Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 404, 2012 г.

О. М. Фоменко

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ АВТОМОРФНЫХ L-ФУНКЦИЙ

§1

Пусть

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (\sigma > 1, \ \text{ где } \ s = \sigma + it)$$

– дзета-функция Римана. Мультипликативная функция $d_k(n)$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, возникает из соотношения (подробности см. в [1])

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) n^{-s} \quad (\sigma > 1);$$

напомним, что $f(n)$ – мультипликативная функция, если из $(m, n) = 1$ следует

$$f(mn) = f(m) f(n).$$

Справедливо неравенство

$$d_k(n) \ll n^{\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ любое постоянное число и $\ll$-константа зависит от k и ε.

В 1928 году Титчмарш [1, с. 204] доказал следующую Ω-теорему.

Пусть σ – фиксированное число, $1/2 \leqslant \sigma < 1$. Тогда неравенство

$$\big|\zeta(\sigma + it)\big| > \exp\big(\log^{\alpha} t\big) \tag{1.1}$$

выполняется для некоторой последовательности $t = t_n$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$, при условии

$$\alpha < 1 - \sigma.$$

При доказательстве (1.1) важную роль играет поведение функции

$$F_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k^2(n)}{n^s} \quad (\sigma > 1)$$

Ключевые слова: автоморфные L-функции, дзета-функция Дедекинда, экстремальные значения.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 08-01-00233).

при растущем k (см. [1, с. 206, лемма δ]). В [2] доказательство Титчмарша анализировалось и обобщалось, а в [3] неравенство (1.1) усиливалось. Уточнениям результата (1.1) были посвящена также работы [?].

Цель настоящей работы – получить аналоги неравенства (1.1) для некоторых автоморфных L-функций, а в ряде случаев усилить их. Рассмотрим пространство $S_\varkappa(\Gamma)$ голоморфных параболических форм

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) \exp(2\pi i n z)$$

чётного веса $\varkappa \geqslant 12$ относительно полной модулрной группы $S = \mathrm{SL}\,(2, \mathbb{Z})$, гду $z = x + iy$, $y > 0$; $S_\varkappa(\Gamma)^+$ – множество собственных форм Гекке с $a_f(1) = 1$ из этого пространства. Ниже всегда $f \in S_\varkappa(\Gamma)^+$, причем форму f мы фиксируем. Положим

$$\lambda_f(n) = a_f(n)/n^{\frac{\varkappa-1}{2}};$$

По теории Гекке и классическому результату Делиня, для каждого простого p имеем

$$\lambda_f(p) = \alpha_p + \overline{\alpha}_p, \quad \alpha_p \overline{\alpha}_p = 1.$$

С формой $f \in S_\varkappa(\Gamma)^+$ ассоциируем следующие автоморфные L-функции, первоначально определенные в полуплоскости $\sigma > 1$:

$$L(s, f) = \prod_p \left(1 - \alpha_p p^{-s}\right)^{-1} \left(1 - \overline{\alpha}_p p^{-s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{-s}$$

(L-функция Гекке формы f);

$$L(s, \mathrm{sym}^2 f) = \prod_p \left(1 - \alpha_p^2 p^{-s}\right)^{-1} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} \left(1 - \overline{\alpha}_p^2 p^{-s}\right)^{-1}$$
$$= \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n^2) n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$$

(L-функция симметрического квадрата формы f):

$$L(s, f \times f) = \prod_p \left(1 - \alpha_p^2 p^{-s}\right)^{-1} \left(1 - p^{-s}\right)^{-2} \left(1 - \overline{\alpha}_p^2 p^{-s}\right)^{-1}$$
$$= \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n^2) n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{-s}$$

(L-функция свертки Ранкина–Сельберга формы f с собой).

Кроме того, мы будем рассматривать дзета-функцию Дедекинда $\zeta_{K_3}(s)$ кубического поля K_3 над $\mathbb{Q}$.

Введенные L-функции аналитически продолжаются на всю s-плоскость, причем $L(s,f)$ и $L(s,\operatorname{sym}^2 f)$ являются целыми функциями, а $L(s,f\times f)$ и $\zeta_{K_3}(s)$ имеют особенность – простой полюс в точке $s=1$; каждая из них обладает функциональным уравнением, связывающим значения в точках s и $1-s$.

§2

В настоящем параграфе доказывается теорема об экстремальных значениях функции $|L(\sigma+it,\operatorname{sym}^2 f)|$ при $1/2\leqslant\sigma<1$, σ фиксировано, $t\to\infty$. Эта теорема вполне аналогична (1.1). Другие автоморфные L-функции, рассмотренные выше, трактуются сходно. Сначала приведем известные факты о средних значениях. 1) Из результатов [7] следует асимптотическая формула

$$\int\limits_1^T \Big|L(\sigma+it,\operatorname{sym}^2 f)\Big|^{2k}\,dt\sim CT, \tag{2.1}$$

где $T\to\infty$, k – любое положительное число (не обязательно целое) и σ, $1/2<\sigma<1$, фиксировано; при этом предполагается справедливость гипотезы Римана для $L(s,\operatorname{sym}^2 f)$. Если ограничиться интервалом $2/3<\sigma<1$ и взять $k=1$, то асимптотика (2.1) справедлива без всяких гипотез (см. [8]).

2) Из результатов [9] следует соотношение

$$\int\limits_1^T \left|L\left(\frac{1}{2}+it,\operatorname{sym}^2 f\right)\right|^{2k}dt\asymp T(\log T)^{k^2},$$

где $T\to\infty$, $0<k<\frac{2}{3}$; при этом предполагается справедливость гипотезы Римана для $L(s,\operatorname{sym}^2 f)$.

Теорема 1. *Фиксируем σ_0, ε, c, причем $1/2\leqslant\sigma_0<1$, $\varepsilon>0$, $c>0$. Пусть $(\log X)^c\leqslant Y\leqslant X$. Тогда для всех $X\geqslant X_0(\sigma_0,\varepsilon,c)$ имеем*

$$\max_{X\leqslant t\leqslant X+Y}\Big|L(\sigma_0+it,\operatorname{sym}^2 f)\Big|>\exp\Big\{\big(\log Y\big)^{1-\sigma_0-\varepsilon}\Big\}.$$

Доказательство. Мы будем следовать схеме Титчмарша, изложенной в [2] в довольно общем виде. Рассмотрим ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \quad (s = \sigma + it),$$

абсолютно сходящийся в полуплоскости $\sigma > 1$ и продолжимый как мероморфная функция в полуплоскость $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$.

Предположение α**.** Если $a_k(n)$ определены для $k = 1, 2, 3, \ldots$ соотношением

$$\big(F(s)\big)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \quad (\sigma > 1),$$

и $F_k(\sigma)$ соотношением

$$F_k(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big|a(n)\big|^2}{n^\sigma} \quad (1 < \sigma < 2),$$

то, для фиксированного σ, при $k \to \infty$

$$\log\log F_k(\sigma) \sim (2/\sigma)\log k.$$

Предположение β**.** Пусть $c > 0$ – произвольная константа и $\big(\log T\big)^c \leqslant Y \leqslant T$, где $T \geqslant 20$ фиксировано, и σ_0 фиксировано в интервале $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$. Мы предполагаем, что $F(s)$ регулярна в области $\sigma \geqslant \sigma_0$, $T \leqslant t \leqslant T + Y$, и что в этой области

$$F(s) \leqslant T^A,$$

где A – константа, зависящая, возможно, только от $F(s)$.

Сформулировнных предположений достаточно для доказательства аналога теоремы 1 в случае функции $F(s)$ и интервала $1/2 < \sigma_0 < 1$. Это показано в [2] и вкратце будет продемонстрировано ниже, а пока вернемся к $L(s, \mathrm{sym}^2 f)$. В нашем случае

$$F(s) = L(s, \mathrm{sym}^2 f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} \quad (\sigma > 1),$$

$$\big(F(s)\big)^k = L^k(s, \mathrm{sym}^2 f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n,k)}{n^s} \quad (\sigma > 1),$$

$$F_k(\sigma) = F_k(\sigma, \mathrm{sym}^2 f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n,k)^2}{n^\sigma} \quad (\sigma > 1).$$

Предположение β является старндартным свойством функции $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$.

Обратимся к предположению α. Достаточно доказать, что для фиксированного σ, $1 < \sigma < 2$, и $k > k_0$ существуют постоянные $0 < c' < c''$, для которых

$$\exp\left(\frac{c' k^{2/\sigma}}{\log k}\right) < F_k(\sigma, \operatorname{sym}^2 f) \exp\left(\frac{c'' k^{2/\sigma}}{\log k}\right). \tag{2.2}$$

Оценку сверху доказывать не нужно, поскольку подобная оценка верна для $F_k(\sigma)$ в случае $F(s) = \zeta(s)$ (см. книгу Ивича [10, с. 239]); при этом используем $\nu(n,k)| \leqslant d_{3k}(n)$.

Для получения оценки снизу в (2.2) заметим, что, по мультипликативности,

$$F_k(\sigma, \operatorname{sym}^2 f) = \prod_p A_p,$$

где

$$A_p = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \big(\nu(p^r, k)\big)^2 p^{-\sigma}.$$

Поскольку $\nu(p,k) = kc_p$, имеем

$$F_k(\sigma, \operatorname{sym}^2 f) > \prod_p \big(1 + k^2 c_p^2 p^{-\sigma}\big).$$

Если $0 < x < \frac{1}{2}$, то $e^{x/2} < 1 + x$; кроме того, $c_p^2 \leqslant 9$; поэтому при $p > (18k^2)^{1/\sigma}$ имеем

$$1 + k^2 c_p^2 p^{-\sigma} > \exp\left(\frac{1}{2} k^2 c_p^2 p^{-\sigma}\right).$$

Следовательно,

$$F_k(\sigma, \operatorname{sym}^2 f) > \prod_{p > 18k^2} \exp\left(\frac{1}{2} k^2 c_p^2 p^{-\sigma}\right). \tag{2.3}$$

Введем функцию на множестве $n = 2, 3, 4, \ldots$:

$$\Lambda_0(n) = \begin{cases} c_p^2 \log p, & \text{если } \ n = p; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Чтобы оценить снизу правую часть неравенства (2.3), достаточно найти при $k \to \infty$ асимптотику величины

$$\frac{1}{2}k^2 \sum_{(18k^2)^{1/\sigma} < n \leqslant (k^4)^{1/\sigma}} \frac{\Lambda_0(n)}{n^\sigma \log n} \quad (= \Sigma_1).$$

Применим формулу частного суммирования

$$\sum_{a<n\leqslant b} u_n g(n) = -\int_a^b A(x)g'(x)\,dx + A(b)g(b),$$

где

$$A(x) = \sum_{a<n\leqslant x} u_n.$$

Введем суммы

$$\mathbb{C}(x) = \sum_{n\leqslant x} \Lambda_0(n)$$

и положим $u_n = \Lambda_0(n)$, $g(x) = x^{-\sigma}(\log\, x)^{-1}$. Тогда

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2}k^2 \cdot \Bigg\{ -\int_{(18k^2)^{1/\sigma}}^{k^{4/\sigma}} \Big\{\mathbb{C}(x) - \mathbb{C}\big((18k^2)^{1/\sigma}\big)\Big\} g'(x)\,dx$$
$$+ \Big\{\mathbb{C}\big(k^{4/\sigma}\big) - \mathbb{C}\big((18k^2)^{1/\sigma}\big)\Big\} g\big(k^{4/\sigma}\big)\Bigg\}.$$

Нам необходима асимптотика

$$\mathbb{C}(x) = x + O\Big(e^{-c'\sqrt{\log\, x}}\Big),$$

которая доказана в [9]. Для этого требуются весьма глубокие свойства функции

$$T(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^{-s};$$

подробности см. в [9]. Проведя вычисления, имеем

$$\log\, F_k(\sigma, \mathrm{sym}^2 f) > \Sigma_1 = \left(\frac{1}{\sigma-1}\right) \cdot \frac{1}{2}\,\frac{(18k^2)^{1/\sigma}}{18} \cdot \frac{1}{\log((18k^2)^{1/\sigma})}$$
$$+ O\Big(k^{2/\sigma} \cdot \log^{-2/k}\Big) = C_\sigma k^{2/\sigma} \cdot \log^{-1} k \cdot \Big(1 + O\big(\log^{-1} k\big)\Big).$$

Тем самым, оценка снизу в (2.2) доказана. Следовательно, предположение α для $F_k(\sigma, \mathrm{sym}^2 f)$ выполняется.

Покажем теперь, как в [2] доказывается аналог теоремы 1 в общем случае функции $F(s)$, удовлетворяющей предположениям α и β. Сделаем следующее допущение: для $T \leqslant t \leqslant T + Y$,

$$\big|F(\sigma_0 + it)\big| \leqslant M, \tag{γ}$$

где $M \geqslant 1$ будет выбрано позднее. Доказательство опирается на ряд лемм (подробности в работе [2]).

Лемма 1. *Если $T \geqslant T_0$ (константа, зависящая от A, c, σ_0), то для $\sigma \geqslant \sigma_0$, $T + Y/800 \leqslant t \leqslant T + Y - Y/800$,*

$$|f(s)| \leqslant MC_1,$$

где C_1 – константа, зависящая от A, c и σ_0.

Доказательство очевидно и опирается на принцип максимума модуля.

Заметим, что ниже константы $C_2, C_3, \ldots$, O-константы и $\ll$-константы зависят от A, c, σ_0, σ_1, ε.

Лемма 2. *Пусть σ_1, $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$, фиксировано и t_1 – вещественная переменная с $t_1 = T + Y/4 + \theta$, где $|\theta| \leqslant Y/80$. Наконец, пусть $s_1 = \sigma_1 + it_1$. Тогда равномерно по t_1 имеем*

$$\big(F(s_1)\big)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k(n)}{n^{s_1}} e^{-n/Y} + O\big(MC_2)^k\big).$$

Доказательство стандартно.

Лемма 3. *Имеем*

$$800Y^{-1} \int\limits_{u}^{u+Y/800} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_k(n) n^{-s_1} e^{-n/Y} \right|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \big|a_k(n)\big|^2 n^{-2\sigma_1} e^{-2n/Y} + O(W),$$

где

$$W = Y^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \big|a_k(n)\big|^2 n^{1-2\sigma_1} e^{-2n/Y}.$$

Доказательство следует из теоремы о средних значениях полиномов Дирихле [10, с. 130].

Лемма 4. *Имеем*

$$\big(MC_3\big)^{2k} + W \gg \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big|a_k(n)\big|^2}{n^{2\sigma_1}} e^{-2n/Y}.$$

Доказательство следует из комбинации лемм 1, 2 и 3.

Лемма 5. *Для каждой константы* ε $(0 < \varepsilon < 1)$ *имеем*

$$(MC_4)^{2k} \gg F_k(2\sigma_1) - C_5 Y^{-\varepsilon} F_k(2\sigma_1 - 2\varepsilon).$$

Доказательство использует лемму 4.

Лемма 6. *На основании предположения* α *имеем*

$$(MC_4)^{2k} \gg \exp\left\{k^{(1/\sigma_1)-\varepsilon}\right\} - C_5 Y^{-\varepsilon} \exp\left\{k^{1/(\sigma_1-\varepsilon)+\varepsilon}\right\}.$$

Доказательство следует из леммы 5.

Лемма 7. *Предположим, что*

$$Y^{\varepsilon} \gg 2C_5 \exp k^{1/(\sigma_1-\varepsilon)+\varepsilon}$$

и что $\sigma_1^{-1} - \varepsilon > 0$ *и* $k^{\varepsilon} > 2$. *Тогда*

$$MC_4 < (1/C_6)^{1/(2k)} \exp\left\{k^{(1/\sigma_1)-1-2\varepsilon}\right\}$$

Доказательство следует из леммы 6.

Лемма 8. *Пусть* k *– наибольшее целое такое, что*

$$Y^{\varepsilon} \geqslant 2C_5 \exp\left\{k^{1/(\sigma_1-\varepsilon)+\varepsilon}\right\}.$$

Тогда

$$\max_{T \leqslant t \leqslant T} \big|F(\sigma_0 + it)\big| \geqslant (1/C_4)\big(1/C_6\big)^{1/(2k)} \cdot \exp\left\{k^{(1/\sigma_1)-1-2\varepsilon}\right\}.$$

Утверждение леммы справедливо, иначе лемма 7 противоречит допущению (γ).

Так как ε произвольно и σ_1 может быть выбрано достаточно близким к ε_0, лемма 8 завершает доказательство следующего аналога теоремы 1 для $F(s)$, если выполняются предположения α и β:

для каждой контанта σ_0, $1/2 < \sigma_0 < 1$, справедливо неравенство

$$\max_{T \leqslant t \leqslant T+Y} \big|F(\sigma_0 + it)\big| > \exp\left\{(\log Y)^{1-\sigma_0-\varepsilon}\right\}, \tag{2.4}$$

где ε – любая положительная константа и $T \geqslant T_0(\sigma_0, A, c, \varepsilon)$.

Вернемся к нашему случаю

$$F(s) = L(s, \mathrm{sym}^2 f).$$

По принципу максимума модуля, из (2.4) легко следует утверждение теоремы 1 для $1/2 \leqslant \sigma_0 < 1$ (см. [1, с. 208]). Теорема 1 доказана. $\square$

Замечание 1. Поскольку полученные нами теоремы для

$$F(s) = L(s, f), L(s, f \times f), \zeta_{K_3}(s)$$

идентичны теореме 1, мы их не приводим.

§3

В настоящем параграфе рассматриваются улучшения результатов из §2. В [5] Монтгомери предложил еще один метод для получения Ω-результатов типа (1.1). В частности, он доказал:

пусть σ_0, $1/2 < \sigma_0 < 1$, фиксировано. Тогда при $t \to \infty$

$$\log\big|\zeta(\sigma_0 + it)\big| = \Omega_+\big((\log t)^{1-\sigma_0}(\log\log t)^{-\sigma_0}\big). \tag{3.1}$$

Метод Монтгомери тесно связан с плотностными результатами о нулях $\zeta(s)$; при доказательстве (3.1) с $1/2 < \sigma_0 < 1$ используется известная оценка Ингама

$$N(\sigma, T) \ll T^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)}\ (\log T)^5,$$

где $N(\sigma, T)$ – количество нулей $\rho = \beta + i\gamma$ функции $\zeta(s)$, для которых $\beta \geqslant \sigma$, $0 \leqslant \gamma \leqslant T$.

В работе [11] метод Монтгомери перенесен на класс L-функций. В случае $R(s) = L(s, \mathrm{sym}^2 f)$, $L(s, f \times f)$, $\zeta_{K_3}(s)$ из [11] следует

$$\log|R(\sigma_0 + it)| = \Omega_+\big((\log t)^{1-\sigma_0}(\log\log t)^{-\sigma_0}\big) \tag{3.2}$$

лишь при $2/3 < \sigma_0 < 1$, поскольку для соответствующих L-функций пока не доказаны хорошие плотностные теоремы.

Лучше обстоит дело с $L(s, f)$; в этом случае в силу плотностных результатов Ивича [12] оценка (3.2) справедлива с $1/2 < \sigma_0 < 1$.

Ниже мы улучшим результаты §2 и (3.2) для функций $L(s, f \times f)$ и ζ_{K_3} (при некоторых ограничениях на K_3).

Теорема 2. *Пусть c – любая положительная константа, $T \geqslant 200$, $\log T \geqslant (200)^{1/c}$, и $(\log T)^c \leqslant Y \leqslant T$. Тогда существуют положительные константы D_1, D_2 такие, что*

$$\max_{1\leqslant t\leqslant T+Y} \left| L\left(\frac{1}{2}+it, f\times f\right)\right| \geqslant \exp\left\{D_1\left(\frac{\log Y}{\log\log Y}\right)^{1/2}\right\}, \tag{3.3}$$

и

$$\max_{1\leqslant t\leqslant T+Y} \left|L\big(\sigma_0+it, f\times f\big)\right| \geqslant \exp\left\{D_2\frac{(\log Y)^{1-\sigma_0}}{\log\log Y}\right\}, \tag{3.4}$$

для каждой константы σ_0, $\frac{1}{2}<\sigma_0<1$.

Далее, существует положительная константа D_3 такая, что для $(\log\log T)^c \leqslant Y \leqslant T$ и $\log\log T \geqslant (200)^{1/c}$ имеем

$$\max_{1\leqslant t\leqslant T+Y} \left|L\big(1+it, f\times f\big)\right| \geqslant D_3 \log\log Y. \tag{3.5}$$

Константы D_1, D_3 зависят от c, константа D_2 – от c и σ_0.

Доказательство. Мы воспользуемся следующими результатами, сформулированными в Замечании 3 работы [3, с. 342].

Пусть $\{a_n\}$ – последовательность комплексных чисел, обладающая следующими свойствами. (i) Функция

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad (s=\sigma+it),$$

сходящаяся в некоторой полуплоскости комплексной плоскости, может быть аналитически продолжена в $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, $T\leqslant t\leqslant T+Y$, и там

$$|F(s)| \leqslant T^A,$$

где A – константа. (ii) Существует бесконечное множество S простых чисел и постоянное целое число q такие, что a_n вещественные и одного и того же знака (0 может быть приписан любой знак), если n пробегает целые числа, целиком состоящие из простых множителей из S (в первой степени) и простых множителей, делителей числа q, в любой степени. (iii) Если n имеет вид

$$q\prod_{p\in S} p^{b(p)}$$

с $b(p)=0$ или 1 и $b(p)=0$ для всех p, кроме конечного множества p, то $|a_n|$ ограничено снизу. (iv) Существует константа $D'>1$ такая, что

для всех $x \geqslant 10$ величина

$$\sum_{x<p<D'x,\, p\in S} 1$$

лежит между $c'x/\log x$ и $c''x/\log x$, где $0 < c' < c''$ – некоторые константы (замечание: граница сверху всегда существует).

При этих условиях справедливы неравенства (3.3)–(3.5) с заменой $L(s, f\times f)$ на функцию $F(s)$.

Докажем теперь, что функция

$$L(s, f\times f) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{-s} \quad (\operatorname{Re} s > 1)$$

обладает свойствами (i)–(iv). Свойство (i), очевидно, выполняется. Переходим к (ii). Из §1 следует, что $d_p = \lambda_f^2(p) = \alpha_p^2 + 2 + \overline{\alpha}_p^2$, откуда

$$d_p^2 = \left(\alpha_p^2 + 2 + \overline{\alpha}_p^2\right)^2 = \left(\alpha_p^2 + 1 + \overline{\alpha}_p^2\right)^2 + 1 + 2\left(\alpha_p^2 + 1 + \overline{\alpha}_p^2\right).$$

Последнее эквивалентно

$$d_p^2 = c_p^2 + 1 + 2c_p.$$

В §1 показано, что

$$\sum_{p\leqslant x} c_p^2 = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Из свойств $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$ следует, что

$$\sum_{p\leqslant x} c_p = \frac{x}{\log^2 x}.$$

Поэтому имеем

$$\sum_{p\leqslant x} d_p^2 = \frac{2x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right). \tag{3.6}$$

Положим $q = 1$ и

$$S = \left\{p \mid d_p = \lambda_f^2(p) \geqslant 1\right\}.$$

Свойства (ii) и (iii) для $L(s, f\times f)$ выполняются, при этом бесконечность множеств S следует из (3.6).

Переходим к (iv). Пусть $D' > 1$ – любое постоянное число. Докажем, что

$$c'\frac{x}{\log x} < \sum_{x<p<D'x,\, p\in S} 1 < c''\frac{x}{\log x}$$

с некоторыми положительными константами c', c''. Достаточно доказать существование c'. Доказательство ведём от противного. Пусть $c' > 0$ не существует. Тогда найдется бесконечная строго возрастающая последовательность чисел $\{x_k; x_k \to \infty$, если $k \to \infty\}$ такая, что

$$\sum_{x_k<p<D'x_k, p\in S} 1 \leqslant \frac{x_k}{\log x_k} \cdot \psi(x_k), \tag{3.7}$$

где $\psi(x_k) \to 0$ при $x_k \to \infty$. Поскольку $d_p \leqslant 4$, из (3.7) следует

$$\sum_{x_k<p<D'x_k, p\in S} d_p^2 \leqslant \frac{4^2 \cdot x_k}{\log x_k} \cdot \psi(x_k). \tag{3.8}$$

С другой стороны, так как для $p \notin S$ $d_p < 1$, то

$$\sum_{x_k<p<D'x_k, p\notin S} d_p^2 \leqslant \frac{(D'-1)x_k}{\log x_k} + O\left(\frac{x_k}{\log^2 x_k}\right). \tag{3.9}$$

Но из (3.6) следует

$$\sum_{x_k<p<D'x_k} d_p^2 = \frac{2x_k}{\log x_k}(D'-1) + O\left(\frac{x_k}{\log^2 x_k}\right). \tag{3.10}$$

Ясно, что вместе (3.8) и (3.9) противоречат (3.10) при $x_k \to \infty$. Следовательно, свойство (iv) выполняется для $L(s, f \times f)$, и теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Пусть K_3 – кубическое поле над $\mathbb{Q}$, задаваемой присоединением корня полинома $x^3 + ax^2 + bx + c$ дискриминанта $D < 0$ с группой Галуа S_3. Тогда в условиях теоремы 2 справедливы неравенства (3.3)–(3.5) с заменой $L(s, f \times f)$ на $\zeta_{K_3}(s)$.*

Доказательство. Дадим два варианта доказательства теоремы.

I. Имеем

$$\zeta_{K_3}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} M(n) n^{-s} \quad (\operatorname{Re} s > 1),$$

где $M(n)$ – количество целых идеалов поля K_3 нормы n. Известно [13, 14], что

$$\zeta_{K_3}(s) = \zeta(s) L(s, \varphi), \tag{3.11}$$

где $\varphi(z)$ – голоморфная параболическая форма веса 1 относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(|D|)$, являющаяся собственной формой Гекке;

$$\varphi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b(m) \exp(2\pi i m z).$$

В силу (3.11), имеем

$$M(n) = \sum_{d \mid m} b(d);$$

В частности, $M(p) = 1 + b(p)$. Справедлива асимптотика

$$\sum_{p \leqslant x} M(p)^2 = \frac{2x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right), \tag{3.12}$$

которая доказывается на основе равенства

$$M(p)^2 = 1 + 2b(p) + b^2(p)$$

с помощью хорошо известных фактов [15]. Асимптотики (3.6) и (3.12) имеют главный член $2x/\log x$. Следовательно, если положить $q = 1$,

$$S = \{p \mid M(p) \geqslant 1\},$$

то рассуждения из доказательства теоремы 2 приводят также к доказательству теоремы 3.

II. Пусть K_6 – нормальное замыкание поля K_3; отметим, что поле K_6 содержит мнимое квадратичное поле $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Второй вариант доказательства теоремы 3 использует следующий результат Койке [14]:

$$M(p) = 1, \quad \text{если} \quad \left(\frac{D}{p}\right) = -1.$$

Если $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$, то $p = \rho\rho'$ в K_2; в этом случае $M(p) = 3$, если ρ вполне распадается в K_6, и $M(p) = 0$, если ρ остается простым в K_6.

Следовательно, если положить $q = 1$,

$$S = \left\{p \,\middle|\, \left(\frac{D}{p}\right) = -1\right\},$$

свойства (i)–(iv) для $\zeta_{K_3}(s)$ выполняются, и теоремы 3 доказана. $\square$

Литература

1. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function.* 2nd edn, revised by D. R. Heath-Brown, New York, 1986.
2. K. Ramachandra, *On the frequency of Titchmarsh's phenomenon for $\zeta(s)$.* — J. London Math. Soc. (2) **8** (1974), 683–690.
3. R. Balasubramanian, K. Ramachandra, *On the frequency of Titchmarsh's phenomenon for $\zeta(s)$.* III. — Proc. Indian Acad. Sci. **86A** (1977), 341–351.
4. N. Levinson, *Ω-theorems for the Riemann zeta-function.* — Acta Arithm. **20** (1972), 317–330.
5. H. L. Montgomery, *Extreme values of the Riemann zeta-function.* — Comment. Math. Helv. **52** (1977), 511–518.
6. K. Soundararajan, *Extreme values of zeta and L-functions.* — Math. Ann. **342** (2008), 467–486.
7. О. М. Фоменко, *Дробные моменты автоморфных L-функций.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **383** (2010), 179–192.
8. K. Matsumoto, *Liftings and mean value theorems for automorphic L-functions.* — Proc. London Math. Soc. (3) **90** (2005), 297–320.
9. О. М. Фоменко, *Дробные моменты автоморфных L-функций.* — Алгебра и анализ **22** (2010), No. 2, 204–224.
10. A. Ivić, *The Riemann zeta-function.* New York, 1985.
11. A. Sankaranarayanan, J. Sengupta, *Omega theorems for a class of L-functions (A note on the Rankin–Selberg zeta-function).* — Funct. Approx. Comment. Math. **36** (2006), 119–131.
12. A. Ivić, *On zeta-functions associated with Fourier coefficients of cusp forms.* — Proc. of the Amalfi Conf. on Analytic Number Theory (Maiori, 1989), Salerno (1992), pp. 231–246.
13. *Алгебраическая теория чисел.* Под редакцией Дж. Касселса и А. Фрёлиха, М., 1969.
14. M. Koike, *Higher reciprocity law, modular forms of weight 1 and elliptic curves.* — Nagoya Math. J. **98** (1985), 109–115.
15. C. J. Moreno, *The Hoheisel phenomenon for generalized Dirichlet series.* — Proc. Amer. Math. Soc. **40** (1973), 47–51.

Fomenko O. M. Extreme values of automorphic L-functions.

We treat Ω-theorems for some automorphic L-functons, and for the Rankin–Selberg L-function $L(s, f \times f)$ in particular.

For example, as t tends to infinity,

$$\log\left|L\left(\frac{1}{2}+it, f\times f\right)\right| = \Omega_+\left(\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right)^{1/2}\right),$$

and

$$\log\left|L\left(\sigma_0+it, f\times f\right)\right| = \Omega_+\left(\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right)^{1-\sigma_0}\right)$$

for fixed $\sigma_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 30 августа 20012 г.