{A_m}^0 + 1 \geqslant \cdots \geqslant L_{A_1}^0 + m \geqslant m \quad \text{и} \quad L_{\overline{\mathbb{F}}}(A) \leqslant L_A^0.$$

2.а) Покажем, что $R_{\mathbb{F}}(A) \geqslant n - \operatorname{rk} A$.

По теореоме о рациональной канонической форме, см. [11, стр.144], [16, теорема 11.20], так как у A нет ненулевых нильпотентных блоков, то найдется такая матрица $P_1 \in GL_n(\mathbb{F})$, что $A = P_1 \begin{pmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1}$ для некоторой $C_2 \in GL_k(\mathbb{F})$. Для любого $s = 1, 2, \ldots, n-k$ положим $\widetilde{B}_s = \sum\limits_{i=k+1}^{k+s} E_{ii} \in M_n(\mathbb{F})$, $B_s = P_1 \widetilde{B}_s P_1^{-1}$. Тогда

$$A \overset{\sharp}{<} A + B_1 \overset{\sharp}{<} A + B_2 \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} A + B_{n-k},$$

т.е. $R_{\mathbb{F}}(A) \geqslant n - k = n - \operatorname{rk} A$.

2.б) Покажем, что $R_{\mathbb{F}}(A) \leqslant n - \operatorname{rk} A$ для всех матриц $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – некоторое семейство матриц, $A \overset{\sharp}{<} A_1 \overset{\sharp}{<} A_2 \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} A_m$. Тогда

$$\operatorname{rk} A_m \geqslant \operatorname{rk} A_{m-1} + 1 \geqslant \cdots \geqslant \operatorname{rk} A_1 + (m-1) \geqslant \operatorname{rk} A + m,$$

откуда $m \leqslant \operatorname{rk} A_m - \operatorname{rk} A \leqslant n - \operatorname{rk} A$ и $R_{\mathbb{F}}(A) \leqslant n - \operatorname{rk} A$. □

Замечание 3.7. Далее вместо $R_{\mathbb{F}}(A)$ будет использоваться обозначение $R(A)$, так как эта величина не зависит от поля.

§4. Примеры монотонных отображений

В дальнейшем будет использоваться понятие 0-аддитивных отображений, введенное в определении 1.10. Напомним, что 0-аддитивность отображения T означает, что T сохраняет ортогональность матриц и аддитивно на ортогональных парах матриц.

Лемма 4.1. *Пусть отображение* $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ *является 0-аддитивным. Тогда* T *монотонно относительно* $\overset{\sharp}{\leqslant}$*-порядка.*

Доказательство. Пусть $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$ для некоторых матриц $A, C \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Тогда $A \perp (C - A)$ по лемме 2.5. Так как отображение T является 0-аддитивным, то $T(A) \perp T(C - A)$ и $T(C) = T(A) + T(C - A)$. Следовательно, $T(A) \overset{\sharp}{\leqslant} T(C)$ по лемме 2.5. Тем самым, T монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка. □

Следующий результат был получен вторым автором для линейных отображений в работе [7].

Теорема 4.2 ([7, теорема 3.1])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле,* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$*, и пусть линейное отображение* $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ *монотонно относительно* $\overset{\sharp}{\leqslant}$*-порядка. Тогда существуют такие* $\alpha \in \mathbb{F}$ *и обратимая матрица* $P \in GL_n(\mathbb{F})$*, что* $T(X) = \alpha P^{-1}XP$ *для всех* $X \in M_n(\mathbb{F})$ *или* $T(X) = \alpha P^{-1}X^tP$ *для всех* $X \in M_n(\mathbb{F})$*.*

В частном случае линейных отображений всегда выполнено условие $T(\lambda I) = \alpha\lambda I$ для $\lambda \in \mathbb{F}$. Однако для произвольной биекции $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, удовлетворяющей условию $\sigma(0) = 0$, существует такое нелинейное биективное строго монотонное отображение T_σ, что $T_\sigma(\lambda I) = \sigma(\lambda)I$ при $\lambda \in \mathbb{F}$. В следующей лемме мы даем конкретный пример “дикого” отображения, основанный на спектральном ортогональном матричном разложении.

Лемма 4.3. *Пусть* $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$*,* $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ *– биекция,* $\sigma(0) = 0$*. Определим отображение* $T_\sigma\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ *по следующему правилу:*

$$T_\sigma(A) = \sum_{\lambda \neq 0} (\sigma(\lambda) S_A^2(\lambda) + S_A^3(\lambda))$$

для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. *Тогда* T_σ *биективно, нелинейно и строго монотонно относительно* $\overset{\sharp}{<}$*-порядка. Кроме того,* $T_\sigma(\lambda I) = \sigma(\lambda) I$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{F}$.

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$, $A \perp B$. По теореме 2.20(2) имеем $S_A^i(\lambda) \perp S_B^j(\mu)$, $S_{A+B}^i(\lambda) = S_A^i(\lambda) + S_B^i(\lambda)$ для всех $\lambda, \mu \neq 0$, $i, j = 1, 2, 3$. Тогда $T_\sigma(A) \perp T_\sigma(B)$, $T_\sigma(A + B) = T_\sigma(A) + T_\sigma(B)$, и отображение T_σ является 0-аддитивным и монотонным относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка по лемме 4.1. Из теорем 2.17, 2.19, 2.20 получаем

$$S^1_{T_\sigma(A)}(\sigma(\lambda)) = \sigma(\lambda) S_A^2(\lambda) + S_A^3(\lambda), \quad S^i_{T_\sigma(A)}(\sigma(\lambda)) = S_A^i(\lambda)$$

для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$, $\lambda \neq 0$, $i = 2, 3$. Более того, для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ имеем $S^1_{T_\sigma(A)}(0) = 0$ и $T_\sigma(A) \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$, $T_\sigma(\lambda I) = \sigma(\lambda) I$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$.

Пусть $\sigma' : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ – некоторая биекция, $\sigma'(0) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} T_\sigma(T_{\sigma'}(A)) &= \sum_{\mu \neq 0} (\sigma(\mu) S^2_{T'_\sigma(A)}(\mu) + S^3_{T'_\sigma(A)}(\mu)) \\ &= \sum_{\lambda \neq 0} \Big[\sigma(\sigma'(\lambda)) S^2_{T'_\sigma(A)}(\sigma'(\lambda)) + S^3_{T'_\sigma(A)}(\sigma'(\lambda))\Big] \\ &= \sum_{\lambda \neq 0} ((\sigma \circ \sigma')(\lambda) S_A^2(\lambda) + S_A^3(\lambda)) = T_{\sigma \circ \sigma'}(A) \end{aligned}$$

для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Тем самым, $T_\sigma \circ T_{\sigma'} = T_{\sigma \circ \sigma'}$. Если $\mathrm{id} \colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ – тождественное отображение, то $T_{\mathrm{id}}(A) = A$ для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Следовательно, $(T_\sigma)^{-1} = T_{\sigma^{-1}}$ и T_σ биективно. Таким образом, $T_{\sigma^{-1}}$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка и T_σ строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка.

Непосредственно проверяется, что отображение T_σ не является линейным. □

Замечание 4.4. Из приведенного выше доказательства следует, что рассмотрев неинъективное или несюръективное отображение σ, получим отображение T_σ, которое также будет соответственно неинъективным или несюръективным и монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка.

Определение 4.5. Пусть $M_0 = \{A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \mid \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{F}} K_A(\lambda) = 1\}$ – подмножество $M_n(\mathbb{F})$, состоящее из матриц, имеющих единственный жорданов блок порядка n с ненулевым собственным числом.

Приведем другой пример строго монотонного биективного отображения, не имеющего хорошей структуры на множестве $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$.

Лемма 4.6. *Пусть* $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$, *отображение* $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ *биективно,* $T(M_0) = M_0$, $T(X) = X$ *для всех* $X \notin M_0$. *Тогда* T *строго монотонно относительно* $\overset{\sharp}{<}$*-порядка.*

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$, $A \perp B$. Покажем, что $T(A) \perp T(B)$, $T(A+B) = T(A) + T(B)$. Если $A = 0$ или $B = 0$, то утверждение верно. Предположим, что $A \neq 0$, $B \neq 0$. Тогда из $A \perp B$ следует, что $0 < \operatorname{rk} A < n$, $0 < \operatorname{rk} B < n$. Тем самым, $A \notin M_0$ и $B \notin M_0$. Следовательно, $T(A) = A$ и $T(B) = B$. Проверим, что $T(A+B) = A+B$. По лемме 2.8 имеем $\sum\limits_{\lambda \neq 0} K_{A+B}(\lambda) = \sum\limits_{\lambda \neq 0} K_A(\lambda) + \sum\limits_{\lambda \neq 0} K_B(\lambda) \geqslant 2$, откуда $A + B \notin M_0$. Тогда $T(A) = A \perp B = T(B)$, $T(A+B) = T(A) + T(B)$, и отображение T является 0-аддитивным. По лемме 4.1 отображение T монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка, откуда, в силу биективности, T монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка.

Заметим, что обратное отображение T^{-1} существует и удовлетворяет условиям $T^{-1}(M_0) = M_0$, $T^{-1}(X) = X$ при всех $X \notin M_0$. Следовательно, T^{-1} монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка по доказанному, и T строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка.

Непосредственно проверяется, что отображение T_σ не является линейным. □

Ниже приведен конкретный пример отображения, удовлетворяющего условиям леммы 4.6.

Пример 4.7. Пусть отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ определено по правилу

$$T(X) = \begin{cases} X, & X \notin M_0, \\ -X, & X \in M_0. \end{cases}$$

Тогда T биективно, не является линейным, однако T строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка.

§5. Характеризация

Теперь мы готовы перейти к доказательству одного из основных результатов данной работы. Наша задача состоит в том, чтобы определить структуру монотонных отображений на дополнении к множеству M_0 в $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Напомним, что M_0 является множеством матриц, состоящих из одного жорданового блока. Наше доказательство основано на технике спектрально-ортогональных матричных разложений, развитой в параграфе 2.

Теорема 5.1. *Пусть $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ и отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ является биективным и строго-монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка при дополнительном ограничении $T(\lambda I) = \lambda I$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогда для произвольной матрицы $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$ существует матрица $P_A \in GL_n(\mathbb{F})$ такая, что $T(A) = P_A^{-1} A P_A$.*

Доказательство. 1. В силу замечания 3.5 $R(T(A)) = R(A)$ для всех матриц $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Кроме того, $R(A) = n - \operatorname{rk} A$, $R(T(A)) = n - \operatorname{rk} T(A)$ по лемме 3.6. Следовательно, $\operatorname{rk} T(A) = \operatorname{rk} A$ для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Таким образом, отображение T сохраняет ранг.

2. Обозначим $M_1 = \{A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \mid K_A(\lambda) \leqslant 1 \text{ если } \lambda \neq 0\}$. Покажем, что $T(M_1) = M_1$. С этой целью рассмотрим $A \in M_1$. По лемме 2.12 число матриц X, удовлетворяющих условию $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$, конечно. Так как отображение T является биективным и строго-монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, получаем, что число матриц Y, удовлетворяющих условию $Y \overset{\sharp}{\leqslant} T(A)$, также является конечным. По лемме 2.12 $T(A) \in M_1$. Следовательно, $T(M_1) \subseteq M_1$.

Так как отображение T^{-1} также является биективным и строго-монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, то $T(M_1) = M_1$.

3. Зафиксируем $\lambda \neq 0$ и рассмотрим множество матриц $M_{2,\lambda} = \{A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0 \mid L_A = K_A(\lambda) = 1\}$. Покажем, что $T(M_{2,\lambda}) \subseteq M_{2,\lambda}$.

Пусть $A \in M_{2,\lambda}$ и $P \in GL_n(\mathbb{F})$ – такая матрица, что $P^{-1}AP$ имеет жорданову форму вида $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $A_1 \in GL_k(\mathbb{F})$, $k < n$, $m = n - k$. Обозначим $B_1 = \lambda E_{11} \in M_m(\mathbb{F})$, $B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} P^{-1}$,

$C = A + B$. Тогда $A \perp B$, $\operatorname{Ind} B = 1$. Следовательно, $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$ и $B \overset{\sharp}{\leqslant} C$ по лемме 2.5. Таким образом, $A' = T(A) \overset{\sharp}{\leqslant} T(C) = C'$, $B' = T(B) \overset{\sharp}{\leqslant} C'$. Заметим, что $C \notin M_1$, $L_A = L_B = 1$, $L_C = 2$ по лемме 3.6. Следовательно, $C' \notin M_1$, $L_{C'} = 2$ и существует такое $\lambda' \neq 0$, что $K_{C'}(\lambda') = 2$.

Так как $B \overset{\sharp}{\leqslant} \lambda I$, то $B' \overset{\sharp}{\leqslant} T(\lambda I) = \lambda I$. По лемме 2.9 получаем, что $K_{B'}(\mu) = 0$ для всех $\mu \in \mathbb{F} \setminus \{0, \lambda\}$. Однако $\operatorname{rk} B' = \operatorname{rk} B = 1$ и $K_{B'}(\lambda) = 1$. Более того, $K_{C'}(\lambda) \geqslant K_{B'}(\lambda)$. Тогда $\lambda = \lambda'$. Следовательно, $K_{A'}(\mu) = 0$ для всех $\mu \in \mathbb{F} \setminus \{0, \lambda\}$, $L_{A'} = L_A = 1$. Таким образом, $K_{A'}(\lambda) = 1$ и $A' \in M_{2,\lambda}$.

4. Зафиксируем $\lambda \neq 0$ и рассмотрим множество матриц $M_{3,\lambda} = \{A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0 \mid L_A = K_A(\lambda)\}$. Покажем, что $T(M_{3,\lambda}) \subseteq M_{3,\lambda}$.

Пусть $A \in M_{3,\lambda}$, $A' = T(A)$. Если $L_A = 1$, то $T(A) \in M_{3,\lambda}$ по пункту 3. Предположим, что $L_A \geqslant 2$ и рассмотрим $B \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ такую, что $B \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $L_B = 1$. Тогда $B \in M_{2,\lambda}$ и $B' = T(B) \in M_{2,\lambda}$ по пункту 3. Более того, $B' \overset{\sharp}{\leqslant} A'$, и по лемме 2.9 получаем, что $K_{A'}(\lambda) \geqslant K_{B'}(\lambda) = L_{B'} = 1$.

Предположим, что существует $\mu' \in \mathbb{F} \setminus \{0, \lambda\}$ такое, что $K_{A'}(\mu') \geqslant 1$. Рассмотрим $X' \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$, для которого $K_{X'}(\lambda) = K_{X'}(\mu') = 1$, $L_{X'} = 2$, $X' \overset{\sharp}{\leqslant} A'$. Положим $X = T^{-1}(X')$, тогда $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $X \in M_1$ в силу пункта 2. Таким образом, существует $\mu \in \mathbb{F} \setminus \{0, \lambda\}$ такое, что $K_A(\mu) \geqslant K_X(\mu) \geqslant 1$. Полученное противоречие позволяет заключить, что $A' \in M_{3,\lambda}$.

5. Покажем при помощи метода математической индукции, что число и размер жордановых блоков сохраняются под действием T на множестве $M_{3,\lambda}$ для всех $\lambda \neq 0$. Пусть $A \in M_{3,\lambda}$, $A' = T(A)$. В случае $A = 0$ получаем $T(A) = 0$, что доказывает требуемый результат. Предположим, что $A \neq 0$ и продолжим доказательство при помощи индукции по L_A.

База индукции. Случай $L_A = 1$. Результат справедлив в силу сохранения ранга и пункта 3.

Шаг индукции. Пусть для всех матриц X, удовлетворяющих $L_X < L_A$, утверждение верно. Возможны два случая:

а) Существуют различные r_1, r_2, такие, что $k_A(\lambda, r_1) \geqslant 1$, $k_A(\lambda, r_2) \geqslant 1$. Рассмотрим некоторую матрицу X_1 такую, что $k_{X_1}(\lambda, r_1) = 0$,

$k_{X_1}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r)$, если $r \neq r_1$, $X_1 \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $X_1' = T(X_1)$. По предположению индукции и лемме 2.9 получаем:

$$k_{A'}(\lambda, r) \geqslant k_{X_1'}(\lambda, r) = k_{X_1}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r),$$

если $r \neq r_1$. Аналогично для матрицы X_2, $X_2 \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $k_{X_2}(\lambda, r_1) = k_A(\lambda, r_1)$, $k_{X_2}(\lambda, r) = 0$, если $r \neq r_1$, тогда $k_{A'}(\lambda, r_1) \geqslant k_A(\lambda, r_1)$. Так как ранги матриц A' и A совпадают, то $k_{A'}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r)$ для всех $r \in \mathbb{N}$.

б) Существует r такое, что $K_A(\lambda) = k_A(\lambda, r)$. Предположим также, что существует $r' \neq r$ такое, что $k_{A'}(\lambda, r') \geqslant 1$. Рассмотрим матрицу X' такую, что $L_{X'} = 1$, $k_{X'}(\lambda, r') = 1$, $X' \overset{\sharp}{\leqslant} A'$, $X = T^{-1}(X')$. Тогда $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$ и $k_A(\lambda, r') \geqslant k_X(\lambda, r') = 1$, что неверно. Следовательно, $k_{A'}(\lambda, r') = 0$, если $r' \neq r$. Однако $L_{A'} = L_A$ и $k_{A'}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r)$. Таким образом, $k_{A'}(\mu, r) = k_A(\mu, r)$ для всех $\mu \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$, что доказывает требуемое утверждение.

6. Пусть $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$, $A' = T(A)$. Тогда по теореме 2.17 получаем $A = \sum\limits_{\lambda \neq 0} S_A^1(\lambda)$. Более того, $S_A^1(\lambda) \in M_{3,\lambda}$ и $S_A^1(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} A$ для любого $\lambda \neq 0$; таким образом, матрица $T(S_A^1(\lambda))$ подобна матрице $S_A^1(\lambda)$ в силу пункта 5. Следовательно, $k_{A'}(\lambda, r) \geqslant k_{T(S_A^1(\lambda))}(\lambda, r) = k_{S_A^1(\lambda)}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r)$ для всех $r \in \mathbb{N}$. Таким образом, $k_{A'}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r)$ для произвольного $\lambda \neq 0$ и $r \in \mathbb{N}$, так как ранги матриц A и A' совпадают. Получаем, что $k_{A'}(0, r) = k_A(0, r)$, если $r \in \mathbb{N}$, что доказывает данную теорему. $\square$

Следующие следствия дают характеризацию действия отображения T и связывают результат применения T с жордановой нормальной формой матрицы A и считающими функциями k_A.

Следствие 5.2. *Пусть* $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ *и отображение* $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ *является биективным и строго-монотонным относительно* $\overset{\sharp}{<}$*-порядка,* $T(\lambda I) = \lambda I$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{F}$. *Тогда отображение* T *сохраняет жорданову нормальную форму матриц из* $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$.

Следствие 5.3. *Пусть* $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ *и отображение* $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ *является биективным и строго-монотонным относительно* $\overset{\sharp}{<}$*-порядка.*

Тогда существует биекция $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ *такая, что* $\sigma(0) = 0$, $k_A(\lambda, r) = k_{T(A)}(\sigma(\lambda), r)$ *для всех* $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $r \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Если $n = 1$, то доказывать нечего. Пусть $n \geqslant 2$, $C = \lambda I$, $\lambda \neq 0$, $C' = T(C)$. Тогда $L_C = n$, $R_C = 0$ по лемме 3.6. Следовательно, $L_{C'} = n$, $R_{C'} = 0$. Таким образом, C' является диагонализуемой матрицей с ненулевыми собственными значениями. Предположим, что существуют два различных собственных числа λ_1 и λ_2. Пусть матрица A' имеет индекс 1, $A' \overset{\sharp}{\leqslant} C'$, $L_{A'} = 2$ и, кроме того, $K_{A'}(\lambda_1) = K_{A'}(\lambda_2) = 1$. Тогда число матриц X', имеющих индекс 1 и удовлетворяющих условию $X' \overset{\sharp}{\leqslant} A'$, конечно по лемме 2.12. Следовательно, число матриц X индекса один, удовлетворяющих условию $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$, также является конечным, здесь $A = T^{-1}(A')$. Так как $L_A = 2$, то матрица A имеет различные собственные числа, и условие $A \overset{\sharp}{\leqslant} \lambda I$ не выполнено. Полученное противоречие показывает, что все собственные числа матрицы C' совпадают и $C' = \lambda' I$.

Тогда отображение $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, удовлетворяющее условиям $\sigma(0) = 0$ и $T(\lambda I) = \sigma(\lambda) I$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$, определено корректно. Так как отображение T является инъективным, то отображение σ также является инъективным. Более того, для T^{-1} отображение $\sigma'\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, удовлетворяющее условию $\sigma'(0) = 0$, $T^{-1}(\lambda I) = \sigma'(\lambda) I$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$, корректно определено и является сюръективным. Таким образом, отображение σ биективно.

Пусть T_σ и $T_{\sigma^{-1}}$ являются монотонными отображениями, построенными при помощи σ и σ^{-1} аналогично лемме 4.3. Тогда $k_A(\lambda, r) = k_{T_\sigma(A)}(\sigma(\lambda), r)$ для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $r \in \mathbb{N}$. В дополнение к этому отображение $\widetilde{T} = T_{\sigma^{-1}} \circ T$ (композиция отображений T и $T_{\sigma^{-1}}$) является биективным и строго-монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. По своему определению отображение $\widetilde{T}$ обладает свойством $\widetilde{T}(\lambda I) = \lambda I$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Согласно следствию 5.2 отображение $\widetilde{T}$ сохраняет жорданову нормальную форму на множестве $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$, откуда получаем равенство $k_A(\lambda, r) = k_{\widetilde{T}(A)}(\lambda, r)$ для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $r \in \mathbb{N}$. Таким образом, $k_A(\lambda, r) = k_{\widetilde{T}(A)}(\lambda, r) = k_{T_\sigma(\widetilde{T}(A))}(\sigma(\lambda), r) = k_{T(A)}(\sigma(\lambda), r)$ для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $r \in \mathbb{N}$, так как $T = T_\sigma \circ \widetilde{T}$. □

§6. Биективные монотонные отображения и 0-аддитивность

Лемма 6.1. *Пусть* $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ *и отображение* $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ *является монотонным относительно* $\overset{\sharp}{\leqslant}$*-порядка. Предположим, что существует биекция* $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$*, удовлетворяющая условию* $\sigma(0) = 0$*, причем для всех* $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$ *справедливо* $\operatorname{Spec} T(A) = \sigma(\operatorname{Spec} A)$ *и* $\operatorname{rk} T(A) = \operatorname{rk} A$*. Тогда отображение* T *является 0-аддитивным.*

Доказательство. Пусть для матриц $A, B \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ справедливо условие $A \perp B$. Покажем, что $T(A) \perp T(B)$ и $T(A+B) = T(A) + T(B)$. Если $A = 0$ или $B = 0$, то результат справедлив. Предположим, что $A \neq 0$, $B \neq 0$, тогда $A, B \notin M_0$.

Обозначим $D = S_A^2(0)$. Так как $S_A^1(0) = 0$, то $A = \sum\limits_{\lambda\neq 0} S_A^1(\lambda)$ и $A \perp D$ по теореме 2.17(3). Более того, по теореме 2.20(2.a) получаем, что $S_A^2(\lambda) \perp B$ для всех $\lambda \neq 0$. Таким образом, $I - D = \sum\limits_{\lambda\neq 0} S_A^2(\lambda) \perp B$. В силу бесконечности поля $\mathbb{F}$ существуют различные ненулевые скаляры $\alpha, \beta \in \mathbb{F} \setminus (\operatorname{Spec} A \cup \operatorname{Spec} B)$. Пусть $A_1 = A$, $B_1 = B$, $A_2 = \alpha(I - D)$, $B_2 = \beta D$. Тогда $A_i, B_j \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$, $A_i \perp B_j$ при $i, j = 1, 2$. Обозначим $C_{ij} = A_i + B_j$, $A_i' = T(A_i)$, $B_j' = T(B_j)$, $C_{ij}' = T(C_{ij})$ при $i, j = 1, 2$.

Зафиксируем $i, j = 1, 2$ такие, что $(i, j) \neq (1, 1)$. Получаем, что $A_i \overset{\sharp}{\leqslant} C_{ij}$, следовательно, $A_i' \overset{\sharp}{\leqslant} C_{ij}'$. Аналогично $B_j' \overset{\sharp}{\leqslant} C_{ij}'$. Более того,

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec} A_i' \cap \operatorname{Spec} B_j' &= \sigma(\operatorname{Spec} A_i) \cap \sigma(\operatorname{Spec} B_j)\\ &= \sigma(\operatorname{Spec} A_i \cap \operatorname{Spec} B_j) \subseteq \{0\}.\end{aligned}$$

Получаем $A_i' \perp B_j'$ по следствию 2.21.

Таким образом, доказано, что $A_i' \perp B_j'$ для всех $i, j = 1, 2$, $(i, j) \neq (1, 1)$. Более того $\operatorname{rk} A_2' + \operatorname{rk} B_2' = \operatorname{rk} A_2 + \operatorname{rk} B_2 = n$. Обозначим $k = \operatorname{rk} A_2'$. В силу условия 2.3 существует матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$ такая, что $A_2' = P \begin{pmatrix} A_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, $B_2' = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{2,1} \end{pmatrix} P^{-1}$ для некоторых $A_{2,1} \in GL_k(\mathbb{F})$ и $B_{2,1} \in M_{n-k}(\mathbb{F})$. Однако $\operatorname{rk} B_{2,1} = \operatorname{rk} B_2' = n - k$, таким образом, $B_{2,1} \in GL_{n-k}(\mathbb{F})$. По предложению 2.1 существует матрица $A_{1,1} \in M_k(\mathbb{F})$ такая, что $A_1' = P \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. Аналогично $B_1' =$

$P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{1,1} \end{pmatrix} P^{-1}$ для некоторой $B_{1,1} \in M_{n-k}(\mathbb{F})$. Таким образом, $A_1' \perp B_1'$, следовательно, $T(A) \perp T(B)$.

Так как $T(A) \overset{\sharp}{\leqslant} T(A+B)$ и $T(B) \overset{\sharp}{\leqslant} T(A+B)$, то по лемме 2.22 получаем $T(A)+T(B) \overset{\sharp}{\leqslant} T(A+B)$. Однако $\operatorname{rk}(T(A)+T(B)) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B = \operatorname{rk} T(A+B)$. Следовательно, $T(A+B) = T(A)+T(B)$. □

Теорема 6.2. *Пусть $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ и отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ является биекцией. Тогда отображение T строго-монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка в том и только том случае, когда отображения T и T^{-1} одновременно являются 0-аддитивными.*

Доказательство. *Необходимость.* По следствию 5.3 существует биекция $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, удовлетворяющая условию $\sigma(0) = 0$, и такая, что $k_A(\lambda, r) = k_{T(A)}(\sigma(\lambda), r)$ для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $r \in \mathbb{N}$. Таким образом, отображение T является 0-аддитивным в силу леммы 6.1. Аналогично отображение T^{-1} также 0-аддитивно.

Достаточность. Так как отображение T является 0-аддитивным, то T также является монотонным относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка в силу леммы 4.1. Так как отображение T 0-аддитивно, то оно является биекцией и монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Аналогично отображение T^{-1} также монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Таким образом, отображение T является строго-монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. □

Следующий пример демонстрирует существенность условий теоремы 6.2.

Пример 6.3. Пусть отображение $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ определяется по следующему правилу: если $\operatorname{rk}(A) = k$, то $T(A) = \sum_{i=1}^{k} E_{ii}$. Отображение T не является биекцией, оно монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, однако не является строго-монотонным, и T не 0-аддитивно.

Литература

1. A. Alieva, A. Guterman, *Monotone linear maps on matrices are invertible.* — Commun. Algebra **33** (2005), 3335–3352.

2. J. K. Baksalary, F. Pukelsheim, G. P. H. Styan, *Some properties of matrix partial orderings.* — Linear Algebra Appl. **119** (1989), 57–85.
3. A. Ben-Israel, T. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications.* John Wiley and Sons, New York, 1974.
4. И. И. Богданов, А. Э. Гутерман, *Монотонные отображения матриц, заданные групповой обратной, и одновременная диагонализуемость.* — Мат. сборник **198**, No. 1 (2007), 3–20.
5. W.-L. Chooi, M.-H. Lim, *Additive preservers of rank-additivity on matrix spaces.* — Linear Algebra Appl. **402** (2005), 291–302.
6. G. Dolinar, J. Marovt, *Star partial order on* $B(H)$. — Linear Algebra Appl. **434** (2011), 319–326.
7. М. А. Ефимов, *Линейные отображения матриц, монотонные относительно порядков* $\overset{\sharp}{\leq}$ *и* $\overset{cn}{\leq}$. — Фунд. прикл. мат. **13**, No. 4 (2007), 53–66.
8. M. H. Englefield, *The commuting inverses of a square matrix.* — Proc. Cambridge Phil. Soc. **62** (1966), 667–671.
9. I. Erdelyi, *On the matrix equation* $Ax = \lambda Bx$. — J. Math. Anal. Appl. **17** (1967), 117–132.
10. C.-A. Faure, *An elementary proof of the fundamental theorem of projective geometry.* — Geom. Dedicata **90** (2002), 145–151.
11. L. C. Grove, *Algebra.* Academic Press, New York, 1983.
12. A. Guterman, *Linear preservers for Drazin star partial order.* — Communs. Algebra **29**, No. 9 (2001), 3905–3917.
13. A. Guterman, *Linear preservers for matrix inequalities and partial orderings.* — Linear Algebra Appl. **331**, No. 1–3 (2001), 75–87.
14. А. Э. Гутерман, *Монотонные аддитивные отображения матриц.* — Мат. заметки **81**, No. 5 (2007), 681–692.
15. A. Guterman, *Monotone matrix maps preserve non-maximal rank.* — Lect. Notes Pure Appl. Math. **235** (2003), 311–328
16. B. Hartley, T. O. Hawkes, *Rings, Modules, and Linear Algebra.* Chapman and Hall Ltd., London, 1970.
17. R. E. Hartwig, *How to partially order regular elements.* — Math. Japonica **25**, No. 1 (1980), 1–13.
18. R. E. Hartwig, S. K. Mitra, *Partial Orders Based on Outer Inverses.* — Linear Algebra Appl. **176** (1982), 3–20.
19. P. Legiša, *Automorphisms of* M_n*, partially ordered by rank subtractivity ordering.* — Linear Algebra Appl. **389** (2004), 147–158.
20. P. Legiša, *Automorphisms of* M_n*, partially ordered by the star order.* — Linear Multilinear Algebra **54**, No. 3 (2006), 157–188.
21. S. K. Mitra, *A new class of g-inverse of square matrices.* — Sankhyā, Ser. A. **30** (1963), 323–330.
22. S. K. Mitra, *On group inverses and the sharp order.* — Linear Algebra Appl. **92** (1987), 17–37.
23. S. K. Mitra, P, Bhimasankaram, S. B. Malik, *Matrix Partial Orderings, Shorted Opetrators and Applications.* World Scientific, 2010, 446 pp.

24. K. S. S. Nambooripad, *The natural partial order on a regular semigroup.* — Proc. Edinburgh Math. Soc. **23** (1980), pp. 249-260.
25. P. G. Ovchinnikov, *Automorphisms of the poset of skew projections.* — J. Funct. Anal. **115** (1993), 184–189.
26. S. Pierce et al., *A survey of linear preserver problems.* — Linear Multilinear Algebra **33** (1992), 1–119.
27. J. De Pillis, *Linear maps which preserve hermitian and positive semidefinite operators.* — Pacific J. Math. **23** (1967), 129–137.
28. C. R. Rao, S. K. Mitra, *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications.* Wiley, New York, 1971.
29. P. Robert, *On the group-inverse of a linear map.* — J. Math. Anal. Appl. **22** (1968), 658–669.
30. P. Sĕmrl, *Nonlinear commutativity preserving maps.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **71** (2005), 781–819.
31. P. Šemrl, *Order-preserving maps on the poset of idempotent matrices.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **69** (2003), 481–490.
32. P. Šemrl, *Automorphisms of $B(H)$ with respect to minus partial order.* — J. Math. Anal. Appl. **369** (2010), 205–213.
33. J. H. M. Wedderburn, *Lectures on Matrices.* (AMS Colloquium Publications, **17**) New York, 1934.

Guterman A. E., Efimov M. A. Monotone maps on matrices of index one.

The paper investigates bijective maps on the set of matrices of index one that are monotone with respect to the order induced by the group inverse.

Московский государственный
университет ГСП-1, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия

E-mail: guterman@list.ru,
efimov.mikhail@gmail.com

Поступило 7 июля 2012 г.