Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 404, 2012 г.

В. В. Жук

ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПОСРЕДСТВОМ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ ЗНАЧЕНИЙ САМОЙ ФУНКЦИИ И ЕЁ ПЕРВООБРАЗНЫХ

Пусть C – пространство 2π-периодических непрерывных функций f с равномерной нормой: $\|f\| = \max\limits_{x\in(-\infty,+\infty)} |f(x)|$; $E_n(f)$ – наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n в пространстве C;

$$C^{(r)} = \{f \in C : \exists f^{(r)} \in C\}, \quad C_0 = \left\{f \in C : \int\limits_{-\pi}^{\pi} f = 0\right\}.$$

Если $f \in C_0$, то через $f^{(-r)}$ при натуральном r обозначается функция мз $C^{(r)} \cap C_0$, такая, что $(f^{(-r)})^{(r)} = f$. Положим для $f \in C_0$ при $h > 0$

$$U_h(f,x) = \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{h^r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} A(k,r) f^{(-r)}\big(x + \lambda(k,r)h\big).$$

В работе устанавливается при неограничительных требованиях общая теорема, позволяющая устанавливать неравенства вида

$$E_n(f) \leqslant K\|f - U_h(f)\|.$$

Полученная теорема содержит, в частности, как хорошо известные результаты, так и значительное количество новых.

При этом отметим (и это существенно), что те утверждения, которые были получены ранее, часто требовали для своего установления нетривиальных рассуждений, в то время как доказательство представленной в работе общей теоремы очень простое.

§1. Обозначения. Вспомогательные утверждения

1. В дальнейшем $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}_+, \mathbb{N}$ суть соответственно множества вещественных, неотрицательных вещественных, неотрицательных целых,

Ключевые слова: периодическая функция, наилучшее приближение, функции Стеклова.

натуральных чисел. Запись $k = \overline{a, b}$, где $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, означает, что k пробегает все целые числа между a и b, включая a и b, если они целые.

Через C обозначаем пространство непрерывных 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой:

$$\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Пусть в пространстве C введена полунорма P. Будем говорить, что P принадлежит классу A, если выполнены условия:

1) существует такая постоянная M, не зависящая от f, что $P(f) \leqslant M\|f\|$ для любой $f \in C$;

2) полунорма P инвариантна относительно сдвига, т.е. для любой $f \in C$ и любого $h \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$P(f(\cdot + h) = P(f).$$

Линейное пространство C, в котором введена полунорма P, принадлежащая классу A, будем называть пространством CP.

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда $\delta_t^r(f)$ – центральная разность r-го порядка функции f с шагом t:

$$\delta_t^r(f, x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k \, f\Big(x + \Big(\frac{r}{2} - kt\Big)t\Big).$$

Если $f \in CP$, то

$$\omega_r(f, h) = \sup_{|t| \leqslant h} P(\delta_t^r(f))$$

– её модуль непрерывности порядка r в пространстве CP.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда H_n – множество вещественных тригонометрических полиномов порядка не выше n.

Если $f \in CP$, то

$$E_n(f) = \inf_{T \in H_n} P(f - T)$$

– наилучшее приближение порядка n в CP.

Легко видеть, что в случае $P \in A$ и полунорма E_n также принадлежит классу A.

Пусть $f \in C$. Тогда

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

– коэффициент Фурье функции f. Если $r, n \in \mathbb{Z}_+$, то

$$C^{(r)} = \{f \in C : \exists f^{(r)} \in C\},$$

$$C_n^{(r)} = \{f \in C^{(r)} : a_k(f) = b_k(f) = 0 \quad \text{при} \quad k = \overline{0, n}\}.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ – подпространство C (т.е. $\mathfrak{M}$ – линейное пространство, замкнутое в C), полунорма P, заданная на C, принадлежит классу A. Тогда будем говорить, что полунормированное пространство $(\mathfrak{M}, P)$ принадлежит классу A и писать $(\mathfrak{M}, P) \in A$.

Отметим, что если последовательность $\{f_m\}$ элементов пространства $(\mathfrak{M}, P) \in A$ сходится в пространстве C к f_0, то $f_0 \in \mathfrak{M}$ и

$$\lim_{m \to \infty} P(f_m) = P(f_0). \tag{1}$$

Далее, если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ элементов пространства $(\mathfrak{M}, P) \in A$ сходится в пространстве C к f_0, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \in \mathfrak{M}$$

и

$$P\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} P(f_k). \tag{2}$$

В самом деле, из полуаддитивности полунормы следует, что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$P\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} P(f_k).$$

Отсюда, пользуясь соотношением (1), предельным переходом получаем требуемое.

Лемма А (см. [1, с. 60]). *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in A$, $f \in \mathfrak{M}$. *Тогда, если функция* $g \in C$ *такова, что*

$$a_k(g) = \alpha_k a_k(f), \quad b_k(g) = \beta_k b_k(f) \quad (k = \overline{0, \infty})$$

или $a_k(g) = \alpha_k b_k(f)$, $b_k(g) = \beta_k a_k(f)$ $(k = \overline{1, \infty})$, $a_0(g) = \alpha_0 a_0(f))$, *где* α_k, β_k *из* $\mathbb{R}$, *то* $g \in \mathfrak{M}$.

Для $f \in C_0$ при $r \in \mathbb{N}$ через $f^{(-r)}$ обозначаем функцию из $C_0^{(r)}$ такую, что $(f^{(-r)})^{(r)} = f$.

Следствие A. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in A$, $f \in \mathfrak{M} \cap C_0$, $r \in \mathbb{N}$. *Тогда* $f^{(-r)} \in \mathfrak{M} \cap C_0$.

Лемма B (см. [1, с. 58])**.** *Пусть функция* K *непрерывна на множестве* $\mathbb{R} \times [a, b]$, *где* $-\infty < a < b < \infty$, $K(\cdot, t) \in \mathfrak{M}$ *при любом фиксированном* $t \in [a, b]$. *Тогда функция*

$$g = \int_a^b K(\cdot, t)\, dt \in \mathfrak{M}$$

и

$$P(g) \leqslant \int_a^b P(K(\cdot, t))\, dt.$$

Полагаем

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l(r+1)}}{(2l+1)^{r+1}}.$$

Величины K_r в литературе часто называют константами Фавара.

2. Нам понадобятся следующие известные результаты.

Теорема A (см. [1, с. 148])**.** *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(r)} \cap CP$. *Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \frac{K_r}{(n+1)^r} E_n(f^{(r)}). \tag{3}$$

Теорема B (см. [1, с. 148])**.** *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in C_n^{(r)} \cap CP$. *Тогда*

$$P(f) \leqslant \frac{K_r}{(n+1)^r} P(f^{(r)}). \tag{4}$$

Следствие B. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in C_n^{(r)} \cap CP$. *Тогда*

$$\|f\| \leqslant \frac{K_r}{(n+1)^r} \|f^{(r)}\|. \tag{5}$$

3. Лемма 1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in A$; $A(k, r)$, $\lambda(k, r) \in \mathbb{R}$ *при* $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C_n \cap \mathfrak{M}$, *ряд*

$$\sum_{r \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{h^r (n+1)^r} \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |A(k, r)|$$

сходится,

$$U_h(f,x)=\sum_{r\in\mathbb{N}}\frac{1}{h^r}\sum_{k\in\mathbb{Z}}A(k,r)f^{(-r)}(x+\lambda(k,r)h). \tag{6}$$

Тогда ряд (6) *сходится в пространстве* C, $U_h(f)\in C_n\cap\mathfrak{M}$ *и*

$$P(U_h(f))\leqslant\sum_{r\in\mathbb{N}}\frac{P(f^{(-r)})}{h^r}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|A(k,r)|.$$

Доказательство. Так как в силу (5) для любой функции $g\in C_n^{(r)}$ справедливо неравенство

$$\|g\|\leqslant\frac{K_r}{(n+1)^r}\|g^{(r)}\|,$$

то

$$\begin{aligned}&\sum_{r\in\mathbb{N}}\frac{1}{h^r}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big\|A(k,r)f^{(-r)}(\cdot+\lambda(k,r))h\big\|\\ \leqslant&\sum_{r\in\mathbb{N}}\frac{\|f^{(-r)}\|}{h^r}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|A(k,r)|\leqslant\sum_{r\in\mathbb{N}}\left(\frac{K_r\|f\|}{h^r(n+1)^r}\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}}|A(k,r)|\\ \leqslant&\frac{\pi}{2}\|f\|\sum_{r\in\mathbb{N}}\frac{1}{h^r(n+1)^r}\ \sum_{k\in\mathbb{Z}}|A(k,r)|<\infty.\end{aligned}$$

Следовательно, ряд, стоящий в правой части (6), сходится равномерно для $x\in\mathbb{R}$ при фиксированном h. Отсюда вытекает, что $U_h(f)\in\mathfrak{M}\cap C_n$.

Далее,

$$\begin{aligned}P(U_h(f))&\leqslant\sum_{r\in\mathbb{N}}\frac{1}{h^r}\sum_{k\in\mathbb{Z}}P(A(k,r)f^{(-r)}(\cdot+\lambda(k,r)h))\\ &=\sum_{r\in\mathbb{N}}\frac{1}{h^r}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|A(k,r)|P(f^{(-r)}(\cdot+\lambda(k,r)h))\\ &=\sum_{r\in\mathbb{N}}\frac{P(f^{(-r)})}{h^r}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|A(k,r)|.\quad\square\end{aligned}$$

Лемма 2. *Пусть* $(\mathfrak{M},P)\in A$, $m\in\mathbb{N}$; $A(k,r)$, $\lambda(k,r)\in\mathbb{R}$ *при* $k\in\mathbb{Z}$, $r=\overline{1,m}$, $h>0$, *ряды*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|A(k,r)|\quad(r=\overline{1,m})$$

сходятся, $f \in \mathfrak{M} \cap C_0$,

$$U_h(f,x) = \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{h^r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} A(k,r) f^{(-r)}(x + \lambda(k,r)h). \tag{7}$$

Тогда ряд (7) *сходится в пространстве* C, $U_h(f) \in \mathfrak{M} \cap C_0$ *и*

$$P(U_h(f)) \leqslant \sum_{r=1}^{m} \frac{P(f^{(-r)})}{h^r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |A(k,r)|.$$

Доказательство. Ряд

$$\sum_{r=1}^{m} \frac{1}{h^r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big\| A(k,r) f^{(-r)}(\cdot + \lambda(k,r))h \big\| \leqslant \sum_{r=1}^{m} \frac{\|f^{(-r)}\|}{h^r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |A(k,r)|$$

сходится. Отсюда следует, что при фиксированном h ряд, стоящий в правой части формулы (7), сходится равномерно для $x \in \mathbb{R}$ и, следовательно, $U_h(f) \in \mathfrak{M} \cap C_0$, Далее,

$$\begin{aligned} P(U_h(f)) &\leqslant \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{h^r} P\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} A(k,r) f^{(-r)}(\cdot + \lambda(k,r)h) \Big) \\ &\leqslant \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{h^r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |A(k,r)| P(f^{(-r)}(\cdot + \lambda(k,r)h)) \\ &= \sum_{r=1}^{m} \frac{P(f^{(-r)})}{h^r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |A(k,r)|. \quad \square \end{aligned}$$

§2. Теоремы общего характера

1. Теорема 1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in A$, $m \in \mathbb{N}$; $A(k,r)$, $\lambda(k,r) \in \mathbb{R}$ *при* $k \in \mathbb{Z}$, $r = \overline{1,m}$, $h > 0$, *ряды*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |A(k,r)| \quad (r = \overline{1,m})$$

сходятся, $f \in C_0 \cap \mathfrak{M}$,

$$U_h(f,x) = \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{h^r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} A(k,r) f^{(-r)}(x + \lambda(k,r)h).$$

Тогда $U_h(f) \in \mathfrak{M} \cap C_0$ *и*

$$P(f) \leqslant P(f - U_h(f)) + \sum_{r=1}^{m} \frac{P(f^{(-r)})}{h^r} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |A(k,r)|.$$

Для доказательства теоремы 1 достаточно сопоставить лемму 2 и неравенство

$$P(f) \leqslant P(f - U_h(f)) + P(U_h(f)).$$

Следствие 1. *Пусть полунорма* $P \in A$, $m \in \mathbb{N}$; $A(k,r)$, $\lambda(k,r) \in \mathbb{R}$ *при* $k \in \mathbb{Z}$, $r = \overline{1,m}$, $h > 0$, *ряды*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |A(k,r)| \quad (r = \overline{1,m})$$

сходятся, $f \in C_0$,

$$U_h(f,x) = \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{h^r} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A(k,r) f^{(-r)}(x + \lambda(k,r)h).$$

Тогда $U_h(f) \in C_0$ *и при* $n \in \mathbb{Z}_+$

$$E_n(f) \leqslant E_n(f - U_h(f)) + \sum_{r=1}^{m} \frac{E_n(f^{(-r)})}{h^r}, \tag{8}$$

$$E_n(f) \leqslant E_n(f - U_h(f)) + E_n(f) \sum_{r=1}^{m} \frac{K_r}{(n+1)^r h^r} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |A(k,r)|. \tag{9}$$

Доказательство. Чтобы установить неравенство (8) достаточно применить теорему 1 к пространству C, в котором в качестве полунормы P взята полунорма E_n, очевидно принадлежащая классу A. Для доказательства неравенства (9) достаточно сопоставить неравенство (8) с соотношением (3) (теорема A)

$$E_n(g) \leqslant \frac{K_r}{(n+1)^r} E_n(g^{(r)}),$$

справедливым для любой функции $g \in C^{(r)}$. □

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия* 1, $\gamma > 0$,

$$\alpha(\gamma) = \sum_{r=1}^{m} \frac{K_r}{\gamma^r} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |A(k,r)| < 1.$$

Тогда для любой $f \in C$

$$E_n(f) \leqslant \frac{1}{1-\alpha(\gamma)} E_n\Big(f - U_{\frac{\gamma}{n+1}}(f)\Big).$$

2. Теорема 2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in A$; $A(k,r)$, $\lambda(k,r) \in \mathbb{R}$ *при* $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in \mathfrak{M} \cap C_n$, *ряд*

$$\sum_{r\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{h^r (n+1)^r}\right) \sum_{k\in\mathbb{Z}} |A(k,r)|$$

сходится

$$U_h(f,x) = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{h^r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} A(k,r) f^{(-r)}(x + \lambda(k,r)h).$$

Тогда $U_h(f) \in \mathfrak{M} \cap C_n$ *и*

$$P(f) \leqslant P(f - U_h(f)) + \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{P(f^{(-r)})}{h^r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |A(k,r)|, \tag{10}$$

$$P(f) \leqslant P(f - U_h(f)) + P(f) \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{K_r}{(n+1)^r h^r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |A(k,r)|. \tag{11}$$

Доказательство. Неравенство (10) сразу следует из сопоставления леммы 1 с неравенством

$$P(f) \leqslant P((f - U_h(f)) + P(U_h(f)). \qquad \square$$

Для доказательства неравенства (11) достаточно сопоставить неравенство (10) с соотношением (4) (теорема B)

$$P(g) \leqslant \frac{K_r}{(n+1)^r} P(g^{(r)}),$$

справедливым для любой функции $g \in C_n^{(r)}$.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2, $\gamma > 0$,

$$\beta(\gamma) = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{K_r}{\gamma^r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |A(k,r)| < 1.$$

Тогда

$$P(f) \leqslant \frac{1}{1-\beta(\gamma)} P\Big(f - U_{\frac{\gamma}{n+1}}(f)\Big).$$

§3. Оценки наилучших приближений посредством отклонений функций Стеклова и агрегатов, построенных на основе функций Стеклова

Приводимые в этом параграфе регультаты являются простым следствиями следствия 2. Однако, в целях большей наглядности изложения, мы не станем выводить их из следствия 2, а дадим непосредственные доказательства, основанные на той же идее.

1. Пусть $h > 0$, $f \in C$. Функцией Стеклова первого порядка для функции f с шагом h называется функция $S_{h,1}(f)$, определенная формулой

$$S_{h,1}(f,x) = \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x+t)\,dt.$$

Пусть $(r-1) \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $f \in C$. Функцией Стеклова порядка r для функции f с шагом h называется функция

$$S_{h,r}(f) = S_{h,1}(S_{h,r-1}(f)).$$

Положим для $f \in C$

$$A_k(f,x) = a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N};$$

$A_0(f,x) = \frac{a_0(f)}{2}$. Тогда ряд Фурье функции f запишется в виде: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(f,x)$.

Отметим несколько элементарных, хорошо известных свойств функций Стеклова.

С.1. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $f \in C$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда

$$S_{h,r}(f,x) = \sum_{h=0}^{\infty} A_k(f,x)\left(\frac{\sin\frac{kh}{2}}{\frac{kh}{2}}\right)^r,$$

$$S_{h,r}(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+th)\psi_r(t)\,dt,$$

где

$$\psi_r(t) = \begin{cases} r \sum\limits_{0 \leqslant k < |t| + r/2} \dfrac{(-1)^k(|t| + r/2 - k)^{r-1}}{k!(r-k)!} & \text{при} \quad |t| \leqslant \dfrac{r}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad |t| > \dfrac{r}{2}. \end{cases}$$

Функция ψ_r называется ядром Стеклова.

С.2. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f \in C_0$. Тогда

$$S_{h,r}(f) \in C_0^{(r)}, \quad S_{h,r}(f,x) = h^{-r}\delta_h^r(f^{(-r)},x), \quad S_{h,r}^{(r)}(f,x) = h^{-r}\delta_h^r(f,x).$$

2. Примеры приложений следствия 2.

Пример 1. Пусть $f \in CP$, $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma > 0$, $h = \frac{\gamma\pi}{n+1}$,

$$A_r(\gamma) = \left(\frac{2}{\gamma\pi}\right)^r K_r < 1.$$

Тогда

$$E_n(f) \leqslant \frac{1}{1 - A_r(\gamma)} E_n(f - S_{h,r}(f)).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать что $f \in C_0$. Имеем

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leqslant E_n(f - S_{h,r}(f)) + E_n(S_{h,r}(f)) \\ &= E_n(f - S_{h,r}(f)) + h^{-r} E_n(\delta_h^r(f^{(-r)})). \end{aligned}$$

Применяя теорему А, находим, что

$$h^{-r} E_n(\delta_k^r(f^{(-r)})) \leqslant \frac{K_r}{(n+1)^r h^r} \leqslant \frac{2^r K_r}{(\gamma\pi)^r} E_n(f) = A_r(\gamma) E_n(f).$$

Сопоставляя приведенные неравенства, получаем, что

$$E_n(f) \leqslant E_n(f - S_{h,r}(f)) + A_r(\gamma) E_n(f),$$

и, следовательно,

$$E_n(f)(1 - A_r(\gamma) \leqslant E_n(f - S_{h,r}(f)),$$

т.е.

$$E_n(f) \leqslant \frac{1}{1 - A_r(\gamma)} E_n(f - S_{h,r}(f)). \qquad \square$$

Следствие 4. *Пусть* $f \in CP$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma < 1$, $h = \frac{\gamma\pi}{n+1}$. *Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \frac{\gamma}{\gamma - 1} E_n(f - S_{h,1}(f)).$$

Для доказательства достаточно принять во внимание, что $K_1 = \frac{\pi}{2}$, $A_1(\gamma) = \frac{1}{\gamma}$ и воспользоваться примером 1 при $r = 1$.

Следствие 5. *Пусть* $f \in CP$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $h = \frac{\gamma\pi}{n+1}$. *Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \frac{2\gamma^2}{2\gamma^2 - 1} E_n(f - S_{h,2}(f)).$$

Для доказательства достаточно принять во внимание, что $K_2 = \frac{\pi^2}{8}$,

$$A_2(\gamma) = \frac{4}{\gamma^2\pi^2}\,\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2\gamma^2},$$

и воспользоваться примером 1 при $r = 2$.

Замечание 1. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $f \in CP$. Тогда

$$P(f - S_{h,r}(f)) \leqslant rP(f - S_{h,1}(f)).$$

Действительно, считая $S_{h,0}$ единичным оператором, имеем

$$\begin{aligned} P(f - S_{h,r}(f)) &= P\biggl(\sum_{k=0}^{r-1}(S_{h,k} - S_{h,k+1})(f)\biggr) \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{r-1} P\bigl((S_{h,k} - S_{h,k+1})(f)\bigr) = \sum_{k=0}^{r-1} P(S_{h,k}(f - S_{h,1})(f)) \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{r-1} P(f - S_{h,1}(f)) = rP(f - S_{h,1})(f)). \end{aligned}$$

Следствие 6. *Пусть* $f \in CP$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $h = \frac{\pi}{n+1}$. *Тогда*

$$E_n(f) \leqslant 4E_n(f - S_{h,1}(f)).$$

Доказательство. В силу следствия 5 (при $\gamma = 1$) и замечания 1, имеем

$$E_n(f) \leqslant 2E_n(f - S_{h,2}(f)) \leqslant 4E_n(f - S_{h,1}(f)). \qquad \square$$

Замечание 2. В связи с результатами, предшествовавшими примеру 1, см. [2, с. 219–226], [3]. В частности в [2, с. 221–222] отмечено, что при $h > 0$, $r \in \mathbb{N}$ для любой $f \in CP$ справедливо неравенство

$$\omega_2(f, h) \leqslant C(r)P(f - S_{h,r}(f)), \tag{12}$$

где постоянная $C(r)$ зависит только от r.

В связи с последним неравенством уместно иметь в виду следующее простое, вообще говоря, хорошо известное утверждение.

Пусть U и V – два оператора в CP такие, что для любой $f \in CP$

$$U(V(f)) = V(U(f)), \quad P(U(f)) \leqslant LP(V(f))$$

Тогда при $k \in \mathbb{N}$ для любой $f \in CP$

$$P(U^k(f)) \leqslant L^k P(V^k(f)).$$

Имеем

$$P(U^2(f)) = P(U(U(f)) \leqslant LP(V(U(f)) = LP(U(V(f))$$
$$\leqslant L^2 P(V(V(f)) = L^2 P(V^2(f)).$$

Общий случай рассматривается аналогично.

Так как

$$\omega_2(f,h) = \sup_{|t|\leqslant h} P(\delta_t^2(f)),$$

то из приведенного утверждения и неравенства (12) сразу же следует, что для любой $f \in CP$ при $r, k \in \mathbb{N}$, $h > 0$ справедливо неравенство

$$\omega_{2k}(f,h) \leqslant C(r)^k P(E - S_{h,r}^k(f)).$$

Здесь и далее E – тождественный оператор в C.

Пример 2. Пусть $f \in CP$, $r, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma > 0$, $h = \frac{\gamma\pi}{n+1}$

$$A_{r,k}(\gamma) = \sum_{l=1}^{k} K_{rl} \left(\frac{2}{\gamma\pi}\right)^{rl} C_k^l < 1.$$

Тогда

$$E_n(f) \leqslant \frac{1}{1 - A_{r,k}(\gamma)} E_n((E - S_{h,r})^k)(f).$$

Доказательство. Можно считать, что $f \in C_0$. Положим

$$U(f) = (E - S_{h,r})^k)(f) = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+1} C_k^l S_{h,r}^l(f).$$

Отсюда, опираясь на равенство

$$S_{h,m}(f,x) = h^{-m} \delta_h^m (f^{(-m)}, x),$$

находим, что

$$U(f,x) = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+1} C_k^l h^{-rl} \delta_h^{rl} (f^{(-rl)}).$$

Учитывая это равенство и применяя теорему A, получаем, что

$$\begin{aligned} E_n(U(f)) &\leqslant \sum_{l=1}^{k} C_k^l h^{-rl} E_n(\delta_h^{rl}(f^{(-rl)}) \\ &\leqslant \sum_{l=1}^{k} \frac{K_{rl} C_k^l}{(h(n+1))^{rl}} E_n(\delta_h^{rl}(f)) \leqslant E_n(f) \sum_{l=1}^{k} \frac{K_{rl} 2^{rl}}{(h(n+1))^{rl}} C_k^l \\ &= E_n(f) \sum_{l=1}^{k} K_{rl} C_k^l \left(\frac{2}{\gamma\pi}\right)^{rl} = A_{r,k}(\gamma) E_n(f). \end{aligned}$$

Далее, опираясь на (13), имеем

$$E_n(f) \leqslant E_n(f - U(f)) + E_n(U(f)) \leqslant E_n(f - U(f)) + A_{r,k}(\gamma) E_n(f)$$

и, следовательно,

$$E_n(f)(1 - A_{r,k}(\gamma)) \leqslant E_n(f - U(f)) = E_n((E - S_{h,r})^k(f)),$$

т.е.

$$E_n(f) \leqslant \frac{1}{1 - A_{r,k}(\gamma)} E_n((E - S_{h,r})^k(f)).$$

□

Замечание 3. Пусть $r, k \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$. Тогда

$$A_{r,k}(\gamma) \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\left(\left(\frac{2}{\gamma\pi}\right)^r + 1\right)^k - 1\right).$$

При дополнительном условии $\frac{r}{2} \in \mathbb{N}$ оценка (14) может быть заменена более точной

$$A_{r,k}(\gamma) \leqslant \frac{4}{\pi}\left(\left(\left(\frac{2}{\gamma\pi}\right)^r + 1\right)^k - 1\right),$$

так как $K_{2m} \leqslant \frac{4}{\pi}$ при $m \in \mathbb{N}$.

§4. Формулы численного дифференцирования

1. Под формулами численного дифференцирования мы понимаем формулы для отыскания производной функции f в точке x посредством линейной комбинации некоторого количества значений исходной функции f.

Следуюшая теорема является простым следствием следствия 2, но ввиду того, что она представляет значительный интерес, мы приведем ее доказательство, основанное на той же идее, что и доказательство

следствия 2. Это даст возможность избежать дополнительных технических трудностей. Заметим, что и само доказательство следствия 2 является достаточно простым.

Теорема 3. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in A$; A_k, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ *при* $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma > 0$, $h = \frac{\gamma\pi}{n+1}$, $f \in \mathfrak{M} \cap C^{(r)}$, *ряд* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |A_k|$ *сходится*

$$U_{h,r}(f,x) = h^{-r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k f(x + \lambda_k h),$$

$$\alpha_r(\gamma) = \frac{K_r}{(\gamma\pi)^r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |A_k| < 1.$$

Тогда $U_{h,r}(f) \in \mathfrak{M} \cap C^{(r)}$ *и*

$$E_n(f^{(r)}) \leqslant \frac{1}{1-\alpha_r(\gamma)} E_n(f^{(r)} - U_{h,r}(f)).$$

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |A_k|$ следует, что $U_{h,r} \in \mathfrak{M} \cap C^{(r)}$ и

$$\begin{aligned} E_n(U_{h,r}(f)) &\leqslant h^{-r} E_n\biggl(\sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k f(\cdot + \lambda_k h)\biggr) \\ &\leqslant h^{-r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} E_n\bigl(A_k f(\cdot + \lambda_k h)\bigr) = h^{-r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |A_k| E_n(f). \end{aligned}$$

Отсюда, применяя неравенство (3), находим, что

$$E_n(U_{h,r}(f)) \leqslant E_n(f^{(r)}) \frac{K_r}{(h(n+1))^r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |A_k| = \alpha_k(\gamma) E_n(f^{(r)}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} E_n(f^{(r)}) &\leqslant E_n(f^{(r)} - U_{h,r}(f)) + E_n(U_{h,r}(f)) \\ &\leqslant E_n(f^{(r)} - U_{h,r}(f)) + \alpha_r(\gamma) E_n(f^{(r)}) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$E_n(f^{(r)})(1 - \alpha_r(\gamma)) \leqslant E_n(f^{(r)} - U_{h,r}(f)),$$

т.е.

$$E_n(f^{(r)}) \leqslant \frac{1}{1-\alpha_r(\gamma)} E_n(f^{(r)} - U_{h,r}(f)).$$

2. Приведем один пример приложений теоремы 3.

Пусть $m, r \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f \in C$. Тогда полагаем

$$S_{h,r,m}(f,x) = \frac{2}{C_{2m}^m} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} C_{2m}^{m+k} S_{kh,r}(f,x).$$

Принимая во внимание соотношения

$$S_{h,r}(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+th)\psi_r(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_r = 1, \quad \psi_r(t) = \psi_r(-t) \quad \text{при} \quad r \in \mathbb{R},$$

легко убедиться, что

$$S_{h,r,m}(f,x) = \frac{2(-1)^{m+1}}{C_{2m}^m} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \delta_{th}^{2m}(f,x)\psi_r(t)\,dt + f(x). \tag{15}$$

В силу равенства

$$S_{h,r}^{(r)}(f,x) = h^{-r}\delta_h^r(f,x),$$

для $f \in C$ имеем

$$\begin{aligned} S_{h,r,m}^{(r)}(f,x) &= \frac{2}{h^r C_{2m}^m} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} C_{2m}^{m+k} \frac{\delta_{kh}^r(f,x)}{k^r} \\ &= h^{-r} \sum_{k=-m}^{m} A_{k.m} f(x+kh), \end{aligned}$$

где постоянные $A_{k,m}$ определяются естественным образом.

Пример 3. Пусть $m, r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma > 0$, $h = \frac{\gamma\pi}{n+1}$, $f \in CP \cap C^{(r)}$,

$$\beta_{r,m}(\gamma) = \frac{K_r}{(\gamma\pi)^r} \sum_{k=-m}^{m} |A_{k,m}| < 1, \quad \varepsilon_{r,m}(\gamma) = \frac{1}{1-\beta_{r,m}(\gamma)}.$$

Тогда

$$E_n(f^{(r)} \leqslant \varepsilon_{r,m}(\gamma) E_n\Big(f^{(r)} - S^{(r)}_{h,r,m}(f)\Big), \tag{16}$$

$$E_n(f^{(r)} \leqslant \varepsilon_{r,m}(\gamma) P\Big(f^{(r)} - S^{(r)}_{h,r,m}(f)\Big), \tag{17}$$

$$E_n(f^{(r)} \leqslant \frac{2\varepsilon_{r,m}(\gamma)}{C^m_{2m}} E_n\Big(\int\limits_0^{r/2} \delta^{2m}_{th}(f^{(r)}, \cdot)\psi_r(t)\,dt\Big), \tag{18}$$

$$E_n(f^{(r)} \leqslant \frac{2\varepsilon_{r,m}(\gamma)}{C^m_{2m}} \int\limits_0^{r/2} E_n\Big(\delta^{2m}_{th}(f^{(r)})\Big)\psi_r(t)\,dt\Big), \tag{19}$$

$$E_n(f^{(r)} \leqslant \frac{2\varepsilon_{r,m}(\gamma)}{C^m_{2m}} E_n \int\limits_0^{r/2} \omega_{2m}(f^{(r)}, th)\psi_r(t)\,dt\Big), \tag{20}$$

$$E_n(f^{(r)} \leqslant \frac{\varepsilon_{r,m}(\gamma)}{C^m_{2m}} \omega_{2m}\Big(f^{(r)}, \frac{rh}{2}\Big). \tag{21}$$

Неравенство (21) можно переписать в форме

$$E_n(f) \leqslant \frac{\varepsilon_{r,m}(\gamma)}{C^m_{2m}} \omega_{2m}\Big(f, \frac{rh}{2}\Big)$$

для любой $f \in CP$, соответствующей обобщенному неравенству Джексона. □

Неравенство (16) получается прямым применением теоремы 3 (с учетом отмеченных выше свойств $S_{h,r,m}(f)$). Соотношение (17) следует из неравенства (16), если воспользоваться неравенством $E_n(g) \leqslant P(g)$ для любой $g \in CP$. Неравенство (18) – другая запись неравенства (16). При этом надо иметь в виду (15) и равенство $\psi_r(t) = 0$ при $|t| > \frac{r}{2}$. Соотношение (19) получается сопоставлением (18) с леммой B. Неравенство (20) сразу следует из (19) и определения модуля непрерывности. Для доказательства (21) надо воспользоваться неравенством (20), приняв во внимание возрастание модуля непрерывности и равенство

$$\int\limits_0^{r/2} \psi_r(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Замечание 4. В данной статье мы ограничились лишь некоторыми примерами приложений только следствия 2. Более подробно этот вопрос автор предполагает рассмотреть в других публикациях.

3. При $1 \leqslant p < \infty$ через L_p обозначаем множество измеримых 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, у которых

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^p \right)^{1/p} < +\infty;$$

L_∞ – множество измеримых 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, у которых

$$\|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < +\infty.$$

Полагаем

$$E_n(f)_p = \operatorname*{int}_{T \in H_n} \|f - T\|_p.$$

На примере следствия 6 (как наиболее простого случая) покажем как могут быть сформулированы аналоги изложенных в работе результатов применительно к пространству L_p.

Следствие 6′. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $h = \frac{\pi}{n+1}$. *Тогда*

$$E_n(f)_p \leqslant 4E_n(f - S_{h,1}(f))_p.$$

Для установления соответствующего аналога достаточно воспользоваться методом распространения.

Все результаты работы остаются справедливыми и для комплекснозначных функций. Данная работа в определенной степени является продолжением работы [4]. Однако, её изложение не зависит от работы [4]. Возможно, читателю будет не бесполезно ознакомиться с вводной частью и списком литературы работы [4].

Литература

1. В. В. Жук, *Аппроксимация периодческих функций.* Л., 1982.
2. В. В. Жук, В. Ф. Кузютин, *Аппроксимация функций и численное интегрирование.* С.-Петербург, 1995.
3. В. В. Жук, *Дифференциальные уравнения с частными производными.* — Межвузовский сборник научных трудов. С.-Петербург (1992), 74–85.
4. В. В. Жук, *Неравенства для наилучших приближений типа обобщенной теоремы Джексона.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **404** (2012), 135–156.

Zhuk V. V. Estimates of best approximations of periodic function by linear combinations values of the function itself and its primitives.

The general theorems which allow to obtain some estimates of best approximations of periodic function by deviations of aggregates composed of approximated function and its primitives are established. Several examples of applications are given.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетский пр. 28,
Петродворец, 198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: zhuk@math.spbu.ru

Поступило 31 октября 2012 г.