Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 404, 2012 г.

С. И. Калмыков

СРАВНЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ И РАВНОМЕРНОЙ НОРМ ПОЛИНОМОВ НА ОТРЕЗКЕ И ДУГЕ ОКРУЖНОСТИ

В теории аппроксимации естественным образом возникает вопрос о сравнении дискретной и равномерной норм полиномов на различных подмножествах комплексной плоскости.

Введем обозначения

$$\mathcal{P}_n^r := \left\{ p(z) : p(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k,\ c_k \in \mathbb{R},\ c_n \neq 0 \right\},$$

$$\mathcal{P}_n^c := \left\{ p(z) : p(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k,\ c_k \in \mathbb{C},\ c_n \neq 0 \right\},$$

$$\Gamma_\alpha = \{z = e^{i\varphi} : -\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha\},\ \ 0 < \alpha < \pi.$$

$$H = \max_{x\in[-1,1]} P(x),\ \ L = \min_{x\in[-1,1]} P(x),\ \ \overline{H} = \max_{x\in[-1,1]} |P(x)|,\ \ P(x) \in \mathcal{P}_n^r.$$

$$M = \max_{z\in\Gamma_\alpha} |P(z)|,\quad m = \min_{x\in\Gamma_\alpha} |P(z)|,\quad P(x) \in \mathcal{P}_n^c.$$

Рахманов и Шехтман в работе [1] установили неравенство

$$\max_{w^N=1} |P(w)| \geqslant \left(1 + C \log \frac{N}{N-n}\right)^{-1} \max_{|z|=1} |P(z)| \tag{1}$$

для алгебраических полиномов $P(z) \in \mathcal{P}_n^c$ и натуральных $N > n$, где абсолютную константу C можно оценить числом 16.

Немного позднее Шейл-Смолл в статье [2] показал, что справедлива оценка

$$\max_{w^N=1} |P(w)| \geqslant \sqrt{\frac{N-n}{N}} \max_{|z|=1} |P(z)|. \tag{2}$$

Ключевые слова: дискретная и равномерная нормы полиномов, неравенства бернштейновского типа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00038) и Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0366.

Дубинин доказал неравенство

$$\max_{w^N=1} |P(w)| \geqslant \cos\frac{\pi n}{2N} \max_{|z|=1} |P(z)|, \tag{3}$$

равенство в котором достигается в случае $P(z) = (z\exp(i\pi/N))^n + 1$ и любого N, кратного n (см. [3,4]).

Неравенство (1) лучше, чем неравенство (2) при n/N, близких к единице, но хуже оценки Шейл-Смолла при малых значениях n/N. При $n < N < 2n$ оценка (3) хуже оценки (2). В случае $N = 2n$ оценки (2) и (3) совпадают, а при $N > 2n$ неравенство (3) усиливает неравенства (1) и (2) (см. [3,4]).

Из работ, посвященных оценкам, в которых участвует дискретная норма на интервале $(-1,1)$ отметим работу Копперсмита и Ривлина [5], а также недавнюю статью Рахманова [6].

Цель настоящей заметки – получение неравенств, содержащих равномерную и дискретную нормы полиномов на отрезке $[-1,1]$ и дуге Γ_α, методами, предложенными в работах [3,4]. В основе доказательств лежат неравенства для прозводных полиномов на соответствующих множествах. Так, для полинома $P(z) \in \mathcal{P}_n^r$ и $x \in [-1,1]$ справедливо следующее усиление неравенства Бернштейна-Сеге, вытекающее из теоремы 4.4 работы [7]:

$$|P'(x)|\sqrt{1-x^2} \leqslant \gamma_n \sqrt{\overline{H}^2 - P^2(x)}, \tag{4}$$

где

$$\gamma_n = \left(n - 1 + \frac{2^{2-n}|c_n|}{H-L}\right) \leqslant n. \tag{5}$$

Равенство в (4) для любых $x \in [-1,1]$ достигается в случае $P(z) = aT_n(z)$, где a – вещественное число, а $T_n(z)$ – полином Чебышева первого рода степени n.

Неравенство бернштейновского типа для полиномов на дуге окружности содержит следующий результат, доказанный в работе [8].

Лемма 1. *Для полинома $P \in \mathcal{P}_n^c$ и $z \in \Gamma_\alpha$ имеет место неравенство*

$$|(|P(z)|^2)'_\varphi| \leqslant \frac{n|z+1|\sqrt{(M^2 - |P(z)|^2)(|P(z)|^2 - m^2)}}{|\sqrt{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}|}. \tag{6}$$

Равенство в (6) *достигается для полинома*

$$P_\alpha(z) = \begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{n/2} (z^2 - 2a_k z + 1), & \text{при четных } n, \\ (z-1) \prod\limits_{k=1}^{(n-1)/2} (z^2 - 2a_k z + 1), & \text{при нечетных } n, \end{cases}$$

где $a_k = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\pi(2k-1)}{n}$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Утвержнение 1. *Для полинома* $P(z) \in \mathcal{P}_n^r$ *и любых* $-1 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\left| \arcsin \frac{|P(x)|}{\overline{H}} \Big|_{x_1}^{x_2} \right| \leqslant \gamma_n |\arcsin x_1 - \arcsin x_2|, \tag{7}$$

где γ_n *определено в* (5).

Доказательство. Пусть для определенности $x_1 < x_2$. Интегрируя неравенство (4), записанное в виде

$$\frac{|P'(x)|}{\sqrt{\overline{H}^2 - P^2(x)}} \leqslant \frac{\gamma_n}{\sqrt{1-x^2}},$$

на интервале (x_1, x_2), делая замену $u = u(x) = P(x)$, а также используя тот факт, что модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля, получаем

$$\gamma_n(\arcsin x_2 - \arcsin x_1) \geqslant \pm \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{\overline{H}^2 - u^2}} = \pm \arcsin \frac{u}{\overline{H}} \Big|_{u_1}^{u_2},$$

где $u_k = P(x_k)$, $k = 1, 2$. Остается применить элементарное неравенство $|a - b| \geqslant ||a| - |b||$. Утверждение доказано. □

Из утверждения 1 вытекают следующие две теоремы.

Теорема 1. *Для любого полинома $P(z) \in \mathcal{P}_n^r$ и любого натурального $N \geqslant \dfrac{1}{2\sin^2(\pi/4n)}$ справедливо неравенство*

$$\max_{k=0,\dots,N} |P(x_k)| \geqslant \cos\left(\gamma_n \arccos\left(1-\frac{1}{N}\right)\right) \max_{x\in[-1,1]} |P(x)|$$
$$\geqslant T_n\left(1-\frac{1}{N}\right) \max_{x\in[-1,1]} |P(x)|,$$

где $x_k = -1 + \dfrac{2k}{N}$, $k = 0, \dots, N$.

Доказательство. Пусть x_0 – одна из точек, в которой достигается максимум $\overline{H}$. Среди точек x_k, $k = 0, \dots, N$, найдется по крайней мере одна, пусть x_m, такая, что $|x_m - x_0| \leqslant \dfrac{1}{N}$. Неравенство (7) дает

$$\arcsin\frac{|P(x_m)|}{\overline{H}} \geqslant \frac{\pi}{2} - \gamma_n |\arcsin x_m - \arcsin x_0|$$
$$\geqslant \frac{\pi}{2} - \gamma_n\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \gamma_n \arccos\left(1-\frac{1}{N}\right) \geqslant 0.$$

Второе неравенство следует из нечетности функции $\arcsin x$, а также ее возрастания и выпуклости вниз на промежутке $[0,1]$. Тогда

$$\frac{|P(x_m)|}{\overline{H}} \geqslant \cos\left(\gamma_n \arccos\left(1-\frac{1}{N}\right)\right),$$

следовательно,

$$|P(x_m)| \geqslant \overline{H}\cos\left(\gamma_n \arccos\left(1-\frac{1}{N}\right)\right) \geqslant \overline{H}\cos\left(n\arccos\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)$$
$$= \overline{H}\, T_n\left(1-\frac{1}{N}\right).$$

Осталось заметить, что $|P(x_m)| \leqslant \max\limits_{k=0,\dots,N} |P(x_i)|$. Теорема доказана. $\square$

Недостатком этой оценки служит слишком быстрое возрастание величины $\dfrac{1}{2\sin^2(\pi/4n)}$ при увеличении n. Переходя к подходящему неравномерному разбиению отрезка $[-1,1]$, мы его устраняем в следующей теореме.

Теорема 2. *Для любого полинома $P(z) \in \mathcal{P}_n^r$ и любого натурального $N \geqslant n$ справедливо неравенство*

$$\max_{k=0,\dots,N} |P(x_k)| \geqslant \cos\frac{\pi\gamma_n}{2N} \max_{x\in[-1,1]} |P(x)|,$$

где $x_k = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi k}{N}\right)$, $k = 0,\dots,N$.

Доказательство. Пусть x_0 – одна из точек, в которой достигается максимум $\overline{H}$. Среди точек x_k, $k = 0,\dots,N$, найдется по крайней мере одна, пусть x_m, такая, что $|\arcsin x_m - \arcsin x_0| \leqslant \dfrac{\pi}{2N}$. Неравенство (7) дает

$$\arcsin\frac{|P(x_m)|}{\overline{H}} \geqslant \frac{\pi}{2} - \gamma_n|\arcsin x_m - \arcsin x_0| \geqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\gamma_n}{2N} \geqslant 0.$$

Отсюда

$$\frac{|P(x_m)|}{\overline{H}} \geqslant \cos\frac{\pi\gamma_n}{2N},$$

следовательно,

$$|P(x_m)| \geqslant \overline{H}\cos\frac{\pi\gamma_n}{2N}.$$

Осталось заметить, что $|P(x_m)| \leqslant \max\limits_{k=0,\dots,N} |P(x_i)|$. Теорема доказана. □

Утвержнение 2. *Для полинома $P(z) \in \mathcal{P}_n^c$ с $m \neq M$ и любых вещественных φ_1, φ_2 таких, что $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2} \in \Gamma_\alpha$, справедливо неравенство*

$$\left|\arcsin\sqrt{\frac{|P(e^{i\varphi})|^2 - m^2}{M^2 - m^2}}\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2}\right| \leqslant n\left|\arcsin\frac{\sin\dfrac{\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2}\right|. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть для определенности $\varphi_1 < \varphi_2$. Запишем неравенство (6) в виде

$$\frac{|(|P(z)|^2)'_\varphi|}{\sqrt{(M^2 - |P(z)|^2)(|P(z)|^2 - m^2)}} \leqslant \frac{n|z+1|}{|\sqrt{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}|}, \quad z = e^{i\varphi},$$

и проинтегрируем его на интервале (φ_1, φ_2). Для левой части, делая последовательно замены $u = u(\varphi) = |P(\varphi)|^2$, $t = \sqrt{u - m^2}$, получаем

$$\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{|(|P(e^{i\varphi})|^2)'_\varphi|}{\sqrt{(M^2 - |P(e^{i\varphi})|^2)(|P(e^{i\varphi})|^2 - m^2)}} d\varphi \geqslant \pm \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{u'_\varphi d\varphi}{\sqrt{(u - m^2)(M^2 - u)}}$$

$$= \pm \int\limits_{u(\varphi_1)}^{u(\varphi_2)} \frac{du}{\sqrt{(u - m^2)(M^2 - u)}} = \pm 2 \int\limits_{t(u_1)}^{t(u_2)} \frac{dt}{\sqrt{M^2 - m^2 - t^2}}$$

$$= \pm 2 \arcsin \frac{t}{\sqrt{M^2 - m^2}}\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \pm 2 \arcsin \sqrt{\frac{|P^2(e^{i\varphi})|^2 - m^2}{M^2 - m^2}}\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2},$$

здесь $u_k = u(\varphi_k)$, $t_k = t(u_k)$, $k = 1, 2$.

Рассмотрим правую часть:

$$\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{n|e^{i\varphi} + 1| d\varphi}{|\sqrt{e^{i2\varphi} - 2e^{i\varphi}\cos\alpha + 1}|} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{n\left|\left(e^{i\varphi/2} + \dfrac{1}{e^{i\varphi/2}}\right)\right| d\varphi}{\left|\sqrt{e^{i\varphi} + \dfrac{1}{e^{i\varphi}} - 2\cos\alpha}\right|}$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{n\left|\dfrac{1}{2}\left(e^{i\varphi/2} + \dfrac{1}{e^{i\varphi/2}}\right)\right| d\varphi}{\left|\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\left(e^{i\varphi/2} + \dfrac{1}{e^{i\varphi/2}}\right)\right)^2 - \dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}\right|} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{n\,|\cos(\varphi/2)|\, d\varphi}{\left|\sqrt{\cos^2(\varphi/2) - \cos^2(\alpha/2)}\right|}$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{n\cos(\varphi/2) d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\varphi/2)}} = 2n \arcsin \frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\alpha/2)}\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Утверждение доказано. □

Замечание. Устремляя α к π, приходим к теореме 2 работы [3]

Теорема 3. *Для любого полинома $P(z) \in \mathcal{P}_n^c$ и любого натурального $N \geqslant \dfrac{\alpha}{\alpha - 2\arcsin(\sin(\alpha/2)\cos(\pi/2n))}$ справедливо неравенство*

$$\max_{k=0,\ldots,N} |P(e^{i\varphi_k})| \geqslant \cos\left(n \arccos \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\alpha}{2N}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right) \max_{\varphi\in[-\alpha,\alpha]} |P(e^{i\varphi})|$$

$$= T_n\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2N}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)\max_{\varphi\in[-\alpha,\alpha]}|P(e^{i\varphi})|$$

где $\varphi_k = -\alpha + \dfrac{2\alpha k}{N}$, $k = 0,\dots,N$.

Доказательство. Пусть $z_0 = e^{i\varphi_0}$ – одна из точек, в которой достигается максимум M. Среди точек φ_k, $k = 0,\dots,N$, найдется по крайней мере одна, пусть φ_m, такая, что $|\varphi_m - \varphi_0| \leqslant \dfrac{\alpha}{N}$. Неравенство (8) дает

$$\arcsin\sqrt{\frac{|P(e^{i\varphi_m})|^2 - m^2}{M^2 - m^2}}$$

$$\geqslant \frac{\pi}{2} - n\left|\arcsin\frac{\sin\frac{\varphi_m}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \arcsin\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\pi}{2} - n\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2N}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - n\arccos\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2N}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} \geqslant 0.$$

Второе неравенство следует из нечетности функции

$$y(x) = \arcsin\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

а также ее возрастания и выпуклости вниз на промежутке $[0,\alpha]$. Тогда

$$\sqrt{\frac{|P(e^{i\varphi_m})|^2 - m^2}{M^2 - m^2}} \geqslant \cos\left(n\arccos\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2N}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right),$$

следовательно,

$$|P(e^{i\varphi_m})| \geqslant M\cos\left(n\arccos\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2N}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right) = M\,T_n\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2N}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Осталось заметить, что $|P(e^{i\varphi_m})| \leqslant \max\limits_{k=0,\dots,N} |P(e^{i\varphi_k})|$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 4. *Для любого полинома $P(z) \in \mathcal{P}_n^c$ и любого натурального $N \geqslant n$ справедливо неравенство*

$$\max_{k=0,\dots,N} |P(e^{i\varphi_k})| \geqslant \cos\frac{\pi n}{2N} \max_{\varphi\in[-\alpha,\alpha]} |P(e^{i\varphi})|,$$

где $\varphi_k = 2\arcsin\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi k}{N}\right)\right)$, $k = 0,\dots,N$, *соответственно.*

Доказательство. Пусть $z_0 = e^{i\varphi_0}$ – одна из точек, в которой достигается максимум M. Среди точек φ_k, $k = 0,\dots,N$, найдется по крайней мере одна, пусть φ_m, такая, что

$$\left|\arcsin\frac{\sin\frac{\varphi_m}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \arcsin\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right| \leqslant \frac{\pi}{2N}.$$

Неравенство (8) дает

$$\arcsin\sqrt{\frac{|P(e^{i\varphi_m})|^2 - m^2}{M^2 - m^2}}$$

$$\geqslant \frac{\pi}{2} - n\left|\arcsin\frac{\sin\frac{\varphi_m}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \arcsin\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right| \geqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi n}{2N} \geqslant 0.$$

Отсюда

$$\sqrt{\frac{|P(e^{i\varphi_m})|^2 - m^2}{M^2 - m^2}} \geqslant M\cos\frac{\pi n}{2N}$$

и, следовательно,

$$|P(e^{i\varphi_k})| \geqslant M\cos\frac{\pi n}{2N}.$$

Осталось заметить, что $|P(e^{i\varphi_m})| \leqslant \max\limits_{k=0,\dots,N} |P(e^{i\varphi_k})|$. Теорема доказана. $\square$

Устремляя α к π, в теоремах 3 и 4, приходим к оценке Дубинина (3) с точностью до поворота единичной окружности.

Литература

1. E. Rakhmanov, B. Shekhtman, *On discrete norms of polynomials.* — J. Approx. Theory **139** (2006), 2–7.
2. T. Sheil-Small, *An inequality for the modulus of a polynomial evaluated at the roots of unity.* — Bull. London Math. Soc. **40** (2008), 956–964.
3. В. Н. Дубинин, *К теоремам искажения для алгебраических полиномов.* — Дальневост. мат. журн. **11**:1 (2011), 28–36.
4. В. Н. Дубинин, *Нижняя граница для дискретной нормы полинома на окружности.* — Мат. заметки **90** (2011), 306–309.
5. D. Coppersmith, T. Rivlin, *The growth of polynomials bounded at equally spaced points.* — SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 970–983.
6. E. A. Rakhmanov, *Bounds for polynomials with a unit discrete norm.* — Annals of Math. **165** (2007), 55–88.
7. В. Н. Дубинин, *Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов.* — Алгебра и анализ **13**, No. 1 (2001), 16–43.
8. В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков, *О полиномах с ограничениями на дугах окружности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 73–82.

Kalmykov S. I. Comparison of discrete and uniform norms of polynomials on a segment and a circle arc.

In the paper inequalities containing discrete and uniform norms of polynomials on an interval and a circle arc are proved. The proofs are based on Bernstein-type inequalities. Obtained inequalities supplement some corresponding results of Rakhmanov, Shekhtman, Sheil-Small, Dubinin.

Дальневосточный федеральный университет, ул. Суханова, 8, 690950 Владивосток, Россия

E-mail: sergeykalmykov@inbox.ru

Поступило 23 августа 2012 г.