Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 404, 2012 г.

Н. В. Проскурин

О НУЛЯХ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РЕШЁТКИ ЛИЧА

В этой короткой заметке мы намерены сообщить о результатах наших вычислений нулей дзета-функции ζ_{Leech} решётки Лича. Мы увидим, что нули сконцентрированы наиболее плотно вблизи прямых $\operatorname{Re} s = 23/2$ и $\operatorname{Re} s = 1/2$. Вообще говоря, дзета-функции решёток могут быть определены посредством преобразования Меллина по тета-функциям решёток, а тета-функции решёток являются модулярными формами. Поэтому и дзета-функцию решётки Лича естественно рассматривать в этом контексте. По теории модулярных форм удобно сослаться на книгу Серра [1], которая содержит всё необходимое. Мы начнем с краткого напоминания.

Рассмотрим модулярную форму f веса 12. Мы придерживаемся терминологии, принятой в [1], так что f определена и голоморфна на полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, удовлетворяет соотношению

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{12} f(z) \quad \text{для всех} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$$

и разложима в ряд Фурье

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{2\pi i m z} \tag{1}$$

с коэффициентами $c_m \in \mathbb{C}$. Модулярные формы веса 12 составляют векторное пространство над $\mathbb{C}$ размерности 2. Среди модулярных форм веса 12 имеется ряд Эйзенштейна E_6 с разложением Фурье

$$E_6(z) = 1 + \kappa \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{11}(m) e^{2\pi i m z}, \tag{2}$$

в котором $\kappa = 65520/691$ и $\sigma_{11}(m)$ — сумма 11-ых степеней положительных делителей числа m, и имеется параболическая форма, обозначим её Δ, с разложением Фурье

$$\Delta(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) e^{2\pi i m z}, \tag{3}$$

Ключевые слова: решетка Лича, нули дзета-функции.
Эта работа частично финансировалась грантом РФФИ 11-01-00239-а.

в котором коэффициенты $\tau(m)$ суть значения τ-функции Рамануджана. Формы E_6 и Δ являются собственными функциями операторов Гекке и их коэффициенты Фурье обладают известными свойствами мультипликативности. Каждая модулярная форма f веса 12 представима как линейная комбинация

$$f = \alpha E_6 + \beta\Delta \quad \text{с некоторыми} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Среди модулярных форм вида

$$f = E_6 + \gamma\Delta \quad \text{с} \quad \gamma \in \mathbb{Q}$$

имеются тета-функции чётных унимодулярных решёток в $\mathbb{R}^{24}$. В частности, f есть тета-функция решётки Лича, если $\gamma = -\kappa$.

Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 1$ и $d(m)$ — число положительных делителей числа m. Согласно известной гипотезе Рамануджана, для τ-функции имеет место неравенство

$$|\tau(m)| \leqslant d(m)\, m^{11/2}. \tag{5}$$

Эта гипотеза была доказана Делинем. Для коэффициентов Фурье формы f, см. (1), имеет место оценка

$$c_m \ll d(m)\, m^{11} \tag{6}$$

(постоянная в $\ll$ зависит только от f).

Форме f с разложением Фурье (1) поставим в соответствие функцию L_f, определённую рядом Дирихле с коэффициентами c_m

$$L_f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{m^s}. \tag{7}$$

Ряд (7) абсолютно сходится, см. (6), и определяет аналитическую функцию в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 12$, $s \in \mathbb{C}$. Эта функция связана с f преобразованием Меллина и продолжается мероморфно на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Если f – параболическая форма (т.е. $c_0 = 0$ в (1)), то L_f – целая функция. В противном случае L_f имеет простой полюс в точке $s = 12$ и этот полюс – единственная особенность функции L_f.

Пусть Γ – гамма-функция Эйлера и $s \in \mathbb{C}$. Положим

$$X_f(s) = (2\pi)^{-s}\, \Gamma(s)\, L_f(s).$$

Так определённая функция X_f инвариантна относительно замены s на $12 - s$, т. е. удовлетворяет функциональному уравнению

$$X_f(s) = X_f(12 - s). \tag{8}$$

Пусть ζ – дзета-функция Римана. Для L-функции ряда Эйзенштейна E_6 имеется представление

$$L_{E_6}(s) = \kappa\,\zeta(s)\,\zeta(s-11) \tag{9}$$

(с κ из (2)). Для функции L_Δ имеется разложение в произведение

$$L_\Delta(s) = \prod_p \bigl(1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}\bigr)^{-1} \tag{10}$$

по простым числам p, сходящееся при условии $\operatorname{Re} s > 13/2$, см. (5).

Если модулярная форма f представлена линейной комбинацией ряда Эйзенштейна E_6 и параболической формы Δ как в (4), то

$$L_f = \alpha L_{E_6} + \beta L_\Delta.$$

Это замечание, вместе с (9), сводит проблему вычисления значений L_f к проблеме вычисления значений функций ζ и L_Δ.

Для $s \in \mathbb{C}$ и $\eta \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re}\eta > 0$ положим

$$D(s,\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau(m)}{m^s}\,\frac{\Gamma(s, 2\pi m\eta)}{\Gamma(s)} \tag{11}$$

и

$$\Omega(s) = (2\pi)^{2s-12}\,\frac{\Gamma(12-s)}{\Gamma(s)}.$$

Здесь, поясним,

$$\Gamma(s,z) = \int_z^\infty \exp(-x)\,x^{s-1}\,dx$$

— неполная гамма-функция. Абсолютная величина $\Gamma(s, 2\pi m\eta)$ в (11) быстро убывает при $m \to \infty$, что обеспечивает абсолютную сходимость ряда при любом s. С этими обозначениями для всех $s \in \mathbb{C}$ и $\eta \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re}\eta > 0$ имеем

$$L_\Delta(s) = D(s,\eta) + \Omega(s)D(12-s,\eta^{-1}). \tag{12}$$

Это уравнение относится к классу функциональных уравнений из [2, 3]. Функциональное уравнение (8) следует очевидным образом из (12) с $\eta = 1$. Преимущество (12) состоит в возможности регулировать поведение рядов в правой части (12) выбором свободного параметра η.

Пусть a, b, c, d, ε – вещественные положительные числа. Для $s \in \mathbb{C}$ и вещественных положительных x, y под условиями

$$|\operatorname{Re} s| \leqslant a, \quad |\operatorname{Im} s| \geqslant b, \quad 4\pi^2 xy = |\operatorname{Im} s|^2, \quad c \leqslant y/x \leqslant d$$

имеем

$$L_\Delta(s) = \sum_{n\leqslant x} \frac{\tau(n)}{n^s} + \Omega(s) \sum_{n\leqslant y} \frac{\tau(n)}{n^{12-s}} + O\big(|\operatorname{Im} s|^{11/2-\operatorname{Re} s+\varepsilon}\big), \qquad (13)$$

где постоянная в O зависит только от a, b, c, d, ε и суммирование распространено на целые положительные n с указанными ограничениями. Уравнение (13) относится к классу приближённых функциональных уравнений. Оно является простым следствием общего результата из [3] и неравенства (5). Все такого рода функциональные уравнения выводятся из соответствующих уравнений со свободным параметром. В частности, (13) выводится из (12). Параметр η в (12) выбирается для этого таким образом, что

$$\arg\eta = \Big(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{|\operatorname{Im} s|}\Big)\operatorname{sign}(\operatorname{Im} s), \quad c \leqslant |\eta|^2 \leqslant d,$$

и при этом $2\pi x = |\operatorname{Im} s|/|\eta|$, $2\pi y = |\operatorname{Im} s|\,|\eta|$.

Для вычисления $L_\Delta(s)$ можно использовать представление (12). Более того, это единственное известное представление, позволяющее вычислить $L_\Delta(s)$ без каких-либо ограничений на s. Вместе с тем, если $\operatorname{Re} s$ существенно больше $11/2$, для вычисления $L_\Delta(s)$ можно использовать более простое представление (13). Ввиду (5), для $s \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} s > 13/2$ эйлеровское произведение (10) сходится и $L_\Delta(s)$ можно аппроксимировать произведением

$$\prod_{p\leqslant x} \big(1 - \tau(p)\,p^{-s} + p^{11-2s}\big)^{-1} \qquad (14)$$

с погрешностью

$$< \sum_{n>x} \frac{d(n)}{n^{\operatorname{Re} s-11/2}} \ll x^{-\operatorname{Re} s+13/2+\epsilon}$$

со сколь угодно малым вещественным $\epsilon > 0$. Используя (14), можно вычислить $L_\Delta(s)$, и при том весьма эффективно, по крайней мере для s с $\operatorname{Re} s > 8$.

Обратимся к функциональному уравнению (8). Лего видеть, что функции L_f имеют нули в полюсах гамма-функции. Это так называемые тривиальные нули. Все другие нули каждой из функций L_f расположены на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ симметрично относительно

точки $s = 6$. В случае, когда $\alpha/\beta \in \mathbb{R}$ в разложении (4), нули расположены также симметрично относительно вещественной прямой $\mathbb{R}$ и относительно критической прямой $\operatorname{Re} s = 6$. Согласно гипотезе Римана и (9), нетривиальные нули функции L_{E_6} лежат на прямых $\operatorname{Re} s = 23/2$ и $\operatorname{Re} s = 1/2$. Гипотетически, нетривиальные нули функции L_Δ лежат на прямой $\operatorname{Re} s = 6$.

Мы должны далее рассмотреть интегралы

$$I_f(\sigma, T) = \int\limits_{-T}^{T} |L_f(\sigma + it)|^2 dt \tag{15}$$

с вещественными σ и $T > 0$. Нас интересует поведение $I_f(\sigma, T)$ при $T \to \infty$. Пусть f – параболическая форма (т.е. $\alpha = 0$ в разложении (4)). Ввиду (5), при любом вещественном $\epsilon > 0$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant 13/2 + \epsilon$ имеем $L_\Delta(s) \ll 1$. Следовательно, $I_f(\sigma, T) \ll T$ при $T \to \infty$ с любым фиксированным $\sigma > 13/2$. Пусть теперь f — не параболическая форма. Положим

$$R(\sigma, T) = \int\limits_{1}^{T} |\zeta(\sigma + it)|^2 dt\,.$$

При $T \to \infty$ имеем $R(1/2, T) \sim T \log T$ и $R(\sigma, T) \ll T$, если $\sigma > 1/2$. Это хорошо известно, см. [4] . Отсюда легко выводим $I_f(23/2, T) \asymp T \log T$ и $I_f(\sigma, T) \ll T$ при $T \to \infty$ с любым фиксированным $\sigma > 23/2$, исключая только случай $\sigma = 12$, когда интеграл (15) расходится из-за полюса функции L_f в точке 12.

Для вещественных σ и $T > 0$ определим $N_f(T)$ как число нулей ρ функции L_f под условием $0 < \operatorname{Im} \rho < T$ и определим $N_f(\sigma, T)$ как число нулей ρ функции L_f под условиями $\operatorname{Re} \rho \geqslant \sigma$, $0 < \operatorname{Im} \rho < T$. (Нули подсчитываются с учётом кратностей.) Известным методом находится асимптотика

$$N_f(T) \sim \frac{1}{\pi} T \left(\log T - \log(2\pi) - 1\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Согласно общей теории функций, определённых рядами Дирихле, см. [5], из наших оценок для интегралов (15) следует, что для всех модулярных форм f имеет место оценка

$$N_f(\sigma, T) \ll T \quad \text{при} \quad T \to \infty,$$

если только $\sigma > 23/2$. В случае же, когда f – параболическая форма, эта оценка имеет место также и для всех $\sigma > 13/2$.

Пусть теперь $f = E_6 - \kappa\Delta$ – тета-функция решётки Лича. Определим дзета-функцию ζ_{Leech} как $\kappa^{-1}L_f$, так что

$$\zeta_{\mathrm{Leech}}(s) = \zeta(s)\,\zeta(s-11) - L_\Delta(s), \quad s \in \mathbb{C}. \tag{16}$$

Нетривиальные нули функции ζ_{Leech} расположены на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ симметрично относительно вещественной прямой $\mathbb{R}$ и относительно критической прямой $\operatorname{Re} s = 6$. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением нулей, лежащих в квадранте

$$\operatorname{Re} s \geqslant 6, \quad \operatorname{Im} s \geqslant 0. \tag{17}$$

Наши вычисления показывают, что в пределах $\operatorname{Im} s \leqslant 1845107$ в квадранте (17) имеется 3200000 нулей. Все эти нули – простые, а их вещественные части находятся между 11.13 и 12.85. Ниже на рисунке изображена гистограмма распределения вещественных частей вычисленных нулей.

Мы обнаруживаем, что нули функции ζ_{Leech} сконцентрированы наиболее плотно вблизи прямой $\operatorname{Re} s = 23/2$ и, виду известной симметрии, вблизи прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Этому можно дать объяснение, если обратиться к разложению (16). В полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant 13/2 + \epsilon$ со сколь угодно малым вещественным $\epsilon > 0$ имеем: $\zeta(s)$ мало отличается от 1, а абсолютная величина $L_\Delta(s)$ ограничена сверху константой (зависящей только от ϵ). Напротив, абсолютная величина $\zeta(s-11)$ не ограничена на любой прямой $\operatorname{Re} s = q$ с $q \leqslant 12$. Поэтому естественно ожидать, что нули функции ζ_{Leech} располагаются вблизи нулей функции $s \mapsto \zeta(s-11)$, т.е. нулей дзета-функции Римана ζ, сдвинутых на 11. Строгое доказательство, разумеется, должно включать более детальный анализ и какие-то утверждения типа теоремы Руше.

Отметим ещё, что дзета-функции решёток и, в частности, ζ_{Leech} можно трактовать как дзета-функции некоторых квадратичных форм. Применительно к ζ_{Leech}, основная теорема из [6] доставляет следующее утверждение: имеется $\asymp T\log T$ нулей ρ под условиями $23/2 - \epsilon < \operatorname{Re}\rho < 23/2 + \epsilon$ и $0 < \operatorname{Im}\rho < T$; здесь ϵ — сколь угодно малое положительное число.

Автор признателен О. М. Фоменко за полезные обсуждения и замечания.

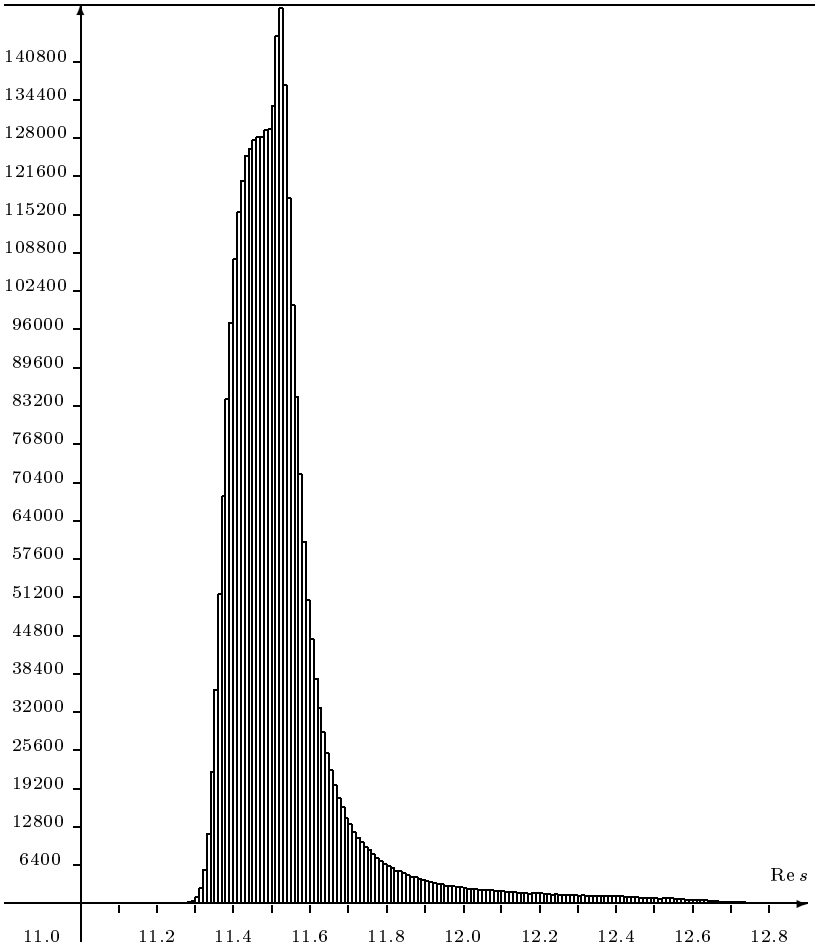

Рис. 1. Отрезок $[11.0, 12.9]$ разбит на 190 отрезков длины 0.01. Если $[a, b]$ — один из них, высота столбика над $[a, b]$ равна числу нулей ρ с $a < \operatorname{Re}\rho \leqslant b$ и $0 < \operatorname{Im}\rho < 1845107$.

Литература

1. J-P. Serre, *Cours d'arithmétique*. Presses Universitaires de France, Paris 1970.
2. А. Ф. Лаврик, *О функциональных уравнениях функций Дирихле*. — Изв. АН СССР, сер. матем. **31** (1967), 431–442.

3. А. Ф. Лаврик, *Приближённые функциональные уравнения функций Дирихле.* — Изв. АН СССР, сер. матем. **32** (1968), 134–185.
4. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes.* — Acta Math. **41** (1918), 119–196.
5. E. C. Titchmarsh, *The theory of functions.* Oxford university press (1939).
6. K. Ramachandra, A. Sankaranarayanan, *Hardy's theorem for zeta-functions of quadratic forms.* — Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **100** (1996), 217–226.

Proskurin N. V. On the zeros of the zeta function of the Leech lattice.

The author reports on computation of the zeros of the zeta function of the Leech lattice.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191023
E-mail: np@pdmi.ras.ru

Поступило 20 сентября 2012 г.