Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 404, 2012 г.

В. А. Шлык

СФЕРИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЗАЦИЯ И NED-МНОЖЕСТВА, ЛЕЖАЩИЕ В ГИПЕРПЛОСКОСТИ

В [10] Альфорс и Бёйрлинг ввели понятия NED-множества на плоскости и показали, что компактное множество является устранимым множеством в классе регулярных функций с ограниченным интегралом Дирихле тогда и только тогда, когда это множество является NED-множеством.

Затем Ю. Вяйсяля [13] дал описание основных свойств NED-множеств в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Их устранимость для пространственных квазиконформных отображений была установлена независимо в работах В. Асеева и А. Сычева [2], С. Водопьянова и В. Гольдштейна [3].

Вопрос о том, какова геометрическая природа данных множеств, до сих пор остаётся открытым. Неизвестен ответ на этот вопрос и в частном случае для NED-множеств, лежащих на гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. По-видимому, имеет место утверждение, аналогичное высказанному ранее А. Копыловым [8] при изучении устранимых множеств, лежащих в гиперплоскости, для пространственных квазиконформных отображений. А именно, всякий нигде не плотный компакт на гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$ является NED-множеством в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Сравнительно недавно В. Асеев [1] показал, что всякий нигде не плотный компакт на гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий так называемому геометрическому (A)-условию (см. определение 2), является NED-множеством в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Далее в этой работе рассматриваются нигде не плотные компакты на гиперплоскости, удовлетворяющие более общему (S)-условию, и с помощью сферической симметризации устанавливается, что такие компакты являются NED-множествами. В теоремах 2, 3 даются простые геометрические условия "сферической достижимости" точек

Ключевые слова: емкости, модули, сферическая симметризация, устранимые множества.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение 14.A18.21.0353), РФФИ (грант 11-01-00038) и ДВО РАН (грант 12-11-СО-01М-002).

компакта E из его дополнения на гиперплоскости H, которые достаточны для свойства NED.

§1. Терминология и обозначения

Евклидово n-мерное пространство обозначается символом $\mathbb{R}^n$, через $|a-b|$ обозначается евклидово расстояние между точками a и b в $\mathbb{R}^n$. Для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ положим $\operatorname{diam} A = \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$. Если $x \in \mathbb{R}^n$, то $\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{|x-a| : a \in A\}$. Если $B \subset \mathbb{R}^n$, то положим $\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{\operatorname{dist}(x, A) : x \in B\}$. Символом ∂A обозначается граница множества A, а символом $\operatorname{Cl} A$ или $\overline{A}$ – замыкание A. Через $B(a, r)$ обозначается открытый шар радиуса r с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$. $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{H}^k$ – k-мерные меры Лебега и Хаусдорфа соответственно. Для $r > 0$ определим гиперсферы $S(x, r) = \partial B(x, r)$, для $r = 0$ положим $S(x, 0) = \{x\}$.

Простой k-мерной поверхностью S в $\mathbb{R}^n$ будем называть гомеоморфный образ замкнутого координатного куба из R^k либо гомеоморфный образ k-мерной сферы, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Данный куб (сферу) будем называть областью параметризации поверхности S. При этом образ некоторой области из куба (сферы) будем называть сегментом поверхности S. Одномерную простую поверхность назовём простой кривой или кривой Жордана.

Пусть Γ – некоторое семейство континуумов γ в $\mathbb{R}^n$. Неотрицательную борелевскую функцию $\rho : \mathbb{R}^n \to [0; +\infty]$. назовём допустимой метрикой для семейства Γ, если для любого континуума $\gamma \in \Gamma$ верно неравенство $\int\limits_{\gamma} \rho \, d\mathcal{H}^1 \geqslant 1$.

Совокупность всех допустимых метрик для заданного семейства Γ обозначим $\operatorname{adm} \Gamma$.

Модулем семейства Γ назовём величину

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}(\Gamma)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n \, d\mathcal{L}_n.$$

Под конденсатором будем понимать набор множеств (F_0, F_1, D), где D – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $F_0, F_1 \subset \overline{D}$ – непустые непересекающиеся компакты. Рассмотрим некоторый конденсатор (F_0, F_1, D). Будем говорить, что континуум $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ соединяет в D множества F_0 и F_1, если $\gamma \cap D$ содержит связное множество, замыкание которого имеет

непустые пересечения с F_0 и F_1. Семейство таких континуумов обозначим через $\Gamma(F_0, F_1, D)$.

Через $L_n^1(D)$ обозначим пространство функций $u : D \to (-\infty; +\infty)$, локально интегрируемых в D, имеющих в D обобщённые частные производные и таких, что

$$\|u\|_{L_n^1(D)} = \left(\int\limits_D |\nabla u|^n \, dx \right)^{1/n} < \infty.$$

Определим n-ёмкость конденсатора (F_0, F_1, D) как

$$C_n(F_0, F_1, D) = \inf_u \int\limits_D |\nabla u|^n \, dx,$$

где инфимум берется по всем функциям $u \in C^\infty(D) \cap L_n^1(D)$ таким, что $u = j$ в некоторой окрестности компакта F_j, $j = 0, 1$.

Положим $M(F_0, F_1, D) = M(\Gamma(F_0, F_1, D))$. Нетрудно показать [9], что

$$M(F_0, F_1, D) = C_n(F_0, F_1, D). \tag{1}$$

Определение 1. *Компакт $E \subset \mathbb{R}^n$ называется NED-множеством, если для любых двух непересекающихся континуумов $F_0, F_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus E$ выполняется равенство*

$$M(F_0, F_1, \mathbb{R}^n) = M(F_0, F_1, \mathbb{R}^n \setminus E).$$

§2. Компакты в гиперплоскости, удовлетворяющие условию сферической достижимости

Определение 2 (см. [1, §3]). *Компакт E, лежащий в гиперплоскости $H \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, удовлетворяет условию* (A) *(условию связной достижимости) в заданной точке $a \in E$, если существует константа $s(a) > 0$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся невырожденный континуум $\gamma \subset B(a, \varepsilon) \cap (H \setminus E)$, у которого*

$$\operatorname{diam} \gamma \geqslant s(a) \cdot \max_{x \in \gamma} |x - a|.$$

Если условие (A) *выполняется для каждой точки $a \in E$, то будем говорить, что компакт E удовлетворяет условию* (A).

В. Асеев [1] показал, что любой компакт E на гиперплоскости $H \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условию (A), является NED-множеством.

Более общим является следующее

Определение 3. *Компакт E, лежащий в гиперплоскости $H \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, удовлетворяет условию* (S) *(условию сферической достижимости) в заданной точке $a \in E$, если для любого шара $B(a, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, существуют точка b, $0 < |b-a| \leqslant \varepsilon$ и константы $s_1(a) > 0$, $0 < r_0 = r_0(a, \varepsilon) \leqslant |b-a|$ такие, что пересечение $S(b, r) \cap (H \setminus E) \cap B(a, |b-a|) \neq \varnothing$ для всех $r \in [0; r_0] \setminus e$, где e – исключительное множество на отрезке $[0; r_0]$ и $r_0 \geqslant s_1(a)|b-a|$. Если условие* (S) *выполняется для каждой точки $a \in E$, то будем говорить, что компакт E удовлетворяет условию* (S).

Замечание 1. Исключительность множества e понимается в следующем смысле: если отрезок $[0; r_0]$ отождествить с отрезком оси x_1, то e как часть этого отрезка будет n-исключительным в $\mathbb{R}^n$ множеством в смысле Фюгледе [11]. При этом $b \in E$ тогда и только тогда, когда $0 \in e$.

Замечание 2. Если компакт $E \subset H$ удовлетворяет условию (A) в точке $a \in E$, то он удовлетворяет и условию (S). Действительно, выберем точку b на континууме γ из определения 2 таким образом, что $|b-a| = \max\limits_{x \in \gamma} |x-a|$, и пусть $d = \max\limits_{x \in \gamma} |x-b|$. По построению, $d \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{diam} \gamma \geqslant \frac{1}{2} s(a)|b-a|$. Положим $r_0 = \min\{|b-a|, d\}$. Тогда $r_0 \geqslant \min\left\{\frac{1}{2}s(a), 1\right\}|b-a|$. Следовательно, компакт E удовлетворяет условию (S) с константой $s_1(a) = \min\left\{\frac{1}{2}s(a), 1\right\}$.

Приведём пример компакта $E \subset R^3$, лежащего в гиперплоскости $H = \{x : x_3 = 0\}$ и удовлетворяющего условию (S), для которого существует компакт $E_1 \subset E$ положительной $\mathcal{H}^2$-меры, в каждой точке которого для компакта E не выполняется условие (A). Для этого отождествим гиперплоскость H с комплексной плоскостью $\mathbb{C} = \{z = x_1 + ix_2, (x_1, x_2, 0) \in H\}$ и рассмотрим в $\mathbb{C}$ замкнутую кривую Жордана λ положительной площади. Внутренность этой кривой обозначим через B. Построение таких простых кривых можно найти в [4,5]. Отобразим единичный круг $U = \{z : |z| < 1\}$ по теореме Римана регулярной однолистной функцией $w = f(z)$ на область B. Положим $C_r = \{z : |z| = r\}$ и выберем $0 < r_0 < r_1 < 1$ и натуральные числа $k_0 < k_1$ таким образом, чтобы

$$\operatorname{dist}(f(C_{r_0}), \lambda) < \frac{1}{k_0}, \quad \frac{1}{k_1} < \operatorname{dist}(f(C_{r_1}), \lambda) < \frac{1}{k_0+1}.$$

Проводя в кольце $U(r_0, r_1) = \{z : r_0 < |z| < r_1\}$ конечное число разрезов по концентрическим окружностям вида C_r и конечное число радиальных разрезов, расположенных на лучах, исходящих из точки $z = 0$, получим соответствующее разбиение замкнутой области $\overline{B_1} = \overline{f(U(r_0, r_1))}$ на замкнутые криволинейные четырехугольники диаметра $< \frac{1}{k_1^2}$. Объединение границ этих четырехугольников обозначим через λ_1.

Аналогично подберём r_2, $0 < r_1 < r_2 < 1$, натуральное число $k_2 > k_1$ таким образом, чтобы $\frac{1}{k_2} < \operatorname{dist}(f(C_{r_2}), \lambda) < \frac{1}{k_1+1}$. Проводя в $U(r_1, r_2) = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$ конечное число разрезов по окружностям C_r и конечное число радиальных разрезов, получим разбиение замкнутой области $\overline{B_2} = \overline{f(U(r_1, r_2))}$ на замкнутые криволинейные четырехугольники диаметра $< \frac{1}{k_2^2}$. Объединение границ этих четырехугольников обозначим через λ_2.

Продолжая неограниченно эти построения, получим искомый компакт $E = \lambda \cup \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j$. Выполнение условия (A), и, значит, условия (S) в каждой точке $a \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j$ проверяется обычным образом. По построению, a – граничная точка криволинейного четырёхугольника K из приведённых выше разбиений, ограниченного четырьмя простыми дугами без общих внутренних точек. Соединяем некоторую точку области K дугой Жордана τ с достижимой граничной точкой a для области K, где $\tau \setminus \{a\} \subset K$. Тогда на дуге τ можно выбрать континуум γ в шаре $B(a, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, таким образом, чтобы $\operatorname{diam} \gamma \geqslant \frac{1}{2} \max\limits_{z \in \tau} |z - a|$. Следовательно, в выбранной точке $a \in E \setminus \lambda$ условие (A) выполняется с постоянной $s(a) = \frac{1}{2}$. На самом деле постоянную $s(a)$ можно выбрать сколь угодно близкой к единице.

Покажем, что в каждой точке $a \in \lambda$ условие (A) не выполняется. Действительно, предположим, что оно выполняется в некоторой точке $a \in \lambda$. Тогда для каждого шара $B(a, \varepsilon)$ и континуума $\gamma \subset (B(a, \varepsilon) \setminus E) \cap \mathbb{C}$, взятого из определения 2, найдётся криволинейный четырёхугольник K, натуральное число k_j, $j \geqslant 1$ (см. приведённые выше построения), и постоянная $s(a)$ такие, что

$$\frac{1}{k_j^2} \geqslant \operatorname{diam} \gamma \geqslant s(a) \max_{z \in \gamma} |z - a| \geqslant s(a) \frac{1}{k_j},$$

что при $j \to \infty$ даёт противоречие: $s(a) = 0$. Следовательно, в точках $a \in \lambda$ условие (A) не выполнено.

С другой стороны, в области B проведём простую ломаную τ, соединяющую выбранную точку $a \in \lambda$ с некоторой точкой области B, где $\tau \backslash \{a\} \subset B$. При этом выбор τ осуществим таким образом, чтобы пересечение τ с границей ∂K любого криволинейного четырёхугольника K из рассмотренных выше построений было либо пустым, либо состояло из конечного числа точек.Кроме того, потребуем, чтобы в пересечении $\tau \cap (H \setminus E)$ содержалась последовательность точек a_j, $j \geqslant 1$, сходящихся к точке a и не являющихся центрами окружностей, на которых, возможно, лежат невырожденные дуги из $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j$. Такой выбор возможен, так как $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j$ состоит из счётного числа аналитических дуг. Возьмём теперь шар $B(a, \varepsilon)$ и на пересечении $B(a, \varepsilon) \cap (H \setminus E) \cap \tau$ выберем точку $b = a_j$ из указанной выше последовательности $\{a_j\}$ так, чтобы дуга кривой τ, соединяющая a_j с точкой a, лежала в $B(a, \varepsilon)$. Положим $\widetilde{r}_0 = \frac{1}{2}|a - b|$.

Тогда у сферы $S(b, r)$ для всех $r \in (0; \widetilde{r}_0]$ пересечения $S(b, r) \cap \tau$, $S(b, r) \cap (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j)$ являются не более чем счётными множествами. Поэтому $S(b, r) \cap B(a, |b - a|) \cap (H \setminus E) \neq \varnothing$ для всех $r \in (0; \widetilde{r}_0]$ и, значит, в определении 2 в качестве r_0 можно взять $\widetilde{r}_0$ и положить $s_1(a) = \frac{1}{2}$.

Теорема 1. *Любой компакт E в гиперплоскости $H \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, удовлетворяющий условию (S), является NED-множеством в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть гиперплоскость H разбивает $\mathbb{R}^n$ на открытые полупространства $\mathbb{R}^n_+$ и $\mathbb{R}^n_-$. Возьмём произвольно точку $a \in E$ и невырожденные отрезки $L_1 \subset \mathbb{R}^n_+ \cup \{a\}$ и $L_2 \subset \mathbb{R}^n_- \cup \{a\}$ с общим концом в a, ортогональные гиперплоскости H. Если будет доказано, что семейство $\Gamma(L_1, L_2, \mathbb{R}^n \setminus E)$ имеет бесконечный n-модуль, то теорема 3.2 из [1] или теорема 6 из [7] даёт требуемое утверждение.

Допустим, что $M(L_1, L_2, \mathbb{R}^n \setminus E) < +\infty$. Тогда для рассматриваемого семейства континуумов найдётся допустимая метрика $\rho(x)$, суммируемая на $\mathbb{R}^n$ с n-й степенью. Положим $\varepsilon = \frac{\tau(s_1(a))}{2^{n+1}}$, где $\tau(t)$ – функция Тейхмюллера, выражающая конформную ёмкость экстремального кольца Тейхмюллера в $\mathbb{R}^n$ с параметром $t > 0$ (см. [14, 7.18]). Отметим, что $\tau(t)$ – монотонно убывающая функция.

В силу абсолютной непрерывности интеграла от суммируемой функции, найдём $\delta > 0$ такое, что

$$\delta < \min\{\mathcal{H}^1(L_1), \mathcal{H}^1(L_2)\}, \qquad \int\limits_{B(a,\delta)} \rho^n(x) d\mathcal{L}_n < \varepsilon.$$

Поскольку функция ρ остаётся допустимой метрикой и для семейства Γ_1 всех континуумов в $\overline{B(a,\delta)} \setminus E$, пересекающихся с каждым из отрезков L_1 и L_2, то $M(\Gamma_1) < \varepsilon$. Согласно условию (S), найдутся точка $b \neq a$ из шара $\overline{B(a,\delta)}$, отрезок $[0; r_0]$ и исключительное множество $e \subset [0; r_0]$ такие, что

$$S(b,r) \cap \left\{(\overline{B(a,|b-a|)}\right\} \cap (H \setminus E) \neq \varnothing \quad \text{для всех} \quad r \in (0; r_0] \setminus e.$$

Отсюда, в частности, следует, что e – компакт на $[0; r_0]$ и существует последовательность отрезков τ_j, $j \geqslant 1$, из $\left\{\overline{B(a,|b-a|)}\right\} \cap (H \setminus E)$, для которых справедливо $\bigcup\limits_{k \geqslant 1} \nu_k = [0; r_0] \setminus e$. Здесь $\nu_k = \Big\{r : S(b,r) \cap \Big(\bigcup\limits_{j=1}^{k} \tau_j\Big) \neq \varnothing\Big\}$. Положим $T_k = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \tau_j$, $T = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \tau_j$. Обозначив символом J инверсию относительно сферы $S(a,|b-a|)$, рассмотрим последовательность конденсаторов $P_k = \{T_k \cup J(T_k), L_1 \cup L_2 \cup J(L_1) \cup J(L_2), \mathbb{R}^n\}$.

Возьмём луч L, исходящий из точки b (здесь точку b будем отождествлять в $\mathbb{R}^n$ с точкой $(0,0,\ldots,0)$, а луч L – с отрицательной полуосью x_1). Зададим сферическую симметризацию f, взяв в качестве оси симметризации луч L, а в качестве сфер симметризации – сферы $S(b,r)$. Тогда (см. [12, §8.2]) для n-ёмкости конденсатора P_k, $k \geqslant 1$, имеет место оценка

$$\begin{gathered} C_n(T_k \cup J(T_k), L_1 \cup L_2 \cup J(L_1) \cup J(L_2), \mathbb{R}^n) \\ \geqslant C_n(f(T_k \cup J(T_k)), \mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{R}^n \setminus (L_1 \cup L_2 \cup J(L_1) \cup J(L_2))), \mathbb{R}^n). \end{gathered}$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$ и учитывая выбор компакта E, получим:

$$\lim_{k \to \infty} C_n(P_k) \geqslant \tau\left(\frac{|b-a|}{r_0}\right) \geqslant \tau(s_1(a)). \tag{2}$$

Пусть Γ_2 – семейство всех континуумов в $\mathbb{R}^n$, пересекающихся как с $T \cup J(T)$, так и с прямой, содержащей отрезки L_1 и L_2. Из равенства

(1) следует, что

$$M(\Gamma_2) = \lim_{k\to\infty} M(T_k \cup J(T_k), L_1 \cup L_2 \cup J(L_1) \cup J(L_2), \mathbb{R}^n)$$
$$= \lim_{k\to\infty} C_n(P_k) \geqslant \tau(s_1(a)). \tag{3}$$

Поскольку семейство Γ_2 симметрично относительно гиперплоскости H, то по принципу симметрии (см. [1, п. 6.5.1]) для модуля семейства Γ_3 всех континуумов из Γ_2, лежащих в $\mathbb{R}^n_+ \cup T \cup J(T)$, справедливо равенство $M(\Gamma_3) = \frac{1}{2}M(\Gamma_2) \geqslant \frac{\tau(s_1(a))}{2}$.

Семейство Γ_3 симметрично относительно сферы $S(a, |b-a|)$; используя тот же принцип симметрии для модуля семейства Γ_4 всех континуумов из Γ_3, лежащих в замкнутом шаре $\overline{B(a, |b-a|)}$, получим $M(\Gamma_4) = \frac{1}{2}M(\Gamma_3) \geqslant \frac{\tau(s_1(a))}{4}$. Наконец, для семейства Γ_5 всех континуумов из Γ_4, пересекающихся с каждым из отрезков L_1, L_2 и лежащих в $(\overline{B(a, |b-a|)} \setminus H) \cup T$, применение того же принципа симметрии даёт соотношение

$$M(\Gamma_5) = \frac{M(\Gamma_4)}{2^{n-1}} \geqslant \frac{\tau(s_1(a))}{2^{n+1}}.$$

Из включения $\Gamma_5 \subset \Gamma_1$ следует оценка $M(\Gamma_1) \geqslant \frac{\tau(s_1(a))}{2^{n+1}} = \varepsilon$, что противоречит предположению $M(\Gamma_1) < \varepsilon$. Следовательно,

$$M(L_1, L_2, \mathbb{R}^n \setminus E) = +\infty.$$

Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть компакт E в гиперплоскости $H \subset \mathbb{R}^n$ есть объединение последовательности простых поверхностей E_j, $j \geqslant 1$, каждая из которых имеет размерность $\leqslant n-2$. Тогда E – NED-множество в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. По знаменитой теореме Брауэра об инвариантности области [6, с. 247], каждая поверхность E_j не содержит сегмента гиперплоскости H. Следовательно, компакт E как счётное объединение множеств E_j, $j \geqslant 1$, есть нигде не плотное множество в гиперплоскости H относительно топологии этой гиперплоскости. Аналогично, переводя дополнительно k-мерную сферу преобразованием Мёбиуса на k-мерную гиперплоскость, получим, что для любого $j \geqslant 1$ и произвольной точки $x_0 \in H$ числовое множество $\{r : S(x_0, r) \cap E_j \cap H$ содержит сегмент простой поверхности сферы $S(x_0, r) \cap H\}$ по упомянутой теореме Брауэра будет не более чем счётным. В противном случае в области параметризации поверхности E_j будет содержаться

бесконечное множество непересекающихся сегментов с диаметрами, ограниченными снизу одним и тем же положительным числом. Это в силу ограниченности области параметризации поверхности E_j даёт противоречие. Отсюда $e(x_0) = \bigcup\limits_{j\geqslant 1}\{r : S(x_0, r) \cap E_j \cap H$ содержит сегмент простой поверхности сферы $S(x_0, r) \cap H\}$ – счётное множество.

Возьмём теперь произвольно точку a из E и выберем в множестве $(B(a,\varepsilon)\cap H)\setminus E$, $\varepsilon > 0$, точку $x_0 \neq a$. Тогда в точке a для E выполняется (S)-условие с $r_0 = |x_0 - a|$, $b = x_0$, $s_1(a) = 1$ и $e = e(x_0) \cap [0; r_0]$. Здесь учитывается, что счётное множество точек в $\mathbb{R}^n$ является n-исключительным в смысле Фюгледе [11]. Значит, по теореме 1 компакт E – NED-множество в $\mathbb{R}^n$. Теорема доказана. □

Следующее утверждение вместе с теоремой 1 содержит как частный случай теорему 3.4 из [1].

Теорема 3. *Пусть компакт E в гиперплоскости $H \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, есть объединение двух множеств E_1 и E_2, где*

1) *E_1 – компакт в $\mathbb{R}^n$ и множество $H \setminus E_1$ имеет не более чем счётное число компонент связности H_k, $k \geqslant 1$, и в топологии гиперплоскости H справедливо равенство $\bigcup\limits_{k\geqslant 1} \partial H_k = E_1$;*
2) *$E_2 \cap H_k$ есть объединение не более чем счётного числа простых поверхностей E_{kj}, $j \geqslant 1$ размерности, не более $n-2$.*

Тогда E – NED-множество в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Покажем, что в каждой точке $a \in E$ выполняется условие (S). Если точка a принадлежит множеству $E_2 \cap H_k$, $k \geqslant 1$, то проверка (S)-условия в этой точке аналогична проверке (S)-условия в точке a из доказательства теоремы 2. Если $a \in E_1 = \bigcup\limits_{k\geqslant 1} \partial H_k$, то пусть k_0 такое, что $a \in \partial H_{k_0}$. По определению граничной точки H_{k_0} (в топологии H), найдётся непрерывная кривая $\gamma(t) : [0; 1) \to \mathbb{R}^n$ такая, что $\gamma = \gamma([0; 1)) \subset H_{k_0}$, $a \in \overline{\gamma}$. Если a – единственная точка из $\overline{\gamma} \setminus \gamma$, то выбор точки b и числа r_0 для условия (S) в точке a осуществим по схеме, предложенной для точки $a \in \lambda$ из примера в замечании 2. Поэтому рассмотрим случай, когда в $\overline{\gamma}\setminus\gamma$ есть точка $c \neq a$. Поскольку в определении 3 условие (S) нужно проверять для достаточно малых $\varepsilon > 0$, то выбор шара $B(a,\varepsilon)$ подчиним условию: $c \notin \overline{B(a,\varepsilon)}$. Тогда найдётся дуга γ_1 кривой γ, соединяющая точку c_1, $|c_1 - a| < \frac{\varepsilon}{3}$, и точку c. Пусть b будет первой точкой пересечения дуги γ со сферой $S(a,\varepsilon)$,

если совершать обход γ от точки c_1 к точке c. Положим $r_0 = |b-c_1|$. По построению, $r_0 \geqslant \frac{2}{3}\varepsilon = \frac{2}{3}|b-a|$ и $S(b,r) \cap \gamma_1 \neq \varnothing$ для всех $r \in (0; r_0)$. С другой стороны, заменяя в доказательстве теоремы 2 множество E_j на E_{kj}, $j \geqslant 1$, найдём счётное множество $e_k \subset [0; r_0]$ такое, что $(B(a, |b-a|) \cap S(b,r) \cap H) \setminus E \neq \varnothing$ для всех $r \in [0; r_0] \setminus e_k$.

Следовательно, условие (S) выполняется для компакта E в точке $a \in E_1$ с $r_0 = |b-a|$, $s_1(a) = \frac{2}{3}$ и $e = e_k$. По теореме 1, в силу произвола в выборе точки $a \in E$, это завершает доказательство теоремы. $\square$

Литература

1. В. В. Асеев, *NED-множества, лежащие в гиперплоскости.* — Сиб. мат. ж. **50** (2009), 760–775.
2. В. В. Асеев, А. В. Сычев, *О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений.* — Сиб. мат. ж. **15** (1974), 1213–1227.
3. С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, *Критерий устранимости множеств для пространств L^1_p, квазиконформных и квазиизометрических отображений.* — Сиб. мат. ж. **18** (1977), 48–68.
4. Б. Гелбаум, Д. Олмстед, *Контрпримеры в анализе.* Мир, 1967.
5. В. Голубев, *Однозначные аналитические функции: Автоморфные функции.* М., 1961.
6. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М., 1966.
7. Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Достаточность семейства ломаных в методе модулей и устранимые множества.* — Сиб. мат. ж. **51** (2010), 1028–1042.
8. А. П. Копылов, *Об устранимости плоских множеств в классе трехмерных квазиконформных отображений.* — *Метрические вопросы теории функций и отобр.*, вып. 1 (1969), 21–23. Наукова думка, Киев.
9. В. А. Шлык, *Весовые емкости, емкости конденсаторов и исключительные множества по Фюгледе.* — Докл. РАН **332** (1993), 428–431.
10. L. Ahlfors, A. Beurling, *Conformal invariants and function-theoretic null-sets.* — Acta Math. **83** (1950), 101–129.
11. B. Fuglede, *Extremal length and functional completion.* — Acta Math. **126** (1957), 171–219.
12. M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions.* — GAKUTO Intern. Series, Gakkōtosho, 2003.
13. J. Väisälä, *On the null-sets for extremal distances.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. **322** (1962), 1–12.
14. M. Vuorinen, *Conformal Geometry and Quasiregular Mappings.* — Lect. Notes Math., Springer-Verlag, 1988.

Shlyk V. A. The spherical symmetrization and NED-sets on a hyperplane.

The simple sufficient condition of NED-sets on a hyperplane are derived in terms of spherical approachability of its points from complement of this set on the hyperplane.

Дальневосточный
федеральный университет,
ул. Суханова, 8,
690950 Владивосток, Россия
E-mail: shlyknv@yandex.ru

Поступило 23 мая 2012 г.