Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 405, 2012 г.

Е. Г. Голузина

К ОЦЕНКЕ ВТОРОГО КОЭФФИЦИЕНТА В КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ С ДВУМЯ ЗАДАННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ФУНКЦИИ

§1

Пусть T – класс функций $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n$, регулярных и типично вещественных в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, т.е. удовлетворяющих в U условию

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} f(z > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Пусть $D(r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < 1$, – множество значений системы $\{f(r_1), f(r_2)\}$ на классе T. Положим

$$x_j = f(r_j), \quad \rho_j = r_j + \frac{1}{r_j}, \quad j = 1, 2.$$

По теореме 2.2 в [1] (в случае $n = 2$) получаем следующий результат.

Лемма 1. $\operatorname{Int} D(r_1, r_2)$ *есть множество всех точек* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$-x_2(\rho_2^2 - 4) + x_1(\rho_1^2 - 4) + \rho_2 - \rho_1 > 0,$$

$$x_1 x_2(\rho_2 - \rho_1) + x_2 - x_1 > 0.$$

Пусть $D(z_0, r_1)$, $0 < r_1 < 1$, $z_0 \in U$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, – множество значений системы $\{f(z_0), f(r_1)\}$ на классе T. Положим

$$x_0 + iy_0 = w_0 = f(z_0), \quad x_1 = f(r_1), \quad \rho_1 = r_1 + \frac{1}{r_1}, \quad \zeta_0 = z_0 + \frac{1}{z_0}.$$

По теореме 1.2 в [2] (в случае $m = 1$) имеем следующий результат.

Лемма 2. $\operatorname{Int} D(z_0, r_1)$ *есть множество всех точек* $(x_0, y_0, x_1) \in \mathbb{R}^3$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$\Delta^{(\varepsilon)}(w_0, x_1) > 0, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

Ключевые слова: типично вещественная функция, второй коэффициент.

где

$$\Delta^{(\varepsilon)} = \begin{vmatrix} (2+\varepsilon\rho_1)x_1 - 1 & \frac{(2+\varepsilon\zeta_0)w_0-(2+\varepsilon\rho_1)x_1}{\rho_1-\zeta_0} \\ \frac{(2+\varepsilon\overline{\zeta}_0)\overline{w}_0-(2+\varepsilon\rho_1)x_1}{\rho_1-\overline{\zeta}_0} & \frac{(2+\varepsilon\rho_1)x_1}{2|\rho_1-\zeta_0|^2} + 2\operatorname{Re}\left[\frac{(2+\varepsilon\zeta_0)w_0}{(\rho_1-\zeta_0)(\overline{\zeta}_0-\zeta_0)}\right] \end{vmatrix}.$$

Пусть $D(z_1, z_2)$, $z_j \in U$, $\operatorname{Im} z_j \neq 0$, $j = 1, 2$, $z_1 \neq z_2$, – множество значений системы $\{f(z_1), f(z_2)\}$ на классе T. Положим

$$w_j = f(z_j), \quad \zeta_j = z_j + \frac{1}{z_j}, \quad \omega_j = w_j(\zeta_j^2 - 4), \quad j = 1, 2.$$

В силу теоремы 1.2 в [3] (случай $n = 2$), справедлива

Лемма 3. $\operatorname{Int} D(z_1, z_2) = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 : \Delta_j > 0, j = 1, 2\}$, *где*

$$\Delta_1 \equiv \Delta_1(w_1, w_2) = \begin{vmatrix} \frac{\operatorname{Im}\omega_1}{\operatorname{Im}\zeta_1} - 1 & \frac{\overline{\omega}_2 - \omega_1}{\overline{\zeta}_2 - \zeta_1} \\ \frac{\omega_2 - \overline{\omega}_1}{\zeta_2 - \overline{\zeta}_1} & \frac{\operatorname{Im}\omega_2}{\operatorname{Im}\zeta_2} - 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 \equiv \Delta_2(w_1, w_2) = \begin{vmatrix} 1 & w_1 & w_2 \\ \overline{w}_1 & -\frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im}\zeta_1} & \frac{\overline{w}_1 - w_2}{\zeta_2 - \overline{\zeta}_1} \\ \overline{w}_2 & \frac{w_1 - \overline{w}_2}{\overline{\zeta}_2 - \zeta_1} & -\frac{\operatorname{Im} w_2}{\operatorname{Im}\zeta_2} \end{vmatrix}.$$

§2

2.1. Пусть D_1 – множество значений системы

$$I_1 = \{c_2, f(r_1), f(r_2)\}, \quad 0 < r_j < 1, \quad j = 1, 2, \quad r_1 < r_2, \quad f \in T.$$

Теорема 1. *Множество D_1 значений системы I_1 на классе T есть множество всех точек $X(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ($x_1 = f(r_1)$, $x_2 = f(r_2)$,*

$x_3 = c_2$), *в которых неотрицательны все главные миноры матриц:*

$$A_\varepsilon = A_\varepsilon(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{\omega_1^{(\varepsilon)} - \omega_2^{(\varepsilon)}}{\rho_2 - \rho_1} & \varepsilon + \dfrac{\rho_1\omega_1^{(\varepsilon)} - \rho_2\omega_2^{(\varepsilon)}}{\rho_2 - \rho_1} \\ \varepsilon + \dfrac{\rho_1\omega_1^{(\varepsilon)} - \rho_2\omega_2^{(\varepsilon)}}{\rho_2 - \rho_1|} & \varepsilon x_3 + 2 + \varepsilon(\rho_1 + \rho_2) + \dfrac{\rho_1^2\omega_1^{(\varepsilon)} - \rho_2^2\omega_2^{(\varepsilon)}}{\rho_2 - \rho_1} \end{pmatrix},$$

где $\omega_j^{(\varepsilon)} = x_j(2 + \varepsilon\rho_j)$, $j = 1, 2$, $\varepsilon = \pm 1$.

Множество Int D_1 *определяется неравенствами*

$$\frac{\omega_1^{(\varepsilon)} - \omega_2^{(\varepsilon)}}{\rho_2 - \rho_1} > 0,$$

$$(2 + \varepsilon x_3)\big[\omega_1^{(\varepsilon)} - \omega_2^{(\varepsilon)}\big](\rho_2 - \rho_1) > \big(\varepsilon - \omega_1^{(\varepsilon)}\big)\big(\varepsilon - \omega_2^{(\varepsilon)}\big)(\rho_2 - \rho_1)^2.$$

Пусть T_1 – класс функций $f(z) = z + c_2z^2 + \dots \in T$ с фиксированными значениями $f(r_1)$ и $f(r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < 1$, из множества Int $D(r_1, r_2)$.

Следствие 1. *Пусть* $f(z) = z + c_2z^2 + \dots \in T_1$. *Тогда имеют место точные оценки*

$$c_2 \geqslant -2 + \frac{(\rho_1 - \rho_2)[x_1(\rho_1 + 2) - 1][x_2(\rho_2 + 2) - 1]}{x_2(\rho_2 + 2) - x_1(\rho_1 + 2)}, \tag{1}$$

$$c_2 \leqslant 2 - \frac{(\rho_1 - \rho_2)[1 - x_1(\rho_1 - 2)][1 - x_2(\rho_2 - 2)]}{x_1(\rho_1 - 2) - x_2(\rho_2 - 2)}. \tag{2}$$

Знак равенства в (1) *достигается только для функции*

$$\frac{z}{(1+z)^2}\left\{1 + \frac{z}{1 - 2t^{(-1)}z + z^2} \cdot \frac{[x_1(\rho_1 + 2) - 1][x_2(\rho_2 + 2) - 1](\rho_1 - \rho_2)}{x_2(\rho_2 + 2) - x_1(\rho_1 + 2)}\right\},$$

в (2) – *только для функции*

$$\frac{z}{(1-z)^2}\left\{1 + \frac{z}{1 - 2t^{-1}z + z^2} \cdot \frac{[1 - x_1(\rho_1 - 2)][1 - x_2(\rho_2 - 2)](\rho_1 - \rho_2)}{x_1(\rho_1 - 2) - x_2(\rho_2 - 2)}\right\}$$

при

$$2t^{(\varepsilon)} = \frac{\rho_1[(x_1(\rho_1 - 2\varepsilon) - 1] - \rho_2[(x_2(\rho_2 - 2\varepsilon) - 1]}{x_1(\rho_1 - 2\varepsilon) - x_2(\rho_2 - 2\varepsilon)}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

2.2. Пусть $0 < r_1 < 1$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, $z_0 \in U$, D_2 – множество значений системы $\{c_2, f(r_1), f(z_0)\}$ на классе T. Положим

$$x_1 + ix_2 = w_0 = f(z_0), \quad x_3 = f(r_1), \quad x_4 = c_2, \quad \{x_j\}_1^4 \in \mathbb{R}.$$

В [4,5] установлено, что D_2 есть множество всех точек $X(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, в которых неотрицательны все главные миноры матриц A_1 и B_1:

$$A_1 = (a_{jk})_1^2 = \begin{pmatrix} c_2 + \rho_1 - \omega_1 & \dfrac{\overline{\omega}_0 - \omega_1}{\overline{\zeta}_0 - \rho_1} - 1 \\ \dfrac{\omega_0 - \omega_1}{\zeta_0 - \rho_1} - 1 & -\dfrac{\omega_1}{|\zeta_0 - \rho_1|^2} + 2\operatorname{Re}\left[\dfrac{\omega_0}{(\zeta_0 - \rho_1)(\overline{\zeta}_0 - \zeta_0))}\right] \end{pmatrix},$$

$$B_1 = (b_{jk})_1^3$$
$$= \begin{pmatrix} f(r_1) & \rho_1 f(r_1) - 1 & \frac{\overline{f(z_0)} - f(r_1)}{\rho_1 - \overline{\zeta}_0} \\ \rho_1 f(r_1) - 1 & \rho_1^2 f(r_1) - \rho_1 - c_2 & \frac{\overline{\zeta}_0 \overline{f(z_0)} - \rho_1 f(r_1)}{\rho_1 - \overline{\zeta}_0} \\ \frac{f(z_0) - f(r_1)}{\rho_1 - \zeta_0} & \frac{\zeta_0 f(z_0) - \rho_1 f(r_1)}{\rho_1 - \zeta_0} & \frac{f(r_1)}{|\zeta_0 - \rho_1|^2} + 2\operatorname{Re}\left[\frac{f(z_0)}{(\rho_1 - \zeta_0)(\overline{\zeta}_0 - \zeta_0)}\right] \end{pmatrix},$$

где

$$\rho_1 = r_1 + \frac{1}{r_1}, \quad \zeta_0 = z_0 + \frac{1}{z_0}, \quad \omega_1 = (\rho_1^2 - 4) f(r_1), \quad \omega_0 = (\zeta_0^2 - 4) f(z_0).$$

Теорема 2 ([4]).

$$\operatorname{Int} D_2 = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \det\left[(a_{jk})_1^l\right] > 0, \ l = 1, 2; \\ \det\left[(b_{jk})_1^m\right] > 0, \ m = 1, 2, 3\Big\}.$$

Каждой точке границы ∂D_2 соответствует только одна функция класса T, и она имеет вид

$$f_1(z) = \frac{\lambda_1 z}{(1-z)^2} + \frac{\lambda_2 z}{(1+z)^2} + \frac{\lambda_3 z}{1 - 2t + z^2},$$

либо вид

$$f_2(z) = \frac{\mu_1 z}{1 - 2tz + z^2} + \frac{\mu_2 z}{1 - 2\tau z + z^2},$$

где

$$\lambda_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \sum_{j=1}^{3} \lambda_j = 1, \quad 0 < t < 1;$$

$$\mu_j > 0, \quad j = 1, 2, \quad \mu_1 + \mu_2 = 1, \quad -1 \leqslant t, \tau \leqslant 1, \quad t \neq \tau.$$

Пусть T_2 – класс функций $f(z) = z + c_2 z^2 + \cdots \in T$ с фиксированными значениями $f(r_1)$ и $f(z_0)$ из множества $\operatorname{Int}\ D(z_0, r_1)$.

Следствие 2. *Пусть $f(z) = z + c_2 z^2 + \cdots \in T_2$. Тогда имеют место точные оценки*

$$c_2 \geqslant \omega_1 - \rho_1 + \left|\omega_0 - \omega_1 - \zeta_0 + \rho_1\right|^2 \left[\frac{\operatorname{Im}(\omega_0(\rho_1 - \overline{\zeta}_0))}{\operatorname{Im}\zeta_0} - \omega_1\right]^{-1},$$

$$c_2 \leqslant \rho_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

где

$$\Delta = x_3 \frac{\operatorname{Im}[w_0(\zeta_0 - \rho_1)]}{\operatorname{Im}\zeta_0} - |w_0|^2,$$

$$\Delta_1 = \left|\begin{pmatrix} x_3 & -1 & \overline{w}_0 - x_3 \\ -1 & 0 & (\overline{\zeta}_0 - \rho_1)\overline{w}_0 \\ w_0 - x_3 & (\zeta_0 - \rho_1)w_0 & x_3 + \frac{\operatorname{Im}[w_0(\rho_1 - \overline{\zeta}_0)]}{\operatorname{Im}\zeta_0} \end{pmatrix}\right|.$$

2.3. Пусть $z_j \in U$, $\operatorname{Im} z_j \neq 0$, $j = 1, 2$, $z_1 \neq z_2$.

Пусть D_3 – множество значений системы $\{c_2, f(z_1), f(z_2)\}$ на классе T. Пусть $\zeta_j = z_j + \frac{1}{z_j}$, $w_j = x_j + iy_j = f(z_j)$, x_j, $y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, $x_0 = c_2$;

$$A^{(\varepsilon)} = (a_{jk}^{(\varepsilon)})_{j,k=0}^2 = \begin{pmatrix} 2 + \varepsilon x_0 & a_{01} & a_{02} \\ (2 + \varepsilon\overline{\zeta}_1)\overline{w}_1 - \varepsilon & -\frac{\operatorname{Im}[(2+\varepsilon\zeta_1)w_1]}{\operatorname{Im}\zeta_1} & a_{12} \\ (2 + \varepsilon\overline{\zeta}_2)\overline{w}_2 - \varepsilon & \frac{(2+\varepsilon\zeta_1)w_1 - (2+\varepsilon\overline{\zeta}_2)\overline{w}_2}{\overline{\zeta}_2 - \zeta_1} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где $a_{01} = \overline{a}_{10}$, $a_{02} = \overline{a}_{20}$, $a_{12} = \overline{a}_{21}$,

$$a_{33} = -\frac{\operatorname{Im}[(2 + \varepsilon\zeta_2)w_2]}{\operatorname{Im}\zeta_2}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

В [4] установлено, что точка X, $X = (x_0, x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^5$, – внутренняя точка множества D_3 тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\det\left[\left(a_{jk}^{(\varepsilon)}\right)_{j,k=0}^s\right] > 0, \quad s = 0, 1, 2, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Пусть T_3 – класс функций $f(z) \in T$ с фиксированными значениями $w_1 = f(z_1)$ и $w_2 = f(z_2)$, $(w_1, w_2) \in \operatorname{Int}\ D(z_1, z_2)$.

Точные оценки c_2 в классе T_3 получаются из неравенств

$$\det A^{(\varepsilon)} \geqslant 0, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

§3

Доказательство теоремы 1. Используя интегральное представление для класса T

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \dots \in T \Longleftrightarrow f(z) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{z}{1 - 2tz + z^2}\, d\alpha(t), \quad \alpha(t) \in M_1,$$

где M_1 – класс функций $\alpha(t)$, неубывающих на $[-1, 1]$, $\int\limits_{-1}^{1} d\alpha(t) = 1$, получим для системы I_1 интегральное представление

$$c_2 = \int\limits_{-1}^{1} 2t d\alpha(t), \quad f(r_j) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\rho_j - 2t}, \quad \alpha(t) \in M_1. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что D_1 – замкнутое выпуклое ограниченное множество. Образуем функцию

$$\varphi(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \frac{1}{\rho_1 - 2t} + \beta_3 \frac{1}{\rho_2 - 2t} \geqslant 0 \tag{4}$$

на $[-1, 1]$, где $\beta_0 \neq 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$. Запишем $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \frac{A_3(t)}{(\rho_1 - 2t)(\rho_2 - 2t)},$$

где $A_3(t)$ – неотрицательный алгебраический многочлен 3-ей степени. По теореме Маркова–Лукача имеем

$$\varphi(t) = \frac{(1-t)(X_0 + X_1 t)^2 + (1+t)(Y_0 + Y_1 t)^2}{(\rho_1 - 2t)(\rho_2 - 2t)}.$$

Запишем $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}\Bigg\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{2+\varepsilon_j\rho_1}{\rho_1 - 2t} - \frac{2+\varepsilon_j\rho_2}{\rho_2 - 2t}\right]X_{j,0}^2$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{2}\left[\varepsilon_j(\rho_2-\rho_1) + \frac{\rho_1(2+\varepsilon_j\rho_1)}{\rho_1-2t} - \frac{\rho_2(2+\varepsilon_j\rho_2)}{\rho_2-2t}\right]X_{j,0}X_{j,1}$$
$$+\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{2}\Big[(2+\varepsilon_j\rho_2)\rho_2 - (2+\varepsilon_j\rho_1)\rho_1 + 2\varepsilon_j(\rho_2-\rho_1)t$$
$$+\frac{\rho_1^2(2+\varepsilon_j\rho_1)}{\rho_1-2t} - \frac{\rho_2^2(2+\varepsilon_j\rho_2)}{\rho_2-2t}\Big]X_{j,1}^2\Bigg\},$$

где $\varepsilon_j = (-1)^j$, а $X_{j,0}$, $X_{j,1}$ $(j = 1, 2)$ – вещественные числа. Как известно (см. [6, с. 84–85]), для того чтобы имело место представление (3), необходимо и достаточно, чтобы при выполнении неравенства $\varphi(t) \geqslant 0$ для всех $t \in [-1, 1]$ выполнялось бы и неравенство

$$H(X) = \int_{-1}^{1} \varphi(t)\, d\alpha(t) \geqslant 0, \quad \alpha \in M_1.$$

Неотрицательность вещественной квадратичной формы $H(X)$ равносильна неотрицательности всех главных миноров матриц $A_\varepsilon(X)$, $\varepsilon = \pm 1$ (см. [7, с. 270]). □

Доказательство следствий 1 и 2. Используя теорему 1, получаем оценки (1) и (2) следствия 1.

Оценки c_2 в классе T_2 находим из теоремы 2.

Утверждения о знаках равенства доказываются аналогично утверждению 3 теоремы 1 в [3]. □

Литература

1. Е. Г. Голузина, *Об одном множестве значений в классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **350** (2007), 5–16.
2. Е. Г. Голузина, *О множестве значений системы* $\{f(z_1), \dots, f(z_n)\}$ *в классе типично вещественных функций.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 24–33.
3. Е. Г. Голузина, *О множестве значений системы* $\{f(z_1), \dots, f(z_n)\}$ *в классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **314** (2004), 41–51.

4. Е. Г. Голузина, *О множестве значений системы* $\{c_2, f(z_1), f(z_2)\}$ *в классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **371** (2009), 7–17.
5. Е. Г. Голузина, *О множестве значений* $f(z_0)$ *в одном классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 46–55.
6. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* М., 1973.
7. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, 5-е изд., М., 2010.

Goluzina E. G. Estimating the second coefficient in the class of typically real functions with two function values prescribed.

Let T_1 be the class of functions $f(z) = z + c_2 z^2 + \cdots$ regular and typically real in the disk $|z| < 1$ whose values $f(r_1)$ and $f(z_2)$ are fixed, $0 < r_1 < r_2 < 1$. Let T_2 be the class of functions $f(z) = z + c_2 z^2 + \cdots$ regular and typically real in the disk $|z| < 1$ whose values $f(r_1)$ and $f(z_0)$ are fixed, $0 < r_1 < 1$, $0 < |z_0| < 1$. Sharp estimates on the coefficient c_2 are obtained for the classes T_1 and T_2.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023
С.-Петербург Россия
E-mail: goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 9 ноября 2012 г.