Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 404, 2012 г.

Г. В. Кузьмина

КВАДРАТИЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ С ПОЛОСООБРАЗНЫМИ ОБЛАСТЯМИ В СТРУКТУРЕ ТРАЕКТОРИЙ В ЗАДАЧАХ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ

В данной работе хорошо известные результаты в задачах об экстремальном разбиении распространяются на задачи с ассоциированными квадратичными дифференциалами указанного в заглавии вида.

Используем следующие обозначения. Пусть D – односвязная область на $\overline{\mathbb{C}}, a$ – точка D. Через $M(D,a)$ обозначаем приведенный модуль области D относительно точки a. Пусть P – двуугольник на $\overline{\mathbb{C}}$ с вершинами (в различных или совпадающих) точках a, b; предполагаем, что граничные дуги области P в окрестностях точек a и b удовлетворяют соответствующему условию гладкости. Через $M(P,a,b)$ обозначаем приведенный модуль двуугольника относительно класса кривых, соединяющих его стороны (см. определения в [1, 2], а также в [3]).

§1

1.1. Одним из классических результатов в задачах об экстремальном разбиении является теорема Л. И. Колбиной [4], дающая решение следующей задачи.

Пусть $\mathcal{D}_1$ – семейство пар неналегающих односвязных областей D_1, D_2 на $\overline{\mathbb{C}}$, где $z_1 \in D_1$, $z_2 \in D_2$, области D_1, D_2 не содержат точки z_3. Пусть $\alpha > 0$. Найти максимум суммы

$$\alpha^2 M(D_1, z_1) + M(D_2, z_2) \tag{1}$$

в семействе $\mathcal{D}_1$.

Эта задача (в случае $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$) была решена Л. И. Колбиной [4] в качестве одного из первых приложений вариационного метода Г. М. Голузина. Дж. Дженкинс [5] откликнулся на результат

Ключевые слова: квадратичный дифференциал, структура траекторий квадратичного дифференциала, задача об экстремальном разбиении.

Л. И. Колбиной и указал более элементарное доказательство, основывающееся на соображениях метода экстремальной метрики (см. также [6, следствие 7.2]. Мы приводим здесь такого рода доказательство в силу его простоты и по той причине, что аналогичные соображения приводят к другим результатам в задачах об экстремальном разбиении.

В силу известного свойства дробно-линейных отображений достаточно считать, что $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$, $z_3 = a > 0$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 0$. В семействе $\mathcal{D}_1$ имеет место неравенство*

$$\alpha^2 M(D_1, 0) + M(D_2, \infty) \leqslant F_1(a, \alpha), \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} F_1(a,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\Big\{ &-(\alpha+1)^2\log(\alpha+1) - (\alpha-1)^2\log|\alpha-1| \\ &+ 2\alpha^2\log\alpha + (\alpha^2-1)\log a + (\alpha^2+1)\log 4\Big\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Равенство в (2) достигается только для круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q_1(z)dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{(z-c)dz^2}{z^2(z-a)}, \quad \frac{c}{a} = \alpha^2. \tag{4}$$

Доказательство. В случае $\alpha = 1$ решение задачи непосредственно следует из известного результата Грётша. Пусть $\alpha \neq 1$. Пусть D_1, D_2 – экстремальная пара областей данной задачи[1]. В силу общей теории, D_1, D_2 – круговые области дифференциала (4). Рассмотрим два случая (см. рис. 1, 2).

Пусть $\alpha > 1$, т.е. $c > a$. Тогда интервалы $(0, a)$ и (c, ∞) – ортогональные траектории, (a, c) – траектория дифференциала (4). Пусть $\epsilon > 0$ и достаточно мало. В силу определения конформного радиуса,

$$\alpha \log R(D_1, 0) = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{2\pi\int_{\epsilon}^{a}\sqrt{-Q_1(z)}\,dz + \alpha\log\epsilon\right\}, \tag{5}$$

где рассматривается надлежащая ветвь корня. Рассматривая преобразование

$$\frac{c-z}{a-z} = t^2,$$

[1]Здесь и ниже мы не вводим специальных обозначений для экстремальных областей рассматриваемых задач.

приходим к дифференциалу, являющемуся полным квадратом:

$$Q_1(z)\,dz^2 = q_1(t)\,dt^2,$$

где

$$q_1(t)\,dt^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{4t^4(c-a)^2\,dt^2}{(at^2-c)^2(t^2-1)^2}.$$

Отсюда находим

$$\int\limits_{\epsilon}^{a}\sqrt{-Q_1(z)}\,dz = \int\limits_{t(\epsilon)}^{\infty}\sqrt{-q_1(t)}\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left\{-\sqrt{c/a}\log\frac{(c-a)\epsilon}{4ac} + \log\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\right\} + O(\epsilon)$$

и из (5) получаем

$$\alpha\log R(D_1,0) = -\sqrt{c/a}\,\log\frac{c-a}{4ac} + \log\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}. \tag{6}$$

Рассматривая теперь интеграл $\int\limits_{c}^{1/\epsilon}\sqrt{-Q_1(z)}\,dz$, приходим к равенству

$$\log R(D_2,\infty) = \sqrt{c/a}\,\log\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} - \log\frac{c-a}{4}. \tag{7}$$

Из (6) и (7), учитывая, что $\frac{c}{a} = \alpha^2$, получаем выражение для $F_1(a,\alpha)$ в случае $\alpha > 1$.

Пусть теперь $\alpha < 1$, т.е. $c < a$. В этом случае $(0,c)$ и (a,∞) – ортогональные траектории дифференциала (4). Рассматривая интегралы от $\sqrt{-Q_1(z)}$ по отрезкам $[\epsilon,c]$ и $[a,1/\epsilon]$, находим

$$\sqrt{c/a}\,\log R(D_1,0) = \sqrt{c/a}\,\log\frac{4ac}{a-c} - \log\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}, \tag{8}$$

$$\log R(D_2,\infty) = \sqrt{c/a}\,\log\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}} + \log\frac{a-c}{4}. \tag{9}$$

Доопределяя полученные выражения при $c = a$, приходим к неравенству (2) для искомого максимума. □

Замечание 1. Нетрудно убедиться, что неравенство (2) определяет максимум величины $R(D_2,\infty)$ при любом фиксированном значении $R(D_1,0)$.

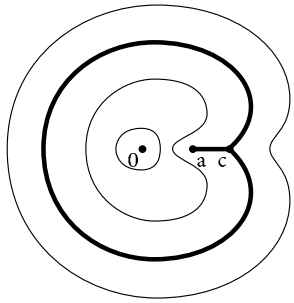

Рис. 1

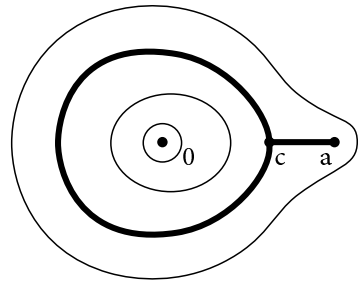

Рис. 2

С задачей о максимуме суммы (1) непосредственно связана задача о максимуме линейной комбинациии приведенных модулей двуугольников в соответствующем семействе систем областей [1, 2]. Пусть

$$\widehat{Q}_1(z)\,dz^2 = -Q_1(z)\,dz^2, \tag{10}$$

где $Q_1(z)dz^2$ – дифференциал (4). В структуре траекторий дифференциала (10) присутствуют три полосообразные области P_1^+, P_1^-, P_2, где P_1^+ и P_1^- – двуугольники с вершинами в точках $0, \infty$, P_2 при $b < a$ имеет обе вершины в ∞, при $b > a$ – в 0. Пусть $\mathcal{D}^{(1)}$ и $\mathcal{D}^{(2)}$ – семейства троек областей, ассоциированных с теми же гомотопическими классами кривых, что и области P_1^+, P_1^-, P_2 соответственно при $b < a$ и $b > a$.

Из связи между задачами об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов [7, 2] вытекает

Теорема 2. *Пусть* $h = \frac{1}{2}\sqrt{c/a}$. *Пусть* $h < 1/2$. *Тогда в семействе* $\mathcal{D}^{(1)}$ *справедливо неравенство*

$$-h^2[M(P_1^+, 0, \infty) + M(P_1^-, 0, \infty)] - \frac{1}{4}M(P_2, \infty, \infty) \leqslant -F(a, \alpha). \tag{11}$$

Пусть $h > 1/2$. *Тогда в семействе* $\mathcal{D}^{(2)}$ *справедливо неравенство*

$$-h^2\big[M(P_1^+, 0, \infty) + M(P_1^-, 0, \infty)\big] - \frac{1}{4}M(P_2, 0, 0) \leqslant -F(a, \alpha). \tag{12}$$

Здесь $F(a, \alpha)$ – *функция* (3) *при надлежащем* α. *Равенство в каждом из неравенств* (11) *и* (12) *достигается только для полосообразных областей дифференциала* (10).

1.2. Пусть $\mathcal{D}_2$ – семейство пар неналегающих областей P, D на $\overline{\mathbb{C}}$, где P – двуугольник с обеими вершинами в начале координат, ассоциированный с классом дуг, выходящих из начала и оканчивающихся в этой же точке и гомотопных разрезу по отрезку $[0, a]$, D – односвязная область, $\infty \in D$. Пусть $h > 0$. Рассмотрим задачу о максимуме суммы

$$-h^2 M(P, 0, 0) + M(D, \infty)$$

в семействе $\mathcal{D}_2$.

Теорема 3. *В семействе $\mathcal{D}_2$ имеет место неравенство*

$$\begin{aligned} -h^2 M(P,0,0) + M(D,\infty) \\ \leqslant \frac{1}{2\pi}\Big\{(4h^2-1)\log(4h^2+1) - 4h^2\log(4h^2) \\ - (4h^2+1)\log a - (4h^2-1)\log 4 + 4h \operatorname{arctg}\frac{4h^2-1}{4h}\Big\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Равенство в (13) *достигается только в том случае, когда области P и D являются соответственно полосообразной и круговой областями квадратичного дифференциала*

$$Q_2(z)\,dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{(z+c_1)\,dz^2}{z^2(z-a)}, \quad \frac{c_1}{a} = 4h^2. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть P и D – экстремальные области рассматриваемой задачи. По теоремам в [1, 2], области P и D единственны и определяются указанным в теореме свойством. Интервалы $(0, a)$ и $(-c_1, 0)$ – траектории, $(-\infty, -c_1)$ и (a, ∞) – ортогональные траектории дифференциала (14). Пусть $\epsilon > 0$ достаточно мало. Рассматривая длину окружности $|z| = \epsilon$ в Q_2-метрике, находим

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_1}{a}}.$$

В силу определения приведенного модуля двуугольника, при надлежащем выборе ветви $\sqrt{Q_2(z)}$ имеем равенство

$$M(P,0,0) = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{2}{h}\int\limits_{\epsilon}^{a}\sqrt{Q_2(z)}\,dz + \frac{2}{\pi}\log\epsilon\right\}. \tag{15}$$

Полагая

$$\frac{z+c_1}{a-z} = t^2,$$

приходим к дифференциалу, являющемуся полным квадратом:

$$Q_2(z)\,dz^2 = q_2(t)\,dt^2,$$

где

$$q_2(t)\,dt^2 = \frac{1}{4\pi^2}\frac{(a+c_1)^2 4t^2\,dt^2}{(t^2+1)^2(at^2-c_1)^2}.$$

Находим

$$\int\limits_{\epsilon}^{a} \sqrt{Q_2(z)}\,dz = \int\limits_{t(\epsilon)}^{\infty} \sqrt{q_2(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t(\epsilon)}^{\infty}\left(\frac{2}{t^2+1}+\frac{2c_1}{at^2-c_1}\right)dt,$$

Отсюда и из (15),

$$M(P,0,0) = \frac{2}{\pi}\left\{2\sqrt{a/c_1}\,\left(\pi/2 - \operatorname{arctg}\sqrt{c_1/a}\,\right) - \log\frac{a+c_1}{4ac_1}\right\}. \qquad (16)$$

Для вычисления

$$M(D,\infty) = -\frac{1}{2\pi}\log R(D,\infty) = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int\limits_{a}^{1/\epsilon}\sqrt{-Q_2(z)}\,dz + \frac{1}{2\pi}\log\epsilon\right\} \qquad (17)$$

полагаем

$$\frac{z+c_1}{z-a} = t^2$$

и приходим к равенству

$$\int\limits_{a}^{1/\epsilon}\sqrt{-Q_2(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t(1/\epsilon)}^{\infty}\frac{(a+c_1)2t^2\,dt}{(t^2-1)(at^2+c_1)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t(1/\varepsilon}^{\infty}\left\{\frac{2}{t^2-1}+\frac{2c_1}{at^2+c_1}\right\}dt,$$

откуда и из (17)

$$M(D,\infty) = -\frac{1}{2\pi}\left\{\log\frac{a+c_1}{4} - 2\sqrt{\frac{c_1}{a}}\left(\pi/2 - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{c_1}}\right)\right\}. \qquad (18)$$

Из (16), (18) и равенства $c_1/a = 4h^2$ получаем указанное в теореме выражение для искомого максимума. □

§2

2.1. Остановимся на задачах об экстремальном разбиении, в которых ассоциированные квадратичные дифференциалы имеют три полюса второго порядка, пусть в точках $0, a, \infty$, где $a > 0$.

Пусть $\mathcal{D}_4$ – семейство систем неналегающих односвязных областей D_1, D_2, D_3 на $\overline{\mathbb{C}}$, где $0 \in D_1$, $a \in D_2$, $\infty \in D_3$. Пусть α, β, γ – положительные числа. Задача о максимуме, – обозначим его $F_0(a, \alpha, \beta, \gamma)$ – суммы

$$\alpha^2 M(D_1, 0) + \beta^2 M(D_2, a) + \gamma^2 M(D_3, \infty) \tag{19}$$

в семействе $\mathcal{D}_4$ была решена Л. И. Колбиной [4] посредством применения вариационного метода Г. М. Голузина, на возможность другого доказательства было указано Дженкинсом [5]. Из хорошо известных результатов метода экстремальной метрики непосредственно следует, что искомый максимум реализуется только системой круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q_4(z)\, dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\, \frac{P(z) dz^2}{z^2(z-a)^2}, \tag{20}$$

где полином $P(z) = A_1 z^2 + A_?^z + A_2$ удовлетворяет условиям

$$A_1 = \gamma^2, \quad P(0) = \alpha^2 a^2, \quad P(a) = \beta^2 a^2.$$

Максимум суммы (19) находится прямым вычислением и выражается в элементарных функциях.

Пусть

$$\widehat{Q}_4(z)\, dz^2 = -Q_4(z)\, dz^2, \tag{21}$$

где $Q_4(z)\, dz^2$ – дифференциал (20). В структуре траекторий дифференциала (21) присутствуют полосообразные области, вершинами которых являются различные или совпадающие из точек $0, a, \infty$ и по теоремам в $[1, 2]$ величина $-F(a, \alpha, \beta, \gamma)$ является максимумом линейной комбинации с отрицательными коэффициентами приведенных модулей в семействе двуугольников, ассоциированных с теми же гомотопическими классами кривых.

2.2. Рассмотрим задачу об экстремальном разбиении в семействе систем областей, содержащих двуугольники с заданными вершинами.

Пусть $\mathcal{D}_5$ – система областей $\{P_1^+, P_1^-, P_2, D\}$, где P_1^+ и P_1^- – двуугольники с вершинами в точках 0 и a, ассоциированые с классами

дуг, соединяющих точки $0, a$ и лежащих соответственно в верхней и нижней полуплоскостях z-плоскости, P_2 – двуугольник с обеими вершинами в точке a, D – односвязная область, $\infty \in D$. Пусть h_1, h_2, γ – положительные числа. Рассмотрим задачу о максимуме суммы

$$-h_1^2\Big[M\left(P_1^+, 0, a\right) + M\left(P_1^-, 0, a\right)\Big] - h_2^2 M\left(P_2, a, a\right) + \gamma^2 M(D, \infty)$$

в семействе $\mathcal{D}_5$.

Теорему 3 дополняет

Теорема 4. *В семействе $\mathcal{D}_5$ справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} &- h_1^2[M(P_1^+, 0, a) + M(P_1^-, 0, a)] - h_2^2 M(P_2, a, a) + \gamma^2 M(D, \infty) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant F(a, h_1, h_2, \gamma), \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned} &F(a, h_1, h_2, \gamma) \\ &\quad = \frac{1}{2\pi}\Big\{(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - \gamma^2)\log\Delta - 2\alpha\beta\log(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + \gamma^2) \\ &\quad - \alpha^2\log\alpha^2 - \beta^2\log\beta^2 + \gamma^2\log\gamma^2 \\ &\quad - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\log a - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)\log 4 \\ &\quad + 2\gamma\left[2\alpha\operatorname{arctg}\frac{\Delta - \gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} - 2\beta\operatorname{arctg}\frac{\Delta + \gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\beta\gamma}\right]\Big\}, \\ &h_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad h_2 = \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \Delta = \sqrt{(\gamma^2 - \alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}. \end{aligned}$$

Равенство в (22) *достигается только для системы круговой и полосообразных областей квадратичного дифференциала*

$$Q_5(z)\,dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{\gamma^2(z + b_1)(z - b_2)\,dz^2}{z^2(z - a)^2}, \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a}{2\gamma^2}\big\{\Delta - (\gamma^2 - \alpha^2 + \beta^2)\big\}, \\ b_2 &= \frac{a}{2\gamma^2}\big\{\Delta + (\gamma^2 - \alpha^2 + \beta^2)\big\}. \end{aligned} \tag{24}$$

Доказательство. В силу общей теории, экстремальная система областей P_1^+, P_1^-, P_2, D единственна и определяется структурой траекторий квадратичного дифференциала указанного в теореме вида. В частности, области P_1^+ и P_1^- симметричны друг с другом относительно вещественной оси z-плоскости, см. рис. 3. Точки 0 и a – вершины полосообразных областей дифференциала (23). Обозначим через α и β Q_5-длины окружностей $|z| = \epsilon$ и $|z - a| = \epsilon$, где $\epsilon > 0$ и достаточно мало. Тогда

$$h_1 = \alpha/2, \quad h_2 = (\beta - \alpha)/2.$$

Для нулей дифференциала (23) имеем условия

$$\frac{\gamma^2 b_1 b_2}{a^2} = \alpha^2, \quad \frac{\gamma^2 (a + b_1)(a - b_2)}{a^2} = \beta^2.$$

Эти условия показывают, что нули дифференциала (23) имеет разные знаки и расположены вне отрезка $[0, a]$. Будем считать, что $-b_1 < 0$, $b_2 > 0$. Тогда для b_1 и b_2 получаем равенства (24).

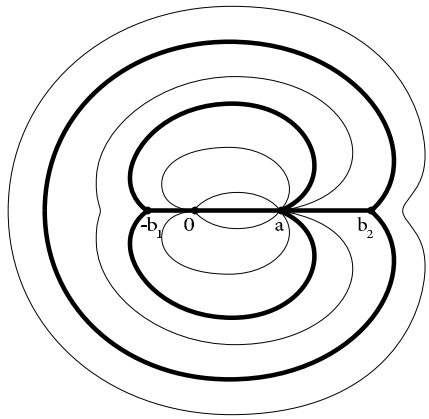

Рис. 3

Найдем $M(P_1^+, 0, a)$ и $M(P_2, a, a)$. Интервалы $(0, a)$ и (a, b_2) – траектории дифференциала (23). Полагая

$$\frac{z + b_1}{b_2 - z} = t^2,$$

приходим к квадратичному дифференциалу, являющемуся полным квадратом:

$$Q_5(z)\,dz^2 = -\frac{\gamma^2}{4\pi^2}\,\frac{(b_1+b_2)^4\,4t^4\,dt^2}{(t^2+1)^2(b_2t^2-b_1)^2[(a+b_1)-(b^2-a)t^2]^2}.$$

Отсюда

$$\int\limits_{\epsilon}^{a-\epsilon}\sqrt{Q(z)}\,dz = \frac{\gamma}{2\pi a}\int\limits_{t(\epsilon)}^{t(a-\epsilon}\frac{(b_1+b_2)^2 2t^2\,dt}{t^2+1)\,(b_2t^2-b_1)[a+b_1-(b_2-a)t^2]}. \qquad (25)$$

Вычисляя интеграл в правой части (25) и используя определение приведенного модуля двуугольника, приходим к равенству:

$$\begin{aligned} &h_1 M\,(P_1^+,0,a)\\ &= \frac{\gamma}{2\pi a}\Bigg\{\Big[\sqrt{b_1b_2}+\sqrt{(a+b_1)(a-b_2)}\Big]\log\frac{\sqrt{b_2(a+b_1)}-\sqrt{b_1(b_2-a)}}{\sqrt{b_2(a+b_1)}+\sqrt{b_1(b_2-a)}}\\ &\quad-\sqrt{b_1b_2}\,\log\frac{b_1+b_2}{4b_1b_2}+\sqrt{(a+b_1)(b_2-a)}\,\log\frac{4(a+b_1)(b_2-a)}{b_1+b_2}\\ &\qquad\qquad+2a\Bigg[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+b_1}{b_2-a}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}\,\Bigg]\Bigg\}. \qquad (26)\end{aligned}$$

Аналогично, вычисляя величину

$$\gamma + 2\int\limits_{a+\epsilon}^{b_2}\sqrt{Q_5(z)}\,dz,$$

находим

$$\begin{aligned} h_2 M\,(P_2,a,a) = \gamma + \frac{2\gamma}{2\pi a}\Bigg\{&\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}\log\frac{\sqrt{b_2(a+b_1)}-\sqrt{b_1(b_2-a)}}{\sqrt{b_2(a+b_1)}+\sqrt{b_1(b_2-a)}}\\ &+\sqrt{(a+b_1)(b_2-a)}\log\frac{4(a+b_1)(b_2-a)}{b_2+b_1}\\ &-2a\Bigg(\pi/2-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+b_1}{b_2-a}}\,\Bigg)\Bigg\}. \qquad (27)\end{aligned}$$

Найдем $M(D,\infty)$. Интервал (b_2,∞) – ортогональная траектория дифференциала (23). Вычисляя интеграл

$$\int\limits_{b_2}^{1/\epsilon} \sqrt{-Q(z)}dz,$$

пользуясь преобразованием

$$\frac{z+b_1}{z-b_2}=t^2,$$

приходим к равенству

$$\gamma M(D,\infty)=\frac{\gamma}{2\pi a}\Bigg\{-a\log\frac{b_1+b_2}{4}+2\sqrt{b_1b_2}\left(\pi/2-\operatorname{arctg}\sqrt{b_2/b_1}\right)$$
$$-2\sqrt{(b_1+a)(b_2-a)}\left(\pi/2-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b_2-a}{b_1+a}}\,\right)\Bigg\}. \quad (28)$$

Из (26)–(28) получаем выражение для максимума суммы (19) как функции от b_1, b_2. Пользуясь условиями (24), выражающими b_1, b_2 через параметры a,α,β,γ, получаем выражение для искомого максимума, приведенное в теореме. □

Замечание 2. Пусть в условиях теоремы 4 $h_1\to 0$. Тогда области P_1^+ и P_1^- вырождаются, $b_1\to 0$ и решение задачи дается теоремой 2 при замене в условиях этой теоремы $z\to -z+a$.

Пусть в условиях теоремы 4 $h_2\to 0$. Тогда области P_2 вырождаются и имеем следующую теорему.

Пусть D_6 – семейство троек областей $\{P_1^+,P_2^-,D\}$, определенных в теореме 4, области P_2 вырождаются. Пусть h и α – положительные числа.

Теорема 5. *В семействе D_6 справедливо неравенство*

$$-h^2\left[M(P_1^+,0,a)+M(P_1^-,0,a)\right]+\gamma^2M(D,\infty)\leqslant F(a,h,\gamma), \qquad (29)$$

где

$$F(a,h,\gamma)=\frac{1}{2\pi}\Big\{-(\gamma^2-4\alpha^2)\log\Delta+(\gamma^2-2\alpha^2)\log\gamma^2$$
$$-2\alpha^2\log\alpha^2-(\gamma^2+2\alpha^2)\log a+(\gamma^2-2\alpha^2)\log 4-4\alpha\gamma\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{2\alpha}\Big\},$$
$$h=\alpha/2,\quad \Delta=\sqrt{\gamma^4+4\alpha^2\gamma^2}.$$

Равенство в (29) *достигается только для системы* $\{D,P_1^+,P_1^-\}$ *круговой и полосообразных областей квадратичного дифференциала*

$$Q_6(z)\,dz^2=-\frac{1}{4\pi^2}\frac{\gamma^2(z+b_1)(z-b_2)\,dz^2}{z^2(z-a)^2},\tag{30}$$

где

$$b_1=\frac{a}{2\gamma^2}(\Delta-\gamma^2),\quad b_2=\frac{a}{2\gamma^2}(\Delta+\gamma^2).$$

Области P_1^+ *и* P_1^- *симметричны друг другу относительно вещественной оси* z*-плоскости, каждая из областей* D,P_1^+,P_1^- *симметрична относительно прямой* $\operatorname{Re}z=a/2$ *(см. рис. 4).*

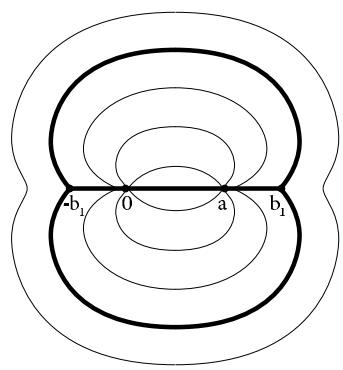

Рис. 4

При $\alpha\to 0$ *области* P_1^+ *и* P_1^- *вырождаются,* $D=\overline{\mathbb{C}}-[0,a]$,

$$F(a,0,\gamma)=\frac{\gamma^2}{2\pi}\log a=-\frac{\gamma^2}{2\pi}\log R(D,\infty).$$

При $\gamma\to 0$ *область* D *вырождается,*

$$P_1^+=\{z:\operatorname{Im}z>0\},\quad P_1^-=\{z:\operatorname{Im}z<0\},$$

$$F(a,h,0) = -\frac{2\alpha^2 \log a}{2\pi} = -h^2\Big[M\big(P_1^+(0,a)\big) + M\big(P_1^-(0,a)\big)\Big].$$

2.3. Пусть $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – система различных точек на $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ – система неналегающих односвязных областей, $a_k \in D_k$, $k = 1, \dots, n$. Пусть $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ – система положительных чисел. С задачей о максимуме суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 M(D_k, \alpha_k) \tag{31}$$

в семействе $D(\mathbf{a})$ непосредственно связана задача о максимуме соответствующего конформного инварианта. Ряд результатов получен в этих задачах при $n = 4$. Так, в случае $n = 4$ найден максимум конформного инварианта

$$2\pi \sum_{k=1}^{n} M(D_k, a_k) - \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \log|a_k - a_l| \tag{32}$$

в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a})$ при любом значении ангармонического отношения четверки точек a_1, a_2, a_3, a_4 (наибольшее значение этой величины достигается для симметричной системы точек $0, 1, \omega, \omega^2$, где $\omega = e^{2\pi/3}$) [8, 9], что дополняет известный результат Г. М. Голузина. При $n = 5$ задача о максимуме инварианта (32) решена лишь для систем точек, симметричных относительно прямой или окружности [10, 11].

Ряд задач о максимуме конформного инварианта, связанного с суммой (31) при различных значениях α_k, решен в [12, 13], при доказательстве существенно использовались геометрические свойства траекторий ассоциированных квадратичных дифференциалов. Однако результата, устанавливающего множество значений системы $M(D_k, a_k)$, $k = 1, \dots, 4$, в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a})$, до сих пор получено не было.

В связи с трудностью задач об экстремальном разбиении при больших значениях n рассматривались задачи, в которых системы отмеченных точек обладают той или иной предписанной симметрией. При решении таких задач использовался прием, основывающийся на разбиении z-сферы на подобласти, позволяющему свести исследуемую задачу к рассмотрению задач об экстремальном разбиении значительно более простого вида. Первые результаты в этом направлении принадлежат В. Н. Дубинину [14], см. также [15, 11]. Полученные в данной

работе теоремы позволяют распространить этот прием на другие задачи об экстремальном разбиении.

Литература

1. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Теоремы об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 74–104.
2. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы.* — Алгебра и анализ **11** (1999), вып. 1, 3–86.
3. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций.* — Алгебра и анализ **9** (1997), вып. 5, 1–50.
4. Л. И. Колбина, *Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении.* — Докл. АН СССР **84** (1952), 865–868.
5. J. A. Jenkins, *A recent note of Kolbina.* — Duke Math. J. **21** (1954), 155–162.
6. J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping.* Ergeb. Math. Grenzgeb (N.F.) Bd.**18**, Springer-Verlag, 1958; 2nd ed. corrected, 1965. Пер. на рус. яз. 1-го изд., Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения.* М., 1962.
7. Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **160** (1987), 91–98.
8. Г. В. Кузьмина, *К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **100** (1980), 131–145.
9. С. И. Федоров, *О максимуме одного конформного инварианта в задаче о неналегающих областях.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **112** (1981), 172–183.
10. Г. В. Кузьмина, *К вопросу об экстремальном разбиении римановой сферы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **185** (1990), 72–95.
11. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* Владивосток, 2009.
12. Е. Г. Емельянов, *Конформно-инвариантные функционалы на римановой сфере.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 134–154.
13. Е. Г. Емельянов, *К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 103–114.
14. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **168** (1988), 48–66.
15. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* — Успехи мат.наук **49** (1994), 13–76.

Kuz'mina G.V. Quadratic differentials with strip domains in the structure of trajectories in some extremal decomposition problems.

Problems on extremal decomposition in which the associated quadratic differentials possess indicated property are solved. The results obtained supplement the classical results in problems under consideration.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 25 октября 2012 г.