Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 404, 2012 г.

О. М. Фоменко

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДРОБНЫХ ЧАСТЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1

В работе изучаются асимптотики, связанные с распределением дробных частей значений функций от двух переменных.

В этом параграфе мы сформулируем известные результаты И. М. Виноградова [1, с. 119–135], а также результаты М. А. Гельбке [2].

В §2 оценки И. М. Виноградова из §1 позволяют в частном случае доказать асимптотику распределения дробных частей, близкую к окончательной. Это делается в теореме 1, которая затем применяется к оценке суммы

$$\sum_{k\leqslant p} P(kp), \tag{1.1}$$

где $P(x)$ – остаток в проблеме круга, p – любое достаточно большое простое число (см. теорему 2). Нам требуется также формула Ландау [3, с. 96], тесно связанная с формулой Вороного [3, с. 96].

В §3 методом Г. Вейля исследуется распределение дробных частей значений многочлена специального вида от двух переменных для простейшей области суммирования – прямоугольника. Полученный результат близок к окончательному.

Сформулируем теперь в виде двух предложений результаты И. М. Виноградова из [1, с. 119–135]. Первое из этих предложений есть частный случай леммы 3, а второе – теорема этой работы.

Пусть в области Ω переменных x и y, ограниченной замкнутым контуром, задана функция $z = f(x, y)$, определяемая алгебраическим уравнением, степень которого фиксирована. Пусть, далее, имеется четыре параметра A, B, U, W, которые могут беспредельно возрастать одновременно с изменением области Ω и вида функции $f(x, y)$,

---

Ключевые слова: дробные доли, формула Вороного, проблема круга.
Работа частично поддержана РФФИ (грант 08-01-00233).

и, сверх того, четыре постоянных r, s, l, m, удовлетворяющих следующим условиям:

$$A \geqslant B \geqslant 1; \quad U \geqslant 2; \quad W \geqslant 2; \quad U \geqslant A; \quad W \geqslant B;$$

$$1 \leqslant r; \quad 1 \leqslant s; \quad 0 \leqslant l; \quad 0 \leqslant m < 1.$$

На функцию $z = f(x, y)$ в области Ω мы наложим следующие ограничения:

$$A^{-1} \leqslant \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \leqslant rA^{-1}; \quad B^{-1} \leqslant \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \leqslant sB^{-1},$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 \leqslant m^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad \left|\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right| \leqslant l(AU)^{-1}.$$

Кроме того, допустим, что разности между наибольшим и наименьшим значениями абсцисс и ординат точек области Ω будут соответственно не больше U и W.

Относительно самого контура области Ω сделаем следующие предположения:

a) Число точек пересечения контура с каждой прямой $y = \mathrm{const}$ не превосходит 2.

b) Число точек пересечения контура с каждой кривой $\frac{dz}{dx} = \mathrm{const}$ не превосходит 2.

c) При любом целом $m = 1, 2, \ldots, [A]$ имеет место неравенство

$$\sum T_m < K \frac{UW \log A}{\sqrt{AB}},$$

где K – постоянная (не зависит от m); суммирование распространяется на все точки пересечения прямых $y =$ целому числу с контуром и T_m есть наименьшее из чисел

$$\sqrt{\frac{A}{m}}; \quad \frac{1}{\left(m \frac{dz}{dx}\right)}.$$

При соблюдении всех этих условий будет иметь место

Предложение 1. *При* $1 \leqslant m \leqslant B$

$$\sum_{\Omega} \sum e^{2\pi i m f(x,y)} = O\left(\frac{UW \log A}{\sqrt{AB}}\right),$$

где

$$\sum_{\Omega}\sum \cdots$$

означает суммирование по всем целым точкам (x, y), *принадлежащим области* Ω.

Предложение 2. *Пусть выполнены все условия предложения* 1. *Обозначим буквой* n *число целых точек области* Ω. *Располагая дробные части* $\{f(x, y)\}$, *соответствующие всем целым точкам области* Ω, *в порядке их возрастания*

$$y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n,$$

мы при любом целом положительном $n_1 \leqslant n$ *будем иметь*

$$\sum_{i=1}^{n_1} y_1 = \frac{n_1^2}{2n} + Rn_1 + O\left(\frac{U^2W^2\log^2 A}{n\sqrt{AB}}\right),$$

где

$$R \ll \frac{UW\log U}{n(AB)^{1/4}}, \tag{1.2}$$

и от n_1 *не зависит.*

Теперь мы сформулируем результат М. А. Гельбке.

Предложение 3. *Пусть область* Ω *ограничена таким замкнутым контуром, что любая прямая, параллельная оси* x *или оси* y, *делит область самое большее на две части. Пусть в области* Ω *функция* $f(x, y)$ *имеет первые и вторые производные, причем вторые производные удовлетворяют условиям предложения* 1. *Сохраняя смысл введенных там обозначений* A, B, U, W, *наложим условия*

$$U \ll A, \quad W \ll B,$$

отличные от виноградовских. Тогда сумма дробных частей $\{f(x, y)\}$ *по всем целым точкам области* Ω *имеет вид*

$$\sum_{\Omega}\sum \{f(x, y)\} = \frac{\Pi}{2} + O\Big((AB)^{\frac{3}{4}}\sqrt{\log(AB)}\Big),$$

где Π – *число целых точек в области* Ω.

§2

Пусть $\psi(x) := x - [x] - \frac{1}{2} = \{x\} - \frac{1}{2}$. В настоящем параграфе мы получим еще одну оценку суммы

$$\sum_{\Omega}\sum \psi(f(x,y)), \tag{2.1}$$

отличную от приведенных выше, а затем с помощью этой оценки исследуем сумму (1.1).

Будем оценивать сумму (2.1), если выполнены все условия предложения 1 (в частности, $U \geqslant A$, $W \geqslant B$), а также дополнительное допущение

$$\Pi \asymp UW, \tag{2.2}$$

где Π – число целых точек в области Ω.

Из результатов работы [4] следует существование коффициентов $\gamma(j)$ таких, что

$$\psi(w) \leqslant J^{-1} + \sum_{1\leqslant |j| \leqslant J} \gamma(j) e(jw) \tag{2.3}$$

и $\gamma(j) \ll |j^{-1}|$.

По (2.3) и предложению 1 с учетом выбора $J = B$ и (2.2) имеем

$$\sum_{\Omega}\sum \psi(f(x,y)) \ll \Pi \cdot J^{-1} + \sum_{1\leqslant j\leqslant J} j^{-1} \Big|\sum_{\Omega}\sum e\big(jf(x,y)\big)\Big|$$
$$\ll \frac{UW}{B} + \frac{UW \log A \cdot \log B}{\sqrt{AB}}.$$

Следовательно, справедлива следующая

Теорема 1. *При условиях, сформулированных в предложении* 1 *и в* (2.2)*, и дополнительном допущении* $A \asymp B$ *имеем*

$$\sum_{\Omega}\sum \big\{f(x,y)\big\} = \frac{\Pi}{2} + O\left(\frac{UW \log^2 A}{A}\right). \tag{2.4}$$

Замечание 1. i) В условиях теоремы 1 и с её помощью предложение 2 может быть уточнено. А именно, вместо границы (1.2) справедлива граница

$$R \ll A^{-1} \log^2 U.$$

ii) Результат (2.4) близок к окончательному. Это обсуждается в §3.

Переходим теперь к изучению суммы (1.1), в которой

$$P(x) := \sum_{0\leqslant n\leqslant x} r_2(n) - \pi x,$$

$r_2(n)$ – количество целочисленных решений уравнения

$$u^2 + v^2 = n, \quad n \geqslant 0 \ - \text{ целое число.}$$

Напомним очевидный факт $r_2(n) \leqslant 4d(n)$, где $d(n)$ – количество делителей числа n. Легко доказать сравнительно грубую оценку $d(n) \ll n^{\varepsilon}$, где $\ll$-константа зависит от ε. Хорошо известно, что $P(x) \ll x^{1/3}$ (В. Серпинский (1906); доказаны и слегка более точные результаты [5]), но оценка $P(x) \ll x^{\alpha}$ с $\alpha < 1/4$ не может выполняться. Гипотетическая оценка $P(x) \ll x^{1/4+\varepsilon}$ составляет знаменитую проблему круга.

Нам необходима также следующая формула Ландау [6], [3, с. 117]:

$$\int_0^x P(y)\,dy = -\frac{1}{\pi^2}x^{3/4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_2(n)}{n^{5/4}}\cos\left(2\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{1/4}\right). \tag{2.5}$$

Теорема 2. *Справедлива оценка*

$$P(p) + P(2p) + P(3p) + \cdots + P(p\cdot p) \ll p\log^2 p,$$

где p – любое достаточно большое простое число.

Замечание 2. Теорему 2 можно значительно расширить и обобщить.

Доказательство теоремы 2. В лемме 1 возьмем в качестве области Ω круг $x^2 + y^2 < p^2$, а в качестве функции $f(x, y)$

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{p}.$$

Легко видеть, что

$$\sum\sum_{\Omega}\{f(x, y)\} = \sum_{1\leqslant n<p^2} r_2(n)\left\{\frac{n}{p}\right\}.$$

По теореме 1,

$$\sum_{1\leqslant n<p^2} r_2(n)\left\{\frac{n}{p}\right\} = \frac{\Pi}{2} + O(p\log^2 p), \tag{2.6}$$

где

$$\frac{\Pi}{2} = \frac{\pi}{2}p^2 + \frac{1}{2}P(p^2)$$

и

$$P(p^2) \ll p^{2/3}.$$

С другой стороны, непосредственным счетом получаем

$$\sum_{1\leqslant n<p^2} r_2(n)\left\{\frac{n}{p}\right\} = \sum_{1\leqslant n<p} r_2(n)\left\{\frac{n}{p}\right\} + \sum_{p+1\leqslant n<2p} r_2(n)\left\{\frac{n}{p}\right\}$$

$$+ \sum_{2p+1\leqslant n<3p} r_2(n)\left\{\frac{n}{p}\right\} + \dots + \sum_{p^2-p+1\leqslant n<p\cdot p} r_2(n)\left\{\frac{n}{p}\right\}$$

$$= \left(\sum_{1\leqslant n\leqslant p} r_2(n)\frac{n}{p} + \sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r_2(n)\frac{n-p}{p} + \sum_{2p+1\leqslant n\leqslant 3p} r_2(n)\frac{n-2p}{p}\right.$$

$$\left. + \dots + \sum_{p^2-p+1\leqslant n\leqslant p\cdot p} r_2(n)\frac{n-(p^2-p)}{p}\right)$$

$$-\Big(r_2(p) + r_2(2p) + r_2(3p) + \dots + r_2(p\cdot p)\Big) =: S - S_0,$$

где

$$S_0 = r_2(p) + r_2(2p) + r_2(3p) + \dots + r_2(p\cdot p).$$

Далее,

$$S = \frac{1}{p}\sum_{1\leqslant n\leqslant p^2} r_2(n)\cdot n - 0 - \sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r_2(n)\cdot 1$$

$$- \sum_{2p+1\leqslant n\leqslant 3p} r_2(n)\cdot 2 - \dots - \sum_{p^2-p+1\leqslant n\leqslant p\cdot p} r_2(n)\cdot(p-1).$$

Обозначим

$$S_1 := \frac{1}{p}\sum_{1\leqslant n\leqslant p^2} r_2(n)\cdot n.$$

Очевидно,

$$-\left(0 + \sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r_2(n)\cdot 1 + \sum_{2p+1\leqslant n\leqslant 3p} r_2(n)\cdot 2 + \dots + \sum_{p^2-p+1\leqslant n\leqslant p\cdot p} r_2(n)\cdot(p-1)\right)$$

$$= -p\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant p} r_2(n) + \sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r_2(n) + \sum_{2p+1\leqslant n\leqslant 3p} r_2(n) + \dots + \sum_{p^2-p+1\leqslant n\leqslant p\cdot p} r_2(n)\right)$$

$$+ \sum_{1\leqslant n\leqslant p} r_2(n) + \sum_{1\leqslant n\leqslant p} r_2(n) + \sum_{1\leqslant n\leqslant p} r_2(n) + \dots + \sum_{1\leqslant n\leqslant p} r_2(n)$$

$$+\sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r_2(n)+\sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r_2(n)\cdots+\sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r_2(n)$$
$$+\sum_{2p+1\leqslant n\leqslant 3p} r_2(n)+\cdots+\sum_{2p+1\leqslant n\leqslant 3p} r_2(n)$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\sum_{p^2-p+1\leqslant n\leqslant p\cdot p} r_2(n).$$

Обозначим

$$S_2 := p\sum_{1\leqslant n\leqslant p^2} r_2(n);$$

тогда

$$S = S_1 - S_2 + S_3,$$

где

$$S_3 := \sum_{1\leqslant n\leqslant p} r_2(n)+\sum_{1\leqslant n\leqslant 2p} r_2(n)+\sum_{1\leqslant n\leqslant 3p} r_2(n)+\cdots+\sum_{1\leqslant n\leqslant p\cdot p} r_2(n).$$

Собираем:

$$\sum_{1\leqslant n<p^2} r_2(n)\left\{\frac{n}{p}\right\} = S_1 - S_2 + S_3 - S_0. \tag{2.7}$$

Будем последовательно вычислять каждый член в правой части (2.7). Начнем с $S_1 =: \frac{1}{p}S_1'$. К сумме

$$S_1' = \sum_{0<n\leqslant p^2} r_2(n)\cdot n$$

сначала применим абелево суммирование, а затем используем формулу Ландау (2.5). Имеем

$$S_1' = -\int_0^{p^2}\Big(\pi x + P(x) - 1\Big)\cdot 1\cdot dx + \Big(\pi p^2 + P(p^2) - 1\Big)\cdot p^2$$

$$= -\frac{\pi}{2}\,x^2\Big|_0^{p^2} - \int_0^{p^2} P(x)\,dx + p^2 + \pi p^4 + p^2P(p^2) - p^2$$

$$= -\frac{\pi}{2}p^4 + O\Big(p^{3/2}\Big) + \pi p^4 + p^2P(p^2) = O\Big(p^{3/2}\Big) + \frac{\pi}{2}p^4 + p^2P(p^2),$$

откуда

$$S_1 = \frac{\pi}{2}p^3 + pP(p^2) + O\Big(p^{1/2}\Big).$$

Очевидно,

$$-S_2 = -p\Big(\pi p^2 + P(p^2) - 1\Big).$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} S_3 &= \big(\pi p + P(p) - 1\big) + \big(\pi \cdot 2p + P(2p) - 1\big) \\ &\quad + \big(\pi \cdot 3p + P(3p) - 1\big) + \cdots + \big(\pi \cdot p^2 + P(p^2) - 1\big) \\ &= \frac{\pi}{2}(p^3 + p^2) + \big(P(p) + P(2p) + P(3p) + \cdots + P(p^2)\big) - p. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} -S_0 &= -\big(r_2(p) + r_2(2p) + r_2(3p) + \cdot + r_2(p^2)\big) \\ &= -\big(r_2(p) + r_2(2p) + r_2(3p) + \cdot + r_2((p-1)p)\big) + O(1) \\ &= -r_2(p)\big(r_2(1) + r_2(2) + r_2(3) + \cdot + r_2(p-1)\big) + O(1) \\ &= -r_2(p)\big(\pi p + O(p^{1/3)}\big) + O(1) \ll p. \end{aligned}$$

Подставляя полученные оценки в (2.7), имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leqslant n < p^2} r_2(n)\left\{\frac{n}{p}\right\} \\ &\qquad = \frac{\pi}{2}p^2 + \big(P(p) + P(2p) + P(3p) + \cdots + P(p^2)\big) + O(p). \qquad (2.8) \end{aligned}$$

Приравниваем правые части равенств (2.6) и (2.8):

$$\frac{\pi}{2}p^2 + O\big(p \log^2 p\big) = \frac{\pi}{2}p^2 + \big(P(p) + P(2p) + P(3p) + \cdots + P(p^2)\big) + O(p)$$

и теорема 2 доказана. □

§3

Рассмотрим многочлен с вещественными коэффициентами

$$F(x, y) := \frac{x^2}{\alpha_1} + \frac{y^2}{\alpha_2} =: F_1(x) + F_2(y),$$

причем $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ достаточно велики; Ω означает прямоугольник $0 < x \leqslant N_1, 0 < x \leqslant N_2$. Ниже полагаем $\log \alpha_1 \asymp \log N_1$, $\log \alpha_2 \asymp \log N_2$; $\log_2 z := \log\log z$; $\delta(N_1, N_2) := \exp\Big(c\big(\log N_1 / \log_2 N_1 + \log N_2 / \log_2 N_2\big)\Big)$, $c > 0$.

Введем нужную в дальнейшем функцию $f(n)$. Для этого напомним следующее утверждение [7]:

для каждого $\varepsilon > 0$ и целого $n > n_0(\varepsilon)$

$$d(n) < \exp\left((1+\varepsilon)\log 2 \cdot \frac{\log n}{\log_2 n}\right).$$

Обозначим правую часть этого неравенства через $f(n)$, причем положим $f(1) = f(2) = 1$. Мы видим, что $f(n)$ – возрастающая функция от n.

Теорема 3. *Справедлива оценка*

$$\sum_{\Omega}\sum \psi\big(F(n_1,n_2)\big) \ll \left(\frac{N_1}{\sqrt{\alpha_1}} + \sqrt{\alpha_1}\right)\left(\frac{N_2}{\sqrt{\alpha_2}} + \sqrt{\alpha_2}\right)\delta(N_1,N_2) \quad (3.1)$$

с некоторой константой $c > 0$, входящей в $\delta(N_1N_2)$.

Доказательство теоремы 3. Мы используем схему доказательства теоремы 1 [8]. Из (2.3) следует

$$S_{\mathrm{I}} := \sum_{\Omega}\sum \psi\big(F(n_1,n_2)\big) \ll \Pi \cdot J^{-1}$$
$$+ \sum_{1\leqslant j\leqslant J} j^{-1}\left|\sum_{\substack{0<n_1\leqslant N_1\\ 0<n_2\leqslant N_2}} e\big(j\big(F_1(n_1)+F_2(n_2)\big)\big)\right| =: \Pi\cdot J^{-1} + S_{\mathrm{II}},$$

где Π – число целых точек в прямоугольника Ω. По неравенству Коши,

$$S_{\mathrm{II}} \ll \left(\sum_{j\leqslant J} j^{-1}\left|\sum_{0<n_1\leqslant N_1} e(jF_1(n_1))\right|^2\right)^{1/2}$$
$$\times\left(\sum_{j\leqslant J} j^{-1}\left|\sum_{0<n_2\leqslant N_2} e(jF_2(n_2))\right|^2\right)^{1/2} =: \left(S_{\mathrm{III}}^{(1)}\right)^{1/2}\cdot\left(S_{\mathrm{III}}^{(2)}\right)^{1/2}.$$

Положим

$$J = \left[\alpha_1^{1/2}\alpha_2^{1/2}\right], \quad q_1 = [\alpha_1], \quad q_2 = [\alpha_2].$$

Используя метод Г. Вейля [9] и работу В. Н. Попова [10], в которой функция $f(n)$ играет важную роль, имеем (подробности в [8])

$$S_{\mathrm{III}}^{(1)} \ll N_1\log J + f(2JN_1)\left(\frac{N_1^2}{q_1} + N_1\log q_1 + q_1\log q_1\right)J =: U_1,$$

$$S_{\mathrm{III}}^{(2)} \ll N_2\log J + f(2JN_2)\left(\frac{N_2^2}{q_2} + N_2\log q_2 + q_2\log q_2\right)J =: U_2.$$

Поэтому

$$S_{\mathrm{II}} \ll U_1^{1/2} \cdot U_2^{1/2}, \quad S_{\mathrm{I}} \ll \Pi \cdot J^{-1} + U_1^{1/2} \cdot U_2^{1/2},$$

и теорема доказана. □

Замечание 3. i) Проиллюстрируем доказанную теорему следующей "точной" формулой. Пусть $p_1 > p_2 \geqslant 3$ – простые числа. Тогда

$$\sum_{\substack{1 \leqslant n_1 \leqslant p_1 \\ 1 \leqslant n_2 \leqslant p_2}} \left(\left\{ \frac{n_1^2}{p_1} + \frac{n_2^2}{p_2} \right\} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-h(-p_1p_2)}{2\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{p_1p+2}\right)\right)}, & \text{если } \ p_1p_2 \equiv -1 \pmod 4, \\ 0, & \text{если } \ p_1p_2 \equiv 1 \pmod 4, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $h(-p_1p_2)$ – число классов чисто коренных квадратичных форм отрицательного определителя $-p_1p_2$.

Аналогичный результат для одной переменной содержится в работе И. М. Виноградова [1, с. 106].

Известно, что

$$\big(p_1p_2\big)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \underset{\varepsilon}{\ll} h(-p_1p_2) \ll \big(p_1p_2\big)^{\frac{1}{2}} \log(p_1p_2),$$

где $\underset{\varepsilon}{\ll}$-константа является неэффективной. Расширенная гипотеза Римана приводит к

$$\frac{\big(p_1p_2\big)^{\frac{1}{2}}}{\log_2(p_1p_2)} \ll h(-p_1p_2) \ll (p_1p_2)^{1/2} \log_2(p_1p_2).$$

Поэтому теорема 2 при $N_1 \geqslant \alpha_1$, $N_2 \geqslant \alpha_2$ близка к неулучшаемой. Уточнить, видимо, можно будет лишь множитель $\delta(N_1, N_2)$ в (3.1).

ii) Прокомментируем теорему 1. Базируясь на формуле (3.2) с $p_1 \asymp p_2$, легко построить области Ω, удовлетворяющие условиям, наложенным в теореме 1. Беря

$$f(x, y) = \frac{x^2}{p_1} + \frac{y^2}{p_2}$$

и эти Ω, можно продемонстирировать близость остаточного члена в (2.4) к неулучшаемому.

Литература

1. И. М. Виноградов, *Избранные труды.* М., 1952.
2. М. А. Гельбке, *Об асимптотическом выражении суммы дробных частей функции двух переменных.* — Изв. АН СССР. Отдел. физ.-мат. наук (1930), 409–423.
3. E. Landau, *Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre.* Berlin, 1962.
4. J. D. Vaaler, *Some extremal problems in Fourier analysis.* — Bull. Amer. Math. Soc. (2) **12** (1985), 183–216.
5. M. N. Huxley, *Area, lattice points, and exponential sums.* Oxford, 1996.
6. E. Landau, *Über die Gitterpunkte in einem Kreise.* — Math. Z. **5** (1919), 319–320.
7. К. Прахар, *Распределение простых чисел.* М., 1967.
8. О. М. Фоменко, *О распределении дробных частей многочленов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 191–201.
9. H. L. Montgomery, *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis.* Providence, Rhode Island, 1994.
10. В. Н. Попов, *О числе целых точек под параболой.* — Мат. заметки **18** (1975), 699–704.

Fomenko O. M. On the distribution of fractional parts of polynomials of two variables.

In the paper, upper bounds for sums of the form

$$\sum\sum_{(n_1,n_2)\in\Omega} \psi\big(f(n_1,n_2)\big),$$

where $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, $f(x,y)$ is a polynomial, $(n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^2$, and Ω is a domain in $\mathbb{R}^2$, are obtained.

One of the upper bounds is of interest, particularly in connection with a lattice point problem considered in Theorem 2.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 25 мая 2012 г.