Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 405, 2012 г.

Ю. О. Воронцов, Х. Д. Икрамов

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ $AX + X^TB = C$ И $X + AX^TB = C$ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ A И B

1. Матричное уравнение

$$AX + X^TB = C \tag{1}$$

имеет смысл, если A и B – прямоугольные матрицы размеров соответственно $m \times n$ и $n \times m$. В этом случае C должна быть квадратной матрицей порядка m, а искомая матрица X имеет размер $n \times m$. Прямоугольные матричные коэффициенты возможны и в уравнении

$$X + AX^TB = C, \tag{2}$$

если размер всех четырех матриц A, B, C и X одинаков (и, для определенности, равен $m \times n$).

В своих предыдущих публикациях [1,2] авторы предложили ортогональные алгоритмы для численного решения уравнений (1) и (2) в случае, когда A, B, C и X – квадратные матрицы одного и того же порядка n. Цель настоящего сообщения – указать способ решения этих уравнений при $n \neq m$.

В разделах 2 и 3 рассматривается уравнение (2) соответственно для случаев $m > n$ и $n > m$. Раздел 4 посвящен уравнению (1).

2. Напомним найденные в [2] условия однозначной разрешимости уравнения (2) в случае квадратных матриц A, B и C.

Теорема 1. *Для однозначной разрешимости уравнения* (2)*, в котором матрицы A, B, C и X квадратные одного и того же порядка n, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *никакое из собственных значений матрицы AB^T не равно минус единице;*

2) *любые два собственные значения λ_i и λ_j этой матрицы удовлетворяют соотношению*

$$\lambda_i\lambda_j \neq 1, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Ключевые слова: матричное уравнение, однозначная разрешимость, ортогональный алгоритм, собственные значения.

Предположим теперь, что $m > n$. Пусть P – унитарная $m \times m$-матрица, такая что

$$\widehat{A} = PA = \begin{pmatrix} \widehat{A}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где A_1 – подматрица порядка n. Положим

$$\widehat{B} = \bar{P}B = \begin{pmatrix} \widehat{B}_1 \\ \widehat{B}_2 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{C} = PC = \begin{pmatrix} \widehat{C}_1 \\ \widehat{C}_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$Y = PX = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Здесь $\widehat{B}_1, Y_1$ и $\widehat{C}_1$ – квадратные матрицы порядка n, а черта над символом матрицы P означает поэлементное сопряжение. Умножая (2) слева на P, имеем

$$Y + \widehat{A}Y^T\widehat{B} = \widehat{C}, \tag{6}$$

откуда выводим

$$Y_2 = \widehat{C}_2 \tag{7}$$

и

$$Y_1 + \widehat{A}_1 Y_1^T \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 - \widehat{A}_1 \widehat{C}_2^T \widehat{B}_2. \tag{8}$$

Из формул (3) и (4) следует, что

$$\widehat{A}\widehat{B}^T = P(AB^T)P^* = \begin{pmatrix} \widehat{A}_1\widehat{B}_1^T & \widehat{A}_1\widehat{B}_2^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исключая $m - n$ нулей из спектра матрицы AB^T, получим спектр произведения $\widehat{A}_1\widehat{B}_1^T$. Если на $m \times m$-матрицу AB^T наложить те же условия, что в теореме 1, то уравнение (8) будет однозначно разрешимо, и его решение Y_1 может быть найдено посредством алгоритма, описанного в [2].

3. Рассмотрим теперь уравнение (2) в случае $m < n$. Транспонируя (2) и полагая $Z = X^T$, имеем

$$Z + B^T Z^T A^T = C^T. \tag{9}$$

В полученном уравнении все матрицы имеют размер $n \times m$. Поскольку $n > m$, применимы все рассуждения предыдущего раздела. Если следовать этим рассуждениям буквально, то условия единственности решения для уравнения (9) следует формулировать в терминах собственных значений матрицы $B^T A$. Однако, как известно (см., например, [3, теорема 1.3.20]), ненулевые собственные значения матриц $B^T A$

и AB^T (а также их кратности) одинаковы. Поэтому теорема 1 сохраняет силу и в данном случае.

4. Если записать уравнение (1) в виде системы линейных уравнений относительно элементов x_{ij} искомой матрицы X, то такая система будет состоять из m^2 уравнений с mn неизвестными. Эта система недоопределена при $m < n$ и переопределена, если $m > n$. И в том, и в другом случае она может быть несовместной.

Из сказанного следует, что при $m \neq n$ поиск классического решения уравнения (1) имеет мало смысла. Обсудим применение к (1) метода наименьших квадратов. Для определенности, рассмотрим случай $m > n$.

Сопоставим уравнению (1) линейный оператор

$$F_{A,B} : X \to AX + X^T B, \tag{10}$$

действующий из пространства $M_{n,m}(\mathbf{C})$ комплексных $n \times m$-матриц в пространство $M_m(\mathbf{C})$ квадратных матриц порядка m. Зададим скалярное произведение в обоих этих пространствах формулой

$$(R, S) = \mathrm{tr}(S^* R).$$

Нетрудно проверить, что в этом случае сопряженным к оператору (10) является оператор $G_{A,B} : M_m(\mathbf{C}) \to M_{n,m}(\mathbf{C})$, действие которого определяется правилом

$$G_{A,B} Y = A^* Y + \bar{B} Y^T. \tag{11}$$

Обозначим через

$$\mathcal{A} x = \beta \tag{12}$$

систему линейных уравнений, эквивалентную матричному уравнению (1). Метод наименьших квадратов состоит в переходе от системы (12) к системе нормальных уравнений

$$\mathcal{A}^* \mathcal{A} x = \mathcal{A}^* \beta. \tag{13}$$

Эта система совместна даже тогда, когда несовместна исходная система (12). Ее решения называются решениями системы (12) в смысле метода наименьших квадратов, или псевдорешениями.

В рассматриваемом случае ($m > n$) строчный размер m^2 матрицы $\mathcal{A}$ больше ее столбцевого размера mn. Если $\mathcal{A}$ – матрица полного ранга, т.е.

$$\operatorname{rank} \mathcal{A} = mn, \tag{14}$$

то нормальные уравнения (13) однозначно разрешимы. Иначе говоря, матричное уравнение (1) имеет единственное псевдорешение X, если выполнено условие (14).

С учетом формул (10) и (11) матричное уравнение, эквивалентное системе (13), имеет вид

$$(A^*A+\bar{B}B^T)X+A^*X^TB+\bar{B}X^TA^T=A^*C+\bar{B}C^T. \qquad (15)$$

К сожалению, ортогональный метод, разработанный в [1], непригоден для уравнений этого типа. Однако условие (14) гарантирует положительную определенность матрицы $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, что позволяет применить к системе (13) метод сопряженных градиентов (м.с.г.). Адаптированный к уравнению (15), этот метод на шаге k формирует по текущему приближению X_k матрицу

$$(A^*A+\bar{B}B^T)X_k+A^*X_k^TB+\bar{B}X_k^TA^T. \qquad (16)$$

Вычисление матрицы (16) требует $O(n^2m)$ арифметических операций. Теоретически м.с.г. является прямым методом и должен приводить к решению системы (13) не более чем за mn шагов. На практике метод рассматривают как итерационный в расчете на то, что приближенное решение приемлемого качества удастся найти, выполняя существенно меньшее число шагов.

Численные результаты, полученные посредством алгоритмов, описанных в этой заметке, будут представлены в одной из наших будущих публикаций.

Литература

1. Х. Д. Икрамов, Ю. О. Воронцов, *Численный алгоритм для решения матричного уравнения* $AX+X^TB=C$. — Ж. вычисл. матем. матем. физ. **51**, No. 5 (2011), 739–747.
2. Х. Д. Икрамов, Ю. О. Воронцов, *Матричное уравнение* $X+AX^TB=C$*: условия однозначной разрешимости и алгоритм численного решения.* — Докл. РАН **443**, No. 5 (2012), 545–548.
3. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир, М., 1989.

Vorontsov Y. O., Ikramov Kh. D. Numerical solution of the matrix equations $AX+X^TB=C$ and $X+AX^TB=C$ with rectangular coefficients.

It is shown how one should supplement the orthogonal algorithms previously proposed by the authors for the equations in the title of the article with square matrix coefficients for these algorithms to be applicable to

equations with rectangular coefficients, provided that the latter satisfy conditions of unique solvability.

Московский государственный университет
ГСП-1, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su, vv@cs.msu.su

Поступило 15 мая 2012 г.