Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 404, 2012 г.

В. Н. Дубинин

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ И РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫЕ С ЛЕМНИСКАТАМИ

Введение

Пусть f – рациональная функция, заданная на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}$. Множество вида

$$E(f,t) = \{z : |f(z)| \leqslant t\}, \quad 0 < t < \infty,$$

принято называть лемнискатой. Иногда лемнискатой называют также множество

$$L(f,t) = \{z : |f(z)| = t\}, \quad 0 < t < \infty.$$

Известно много замечательных свойств и нерешенных проблем, связанных с лемнискатами (см., например, [1]). Для фиксированных комплексных чисел c_k и c_n, отличных от нуля, обозначим через $P(k,n) = P(c_k, c_n)$ класс полиномов

$$P(z) = c_k z^k + \ldots + c_n z^n$$

с комплексными коэффициентами c_j, $k \leqslant j \leqslant n$, $c_k \neq 0$, $c_n \neq 0$, $n > 1$. В первом параграфе данной статьи обсуждается классическая оценка площади лемнискаты $E(P,t)$, $P \in P(k,n)$, с позиции метода симметризации. Мы обобщаем результат Полиа [2] на случай произвольных n-кратных голоморфных накрытий кольца (теорема 1). Как следствия, отсюда вытекают неравенства для площади лемнискаты полинома либо рациональной функции. Кроме того, в этом параграфе формулируется нерешенная задача о площади лемнискаты полинома класса $P(k,n)$, $k \neq n$. В §2 приводятся неравенства для критических точек и критических значений полиномов класса $P(k,n)$, $k < n$. Для полинома P этого класса введем следующие обозначения:

Ключевые слова: теоремы покрытия и искажения, неравенства для полиномов, полиномы Чебышева, принципы мажорации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект No. 11-01-00038), ДВО РАН (проект No. 12-I-ОМН-02) и Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0353.

$D(P,t)$ – связная компонента множества $\{z : |P(z)| < t\}$, содержащая начало координат, $0 < t < \infty$;

$t(P)$ – максимальное значение t, при котором множество $D(P,t)$ не содержит критических точек полинома P, отличных от точки $z = 0$;

$D(P) = D(P, t(P))$.

Ясно, что на границе области $D(P)$ содержится по крайней мере одна критическая точка ζ полинома P такая, что соответствующее критическое значение $P(\zeta)$ имеет модуль $t(P)$. Из доказательства теоремы 1 работы [3] вытекает, в частности, точная верхняя оценка величины $t(P)$ в классе $P(1,n)$ (см. теорему 2 настоящей статьи). Мы ставим задачу о нахождении верхней грани величины $t(P)$ в классе $P(k,n)$, $1 < k < n$, и получаем ассимптотически точную (при $c_n = 1, n \to \infty$) верхнюю оценку $t(P)$ в этом классе (теорема 3). Далее, в §2 доказывается неравенство для полинома P в точках кривой $L(P,t) \cap \overline{D(P)}$, $0 < t \leqslant t(P)$, уточняющее известное неравенство Смейла в проблеме о среднем значении полиномов [4], и обсуждается новая задача, близкая этой проблеме (теорема 4 и задача 3). Доказательства теорем 3 и 4 сводятся к задачам об экстремальном разбиении, имеющим многочисленные приложения в геометрической теории функций комплексного переменного [5]. Наконец, в §3 доказываются многоточечные теоремы искажения для полиномов и рациональных функций f в точках, расположенных на линиях уровня $L(f,t)$.

§1. Теорема о площади лемнискаты

Пусть P – полином степени n со старшим коэффициентом, равным единице, и пусть $m(\cdot)$ означает внешнюю меру Лебега на z-плоскости. В 1928 году Полиа установил неравенство

$$m(E(P,1)) \leqslant \pi. \tag{1}$$

Равенство достигается в случае $P(z) = z^n$ [2] (см. также [1], [6, с. 292]). Доказательство неравенства (1) в работе [2] содержит более сильное утверждение: функция

$$(\pi t^{2/n})^{-1} m(E(P,t)) \tag{2}$$

является строго возрастающей на промежутке $0 < t < \infty$, исключая тот случай, когда $P(z) = (z-a)^n$ при некотором комплексном a. Этот замечательный факт созвучен с одной из геометрических версий

леммы Шварца, полученной в сравнительно недавней работе [7]. Действительно, из теоремы 1.9 этой работы, примененной к подходящей регулярной ветви функции, обратной полиному P, следует, что для полиномов P, степени не меньше двух, $P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$, функция

$$(\pi t^2)^{-1} m(D(P,t))$$

является строго возрастающей на промежутке $0 < t < t(P)$. Доказательство Полиа [2] монотонности функции (2) можно распространить на случай более общих n-кратных накрытий (не только полиномами). Тем не менее, представляет интерес другой подход к решению подобного рода задач, основанный на симметризации (см., например, [8]). Ниже будет предложено обобщение результата Полиа на произвольные голоморфные n-кратные накрытия (теорема 1), установленное с помощью симметризации Шварца. Данное обобщение включает монотонность функции (2), а также монотонность соответствующей функции, где полином P заменен на рациональную функцию. Напомним, что некоторая функция F осуществляет полное n-кратное накрытие области G областью D, если при стремлении точки z к границе области D все предельные значения функции $F(z)$ принадлежат границе G и каждой точке $w \in G$ соответствует ровно n прообразов в области D (с учетом кратности).

Теорема 1. *Пусть голоморфная в области D функция F осуществляет полное n-кратное накрытие кольца $t_1 < |w| < t_2$ $(0 < t_1 < t_2 < \infty)$ областью D, и пусть E – объединение всех связных компонент дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$, имеющих на своей границе точки, соответствующие при отображении F точкам на окружности $|w| = t_1$. Предположим, что $\infty \notin E$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{2}{n}} \leqslant \frac{m(E \cup D)}{m(E)}. \tag{3}$$

Равенство в (3) имеет место в том и только в том случае, когда $F(z) = c(z-a)^n$, где c и a – произвольные комплексные постоянные.

Доказательство. Можно считать, что $m(E \cup D) \neq \infty$. Рассмотрим конденсаторы [8, §1.2]

$$C_1 = (\{w : |w| \leqslant t_1\}, \{w : |w| \geqslant t_2\}) \quad \text{и} \quad C_2 = (E, \overline{\mathbb{C}} \setminus (E \cup D)).$$

Справедливо равенство

$$\frac{2\pi n}{\log\dfrac{t_2}{t_1}} = n\,\mathrm{cap}\,C_1 = \mathrm{cap}\,C_2. \tag{4}$$

Действительно, если $u(w)$ – потенциальная функция конденсатора C_1, то функция $v(z) = u(F(z))$, доопределенная в дополнении области D по непрерывности, является потенциальной для конденсатора C_2. Ввиду n-кратности накрытия, осуществляемого функцией F, и конформной инвариантности интеграла Дирихле имеем

$$\mathrm{cap}\,C_1 = \int\limits_{t_1<|w|<t_2} |\nabla u|^2 d\sigma_w = \frac{1}{n}\int\limits_D |\nabla v|^2 d\sigma_z = \frac{1}{n}\,\mathrm{cap}\,C_2.$$

Далее воспользуемся симметризацией Шварца, которая сопоставляет конденсатору C_2 конденсатор $\mathrm{Sh}C_2$

$$\mathrm{Sh}C_2 = (\mathrm{Sh}E, \overline{\mathbb{C}}\backslash\mathrm{Sh}(E\cup D)),$$

где $\mathrm{Sh}\Omega$ означает круг с центром в начале координат и площади, равной мере Ω, причем если Ω – замкнутое множество, то $\mathrm{Sh}\Omega$ – замкнутый круг, а если Ω – множество открытое, то $\mathrm{Sh}\Omega$ – открытый круг. Хорошо известно, что

$$\mathrm{cap}\,C_2 \geqslant \mathrm{cap}\,\mathrm{Sh}C_2 = \frac{4\pi}{\log\dfrac{m(E\cup D)}{m(E)}}. \tag{5}$$

Равенство в (5) достигается только в том случае, когда D – кольцевая область, ограниченная концентрическими окружностями [8, с.115]. Суммируя (4) и (5), приходим к неравенству (3).

Предположим теперь, что в неравенстве (3) имеет место равенство. Тогда равенство выполняется и в неравенстве (5). Следовательно, функция F осуществляет полное n-кратное накрытие кольца $t_1 < |w| < t_2$ некоторым кольцом $r_1 < |z-a| < r_2$, где a – комплексное число. Из равенства (4) получаем

$$\frac{2\pi n}{\log\dfrac{t_2}{t_1}} = \frac{2\pi}{\log\dfrac{r_2}{r_1}}.$$

С другой стороны, в силу единственности потенциальной функции

$$\frac{\log\left|\dfrac{F(z)}{t_1}\right|}{\log\dfrac{t_2}{t_1}} \equiv u(F(z)) \equiv \frac{\log|\dfrac{z-a}{r_1}|}{\log\dfrac{r_2}{r_1}}.$$

Отсюда

$$|F(z)| \equiv \frac{t_1}{r_1^n}|z-a|^n$$

в кольце $r_1 < |z-a| < r_2$. Следовательно,

$$F(z) \equiv c(z-a)^n$$

в этом кольце при некотором комплексном c. Наоборот, если функция F имеет выписанный вид, то в (3) выполняется равенство. Теорема доказана. □

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *функция*

$$(\pi t^{2/n})^{-1} m(E \cup E(F,t)),$$

где $E(F,t) = \{z \in D : |F(z)| \leqslant t\}$, *является строго возрастающей на промежутке* $t_1 < t < t_2$, *исключая тот случай, когда* $F(z) = c(z-a)^n$.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает монотонность функции (2). В случае рациональных функций получаем следующий результат.

Следствие 2. *Пусть* f *– рациональная функция степени* n, *отличная от степенной функции* $c(z-a)^{\pm n}$, *и пусть* $t^* = |f(\infty)|$. *Тогда для лемнискаты* $E(f,t) = \{z : |f(z)| \leqslant t\}$ *справедливы утверждения*:

(a) *если* $t^* \neq 0$, *то функция*

$$(\pi t^{2/n})^{-1} m(E(f,t))$$

строго возрастает на интервале $(0, t^*)$;

(b) *если* $t^* \neq \infty$, *то функция*

$$(\pi t^{2/n}) m(\mathbb{C} \setminus E(f,t))$$

строго убывает на интервале (t^*, ∞).

Доказательство. Пусть $t^* \neq 0$. Для произвольных t_1, t_2, удовлетворяющих условию $0 < t_1 < t_2 < t^*$, положим

$$D = f^{-1}(\{w : t_1 < |w| < t_2\}), \quad E = f^{-1}(\{w : |w| \leqslant t_1\}).$$

Так как $\infty \notin E$, то неравенство (3) дает

$$\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{2}{n}} < \frac{mE(f,t_2)}{mE(f,t_1)}$$

и, следовательно, утверждение (a) доказано. Случай (b) сводится к случаю (a) заменой $f(z) \to 1/f(z)$. Следствие доказано.

В заключение этого параграфа приведем нерешенную задачу о площади лемнискаты. Эквивалентная форма неравенства (1) для полиномов P класса $P(k,n)$ имеет вид

$$m(E(P,t)) \leqslant \pi \left(\frac{t}{|c_n|}\right)^{\frac{2}{n}} \tag{6}$$

для любых $t, 0 < t < \infty$. Заметим, что при малых t в случае $k < n$ оценка (6) является грубой, так как левая часть неравенства (6) эквивалента $\pi(t/|c_k|)^{2/k}$ при $t \to 0$. В связи с этим представляет интерес следующая задача. □

Задача 1. *Найти точную верхнюю оценку площади $m(E(P,t))$ в классе $P(k,n)$, $k < n$.*

Обсуждая эту проблему при $k = 1$, рассмотрим полином P, удовлетворяющий условиям $P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$. В этом случае в круге $|w| < t$, $t < t(P)$, определена регулярная ветвь $f(w) = w/c_1 + \dots$ функции, обратной полиному P. Применяя классическую оценку площади образа круга при отображении функцией класса S

$$\frac{c_1}{t} f(wt),$$

заключаем, что

$$m(E(P,t)) \geqslant m(D(P,t)) \geqslant \pi \left(\frac{t}{|c_1|}\right)^2 \tag{7}$$

(см., например, [6, с.180]). Равенство достигается в случае $P(z) = c_1 z$. Оценка (7) не является точной в классе $P(1,n)$, $n \neq 1$.

§2. Неравенства для критических точек и критических значений

В обозначениях введения величина $t(P)$, $P \in P(k,n)$, $k < n$, совпадает с модулем критического значения полинома P в некоторой

критической точке на границе области $D(P)$. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. *Определить верхнюю грань величины $t(P)$ в классе $P(k,n)$, $k<n$.*

Решение задачи 2 при n, кратном k, содержится в теореме 2.

Теорема 2. *Для полинома $P(z)=c_kz^k+\ldots+c_{mk}z^{mk}$, $c_k\neq 0$, $c_{mk}\neq 0$, $k\geqslant 1$, $m>1$, справедливо неравенство*

$$t(P)\leqslant\frac{m-1}{m}\left|\frac{c_k^m}{mc_{mk}}\right|^{\frac{1}{m-1}}. \tag{8}$$

Равенство в (8) достигается в случае $P(z)=c_kz^k+c_{mk}z^{mk}$.

Доказательство. При умножении полинома P на комплексное число, отличное от нуля, левая и правая части неравенства (8) умножаются на модуль этого числа. Следовательно, можно считать, что $c_k=1$. Заменой $P(z)\to a^{-k}P(za)=z^k+\ldots+c_{mk}a^{mk-k}z^{mk}$, которая также не меняет неравенства (8), добиваемся, чтобы старший коэффициент полинома P тоже равнялся единице. Наконец, можно считать, что $k=1$. Действительно, $P(z)=Q(z^k)$, где $Q(u)=c_ku+\ldots+c_{mk}u^m$. Нетрудно видеть, что $t(P)=t(Q)$. Предположим теперь, что для так нормированного полинома P неравенство (8) неверно. Тогда существует константа λ, $0<\lambda<1$, такая, что

$$\lambda t(P)=|S(\zeta)|>(m-1)(1/m)^{m/(m-1)}, \tag{9}$$

где $S(z)=\lambda P(z)=\lambda z^n+\ldots+\lambda z$, $S'(\zeta)=0$, $\zeta\in\partial D(P)$. Дальнейшее доказательство теоремы 2 совпадает с доказательством теоремы 1 работы [3], где неравенство (5) необходимо заменить на неравенство (9) данной статьи и переобозначить $\lambda\leftrightarrow t$, $m\leftrightarrow n$. В работе [3] вместо левой части (9) стоит величина

$$\min\{|S(\zeta)|:S'(\zeta)=0\}.$$

Однако неравенства (9) достаточно для доказательства, так как круг $S(D(P))=\{w:|w|<\lambda t(P)\}$ расположен на проекции листа L_1, что вместе с другими фактами обеспечивает непрерывное продолжение функции ω с листа L_1 на "приклеенные" к нему листы (см. [3, стр. 66-68]). Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. *Если полином P принадлежит классу $P(k,n)$, $k<n$, то*

$$t(P) \leqslant \left|\frac{c_k^n}{c_n^k}\right|^{\frac{1}{n-k}}. \tag{10}$$

Доказательство. Для данного полинома $P(z) = c_k z^k + \ldots + c_n z^n$ класса $P(k,n)$ фиксируем произвольное число t, $0 < t \leqslant t(P)$, и рассмотрим четыре области:

$$D_1 = \{w : |w| < t\}, \quad D_2 = \{w : |w| > t\},$$

$$B_1 = D(P,t) \quad \text{и} \quad B_2 = \{z : |P(z)| > t\}.$$

Полином P осуществляет полное k-кратное накрытие области D_1 областью B_1, и полное n-кратное накрытие области D_2 областью B_2. По теореме И. П. Митюка [9], выполняются равенства

$$\begin{aligned} t &= r(D_1,0) = |c_k| r^k(B_1,0), \\ \frac{1}{t} &= r(D_2,\infty) = |c_n|^{-1} r^n(B_2,\infty), \end{aligned} \tag{11}$$

где $r(G,a)$ означает внутренний радиус области G относительно точки a (см. также [8, теорема 8.2]). Пусть z_0 – произвольная точка, не принадлежащая объединению $B_1 \cup B_2$, и пусть

$$\varphi(z) = \frac{z+z_0}{z-z_0}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} r(\varphi(B_1),-1) &= \frac{2}{|z_0|} r(B_1,0), \\ r(\varphi(B_2),1) &= |2z_0| r(B_2,\infty). \end{aligned} \tag{12}$$

Области $\varphi(B_1)$ и $\varphi(B_2)$ не пересекаются. По теореме М. А. Лаврентьева,

$$r(\varphi(B_1),-1) \cdot r(\varphi(B_2),1) \leqslant 4$$

(см., например, [5, I, неравенство (4.8)], [8, неравенство (6.1′)]). Учитывая равенства (11) и (12), отсюда получаем оценку (10). Теорема доказана. □

Оценка (10) не является точной. Однако, если положить в (10) коэффициент c_n равным единице и затем устремить степень $n \to \infty$,

то правая часть (10) стремится к $|c_k|$. Этот же предел имеет последовательность $t(P_n)$, где $P_n(z) = c_k z^k + z^n$. В этом смысле оценку (10) можно считать асимптотически точной.

Теорема 4. *Пусть полином P принадлежит классу $P(k,n)$, $k < n$, и пусть $0 < t \leqslant t(P)$. Тогда для любой точки z множества $\partial D(P,t) = L(P,t) \cap \overline{D(P)}$ справедливо неравенство*

$$\left(\frac{t}{|c_k|}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{1}{|z|} + \left(\frac{|c_n|}{t}\right)^{\frac{1}{n}} |z| \leqslant 4. \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим области $\varphi(B_1)$ и $\varphi(B_2)$ из доказательства теоремы 3, где z_0 – произвольная фиксированная точка множества $\partial D(P,t)$. Как уже отмечалось выше эти области не пересекаются. Кроме того, они не содержат бесконечно удаленную точку, а область $\varphi(B_1)$ является к тому же односвязной и $\infty \in \partial\varphi(B_1)$. Пусть E – связная компонента дополнения области $\varphi(B_2)$, содержащая область $\varphi(B_1)$. Тогда область $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ односвязна и содержит $\varphi(B_2)$. Поэтому, в частности,

$$r(\varphi(B_2), 1) \leqslant r(\overline{\mathbb{C}} \setminus E, 1). \tag{14}$$

Применяя к односвязным не пересекающимся областям $\varphi(B_1)$ и $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ на открытой плоскости $\mathbb{C}$ теорему Г. П. Бахтиной [10], получаем

$$r(\varphi(B_1), -1) + r(\overline{\mathbb{C}} \setminus E, 1) \leqslant 8.$$

Остается воспользоваться соотношениями (11), (12) и (14). Теорема доказана. □

Следствие 3. *Для любой критической точки ζ полинома*

$$P(z) = c_1 z + \ldots + c_n z^n, \quad c_1 \neq 0, \quad c_n \neq 0,$$

лежащей на границе множества $D(P)$, справедливо неравенство

$$\left|\frac{P(\zeta)}{c_1\zeta}\right| + |\zeta| \left|\frac{nc_n}{c_1}\right|^{\frac{1}{n-1}} (n-1)^{-\frac{1}{n}} \leqslant 4. \tag{15}$$

Доказательство. Положим в неравенстве (13) $t = t(P)$, $k = 1$, и $z = \zeta$. После чего в первом слагаемом в левой части (13) заменим $t(P)$ на $|P(\zeta)|$, а в правом – оценим $t(P)$ согласно неравенству (8). Следствие доказано. □

В связи с полученным результатом рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. *Найти*

$$\sup_{P\in P(1,n)} \max_{\substack{\zeta\in\partial D(P)\\ P'(\zeta)=0}} \left|\frac{P(\zeta)}{c_1\zeta}\right|. \tag{16}$$

Ввиду (15), верхняя грань (16) не превосходит четырех. Напомним, что известная задача Смейла [4] эквивалентна нахождению величины

$$\sup_{P\in P(1,n)} \min_{\substack{\zeta\\ P'(\zeta)=0}} \left|\frac{P(\zeta)}{c_1\zeta}\right|, \tag{17}$$

либо оценке этой величины сверху независимо от степени полинома P. Понятно, что (17) не превосходит константы (16). Смейл показал, что (17) не превосходит четырех и поставил вопрос: верно ли, что (17) не превосходит $(n-1)/n$ или хотя бы единицы? Не смотря на значительный интерес к задаче Смейла, в настоящее время известны решения лишь некоторых частных случаев этой задачи, либо получены оценки сверху величины (17), которые при $n\to\infty$ дают в пределе число, не меньше четырех (см., например, [11]–[15] и библиографию к этим статьям). Следующий ниже пример показывает, что в отличие от гипотезы Смейла об оценке (17) верхняя грань (16) строго больше единицы. Положим

$$P_1(z)=4z-4z^2,\quad P_2(u)=\frac{7}{6}(u-\frac{1}{7}u^7)\quad \text{и}\quad P=P_2\circ P_1.$$

Точка $\zeta=(1-\sqrt{2})/2$ является критической точкой полинома P. Действительно,

$$P'(z)=P_2'(P_1(z))P_1'(z)=\frac{7}{6}(1-(P_1(z))^6)4(1-2z)=0 \text{ при } P_1(z)=-1,$$

и $P_1(\zeta)=4\zeta(1-\zeta)=-1$. Легко видеть, что модули всех критических значений полинома P равны единице. Отсюда $t(P)=1$. Далее, $P(\zeta)=-1$, $P(0)=0$ и $P'(z)>0$ на интервале $(\zeta,0)$. Следовательно, полином P отображает интервал $(\zeta,0)$ в интервал $(-1,0)\subset\{w:|w|<1\}$. Поэтому интервал $(\zeta,0)$ принадлежит области $D(P)$ и точка $\zeta\in\partial D(P)$. Верхняя грань (16) не меньше величины

$$\left|\frac{P(\zeta)}{P'(0)\zeta}\right|=\left|\frac{3}{7(1-\sqrt{2})}\right|>1.$$

Представляет интерес также измененная задача 3, где максимум в (16) необходимо заменить на минимум.

§3. Оценки искажений в граничных точках лемнискат

Всюду ниже f – рациональная функция, удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. Обозначим через $S(f)$ максимальную область в z-плоскости, содержащую начало координат и такую, что рациональная функция $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает эту область на область, звездообразнную относительно точки $w = 0$. Понятно, что образ $f(S(f))$ представляет собой область, ограниченную радиальными лучами, выходящими из некоторых критических значений функции f. Нетрудно видеть, что если S – область в w-плоскости, ограниченная радиальными лучами, выходящими из всех критических значений функции f, то $f^{-1}(S) \subset S(f)$, $\overline{f^{-1}(S)} = \overline{S(f)}$, где f^{-1} – мероморфная ветвь обратной к f функции, заданная на $f(S(f))$, $f^{-1}(0) = 0$.

Теорема 5. *Предположим, что рациональная функция f удовлетворяет условиям $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, и все критические значения $f(\zeta)$, соответствующие критическим точкам ζ на границе $\partial S(f)$, принадлежат объединению лучей, выходящих из начала координат под углами, кратными $2\pi/n$, $n \geqslant 1$. Пусть t_1 и t_2 – произвольные положительные числа, $0 < t_1 < t_2 < \infty$, и пусть z_{jk} – конечные точки области $S(f)$ такие, что $f(z_{jk}) = t_j \exp(i(\pi/n + 2\pi k/n))$, $j = 1, 2$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{\left(\prod\limits_{j=1}^{2}\prod\limits_{k=1}^{n}|f'(z_{jk})|\right)\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{l=1}^{n}|z_{1k}-z_{2l}|^2}{\prod\limits_{j=1}^{2}\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}|z_{jk}-z_{jl}|} \leqslant \frac{(t_2^n - t_1^n)^{2n}}{\prod\limits_{j=1}^{2}(nt_j^{n-1})^n}.$$

Равенство достигается для тождественного отображения f при любых t_1 и t_2.

Доказательство. Введем обозначения:

$$w_{jk} = f(z_{jk}), \quad j = 1, 2, \quad k = 1, \ldots, n; \quad U(w_0, r) = \{w : |w - w_0| < r\};$$

$$\triangle = \{\delta_{jk}\}_{j,k}, \quad \delta_{jk} = (-1)^j, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, \ldots, n.$$

При достаточно малом положительном r рассмотрим конденсаторы [8, §2.2]

$$C^*(r) = (\overline{\mathbb{C}}_w, \{\overline{U(w_{jk}, r)}\}_{j,k}, \triangle),$$

$$C(r) = (\overline{\mathbb{C}}_z, \{f^{-1}(\overline{U(w_{jk}, r)})\}_{j,k}, \triangle),$$

где функция f^{-1} определена выше. Обозначим через ω потенциальную функцию конденсатора $C(r)$, и пусть $v(w) = \omega(f^{-1}(w))$, $w \in f(S(f))$. Тогда

$$\operatorname{cap} C(r) = \int\limits_{\mathbb{C}_z} |\nabla\omega|^2 d\sigma_z \geqslant \int\limits_{S(f)} |\nabla\omega|^2 d\sigma_z = \int\limits_{f(S(f))} |\nabla v|^2 d\sigma_w.$$

Для потенциальной функции ω^* конденсатора $C^*(r)$ на граничных лучах области $f(S(f))$ выполняется $\partial\omega^*/\partial n = 0$. Следовательно, по принципу Дирихле (со свободной границей) получаем

$$\int\limits_{f(S(f))} |\nabla v|^2 d\sigma_w \geqslant \int\limits_{\mathbb{C}_w} |\nabla\omega^*|^2 d\sigma_w = \operatorname{cap} C^*(r).$$

Функция $\varphi(w) = w^n$ $\quad n$-кратно накрывает конденсатор

$$C_n^*(r) = \left(\overline{\mathbb{C}}, \{\varphi(\overline{U(w_{j1}, r)})\}_j,\ \{(-1)^j\}_j\right)$$

конденсатором $C^*(r)$. Поэтому

$$\operatorname{cap} C^*(r) = n \operatorname{cap} C_n^*(r).$$

Окончательно,

$$\operatorname{cap} C(r) \geqslant n \operatorname{cap} C_n^*(r),$$

причем равенство достигается в случае $f(z) \equiv z$. Применяя к емкостям конденсаторов $C(r)$ и $C_n^*(r)$ асимптотическую формулу (2.15) из книги [8], приходим к неравенству

$$-\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} \log|f'(z_{jk})| + \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \log|z_{jk} - z_{jl}| - 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \log|z_{1k} - z_{2l}| \geqslant$$

$$\geqslant n\left\{\sum_{j=1}^{2} \log(nt_j^{n-1}) - 2\log(t_2^n - t_1^n)\right\}.$$

Теорема доказана. □

Устремляя в теореме 5 $t_2 \to t_1$, стандартными рассуждениями получаем оценку для производных Шварца $S_f(z_{1k})$, $\quad k = 1, \ldots, n$ (см. [8,

§7.6]). Сравнением емкостей подходящих конденсаторов можно получить также точную оценку произведения

$$\prod_{j=1}^{2}\prod_{k=1}^{n}|f'(z_{jk})|$$

снизу при любых четных n. Более общие оценки для рациональных функций получаются в этой связи с помощью теоремы 1 работы Ю.Е. Аленицына [16], примененной к функциям $f^{-1}(\eta_k w)$ при подходящих η_k, $|\eta_k|=1$, $k=1,\dots,n$. Однако эти оценки обладают тем недостатком, что все они достигаются в случае тождественного отображения, а не в случае рациональной функции степени $n>1$. Некоторый прогресс в устранении этого недостатка содержится в следующей теореме.

Теорема 6. *Пусть $w=P(z)$ – полином степени $n\geqslant 2$, $P(0)=P'(0)-1=0$, и t – вещественное число, $0<t<t(P)$. Пусть $\{z_k\}_{k=1}^m$, $m\geqslant n-1$, – совокупность различных точек на линии уровня $L(P,t)$ такая, что множество значений $\{P(z_k)\}_{k=1}^m$ содержит радиальные проекции всех критических значений $P(\zeta)$, $\zeta\in\partial S(P)$, на окружность $|w|=t$. Тогда*

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{m}|z_k^{2m}P'(z_k)|}{\prod\limits_{k=1}^{m}\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m}|z_k-z_l|}\geqslant\frac{1}{m^m}(\rho t(P))^{m^2+m}\left[1-\left(\rho\frac{m}{m+1}\right)^m\right]^m, \tag{18}$$

где ρ – единственый корень уравнения

$$\rho-\frac{m^m}{(m+1)^{m+1}}\rho^{m+1}=\frac{t}{t(P)},$$

лежащий на промежутке $(0,(m+1)/m)$. Равенство в (18) достигается для полинома $P(z)=z-z^{m+1}$ и точек

$$z_k=m\rho/(m+1)^{1+1/m}\exp\left(i(2\pi k/m)\right),$$

$k=1,\dots,m$, при любых значениях t, $0<t<t(P)=m/(m+1)^{1+1/m}$.

Доказательство. Всюду ниже существенно используется доказательство теоремы 1 работы [3], включая принятые там обозначения. Исключение в обозначениях состоит в том, что степень полинома n в [3]

необходимо заменить на $m+1$, где m из теоремы 6. Таким образом, в частности,

$$P^*(z) = z^{m+1} - z \quad \text{и} \quad \alpha_{m+1} = -(1/(m+1))^{1/m} m/(m+1).$$

Фиксируем полином P, число t из промежутка $(0, t(P))$ и положим

$$w_1^* = 0, \quad w_k^* = |\alpha_{m+1} t/t(P)| \exp\left(i(\pi + 2\pi(k-2)/m)\right), \quad k = 2, \ldots, m+1,$$

$\triangle = \{\delta_k\}_{k=1}^{m+1}$, $\delta_1 = -m$, $\delta_k = 1$, $k = 2, \ldots, m+1$. Пластины конденсатора

$$C^*(r) = (\overline{\mathbb{C}}_z, \{f^*(\overline{U(w_k^*, r)})\}_{k=1}^{m+1}, \triangle)$$

представляют собой замкнутые "почти круги" с центрами в точках $z_1^* = 0$, $z_k^* = f^*(w_k^*) = \lambda \exp\left(i(2\pi(k-2)/m)\right)$, $k = 2, \ldots, m+1$, радиусов $r/|P^{*'}(z_k^*)|$, $k = 1, \ldots, m+1$. Здесь f^* – регулярная ветвь функции, обратной полиному P^*, в круге $|w| < t(P)$, $f^*(0) = 0$, а λ – единственный корень уравнения

$$\lambda - \lambda^{m+1} = |\alpha_{m+1} t/t(P)|,$$

лежащий на промежутке $(0, (1/(m+1))^{1/m})$. Пусть u^* – потенциальная функция конденсатора $C^*(r)$. Заменим функцию ω^* и полином S из доказательства в [3] на функцию

$$\omega^*(W^*) = u^*(\mathscr{P}^*(W^*))$$

и полином

$$S(z) = [\alpha_{m+1}/t(P)]P(z)$$

с теми же обозначениями. Далее почти слово в слово повторяется та часть доказательства теоремы 1 статьи [3], где осуществляется построение функции ω с помощью диссимметризации [8]. Отличие состоит в том, что при диссимметризации необходимо учитывать все лучи (l_k), выходящие из начала координат и проходящие через точки $P(z_k)$, а не только те лучи, которые проходят через разрезы листа L_1, как это сделано в [3]. В результате получаем

$$\int\limits_{\mathscr{R}^*} |\nabla \omega^*|^2 d\sigma \geqslant \int\limits_{\mathscr{R}} |\nabla \omega|^2 d\sigma$$

(в отличие от равенства (6) в [3] имеем неравенство, так как число листов поверхности $\mathscr{R}^*$ равно $m+1 \geqslant n$ и "отбрасывание лишних листов" уменьшает интергал Дирихле). Функция

$$v(z) = \omega(\mathscr{S}^{-1}(z))$$

является допустимой для конденсатора

$$C(r) = (\overline{\mathbb{C}_z}, \{S^{-1}(\overline{U(P(z_k), r)})\}_{k=0}^{m}, \triangle),$$

где $z_0 = 0$, а S^{-1} – та ветвь функции, обратной полиному S в круге $|w| < t(S)$, которая начало переводит в начало. Учитывая конформную инвариантность интеграла Дирихле, имеем

$$\operatorname{cap} C^*(r) = \int\limits_{\mathbb{C}_z} |\nabla u^*|^2 d\sigma = \int\limits_{\mathscr{R}^*} |\nabla \omega^*|^2 d\sigma$$
$$\geqslant \int\limits_{\mathscr{R}} |\nabla \omega|^2 d\sigma = \int\limits_{\mathbb{C}_z} |\nabla v|^2 d\sigma \geqslant \operatorname{cap} C(r).$$

Итоговое неравенство вместе с асимптотической формулой (2.15) из книги [8] для емкости конденсатора дает

$$- m^2 \log |P^{*'}(0)| - \sum_{k=2}^{m+1} \log |P^{*'}(z_k^*)| - 2m \sum_{k=2}^{m+1} \log |z_k^*| + \sum_{k=2}^{m+1} \sum_{\substack{l=2 \\ l \neq k}}^{m+1} \log |z_k^* - z_l^*|$$
$$\geqslant m^2 \log \frac{t(P)}{|\alpha_{m+1} P'(0)|} + \sum_{k=1}^{m} \log \frac{t(P)}{|\alpha_{m+1} P'(z_k)|} - 2m \sum_{k=1}^{m} \log |z_k|$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} \log |z_k - z_l|.$$

Отсюда

$$\frac{\prod\limits_{k=2}^{m+1} \prod\limits_{\substack{l=2 \\ l \neq k}}^{m+1} |z_k^* - z_l^*|}{\prod\limits_{k=2}^{m+1} |z_k^*|^{2m} |P^{*\prime}(z_k^*)|} \geqslant \frac{(t(P))^{m^2+m} \prod\limits_{k=1}^{m} \prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} |z_k - z_l|}{|\alpha_{m+1}|^{m^2+m} \prod\limits_{k=1}^{m} |z_k|^{2m} |P'(z_k)|}$$

с равенством для $P = P^*$. Вычисляя выражение в левой части этого неравенства и делая замену $\lambda = \rho m/(m+1)^{1+1/m}$, получаем неравенство (18). Теорема доказана. □

Заметим, что при $t \to t(P)$ левая часть неравенства (18) стремится к нулю, так как, по крайней мере, одна из точек z_k необходимо стремится к критической точке полинома P. Правая часть (18) также

стремится к нулю. Таким образом, неравенство (18) ограничивает скорость убывания $|P'(z)|$, когда точка z стремится к критической точке. Нетрудно показать, что при $t \to 0$ неравенство (18) превращается в неравенство Шура для некоторых точек на единичной окружности, а при фиксированном t и $m \to \infty$ неравенство (18) отражает хорошо известное неравенство для внутреннего радиуса некоторой области. Особый интерес неравенство (18) представляет в том случае, когда число критических значений $P(\zeta)$, $\zeta \in \partial S(P)$, меньше $n-1$. В этом случае можно выбирать "свободные" точки z_k на линии уровня $L(P,t)$, не увеличивая степень экстремальной функции ($m+1=n$).

Литература

1. P. Borwein, T. Erdelyi, *Polynomials and polynomial inequalities.* — Grad. Texts in Math. **161**, Springer-Verlag, New York, 1995.
2. G. Polya, *Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete.* — S.B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math.-phys.-tech. Kl. (1928), 280–282.
3. В. Н. Дубинин, *Неравенства для критических значений полиномов.* — Мат. сб. **197**, No. 8 (2006), 63–72.
4. S. Smale, *The fundamental theorem of algebra and complexity theory.* — Bull. Amer. Math. Soc. **4** (1981), 1–36.
5. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций* I, II. — Алгебра и анализ **9** (1997), вып. 3, 41–103; вып. 5, 1–50.
6. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М., 1966.
7. R. B. Burckel, D. E. Marshall, D. Minda, P. Poggi-Corradini, and T. J. Ransford, *Area, capacity and diameter versions of Schwarz's lemma.* — Conform. Geom. Dyn. **12** (2008), 133–152.
8. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* Владивосток, 2009.
9. И. П. Митюк, *Принцип симметризации для многосвязных областей.* – Докл. АН СССР **157** (1964), 268–270.
10. Г. П. Бахтина, *Об одной экстремальной задаче конформного отображения единичного круга на неналегающие области.* – Укр. мат. ж. **26** (1974), 635–637.
11. E. Fujikawa, T. Sugawa, *Geometric function theory and Smale's mean value conjecture.* — Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci. **82**, No. 7 (2006), 97–100.
12. Bl. Sendov, P. Marinov, *Verification of Smale's mean value conjecture for $n \leqslant 10$.* — C. R. Acad. Bulgare Sci. **60**, No. 11 (2007), 1151–1156.
13. E. Crane, *A bound for Smale's mean value conjecture for complex polynomials.* — Bull. London Math. Soc. **39** (2007), 781–791.

14. Y. Wang, *Some results on Smale's mean value conjecture.* — Third International Congress of Chinese Mathematicians. Part 1, 2, 595–602, AMS/IP Stud. Adv. Math., 42, pt. 1.2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
15. A. Hinkkanen, I. Kayumov, *Smale's problem for critical points on certain two rays.* — J. Aust. Math. Soc. **88**, No. 2 (2010), 183–191.
16. Ю. Е. Аленицын, *Об однолистных функциях без общих значений в многосвязной области.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **94** (1968), 4–18.

Dubinin V. N. Some inequalities for polynomials and rational functions associated with a lemniscate.

Inequalities for the area of a lemniscate, and inequalities for polynomials in a lemniscate containing no critical points other than zeros are given. Also, multipoint distortion estimates at the boundary of a lemniscate are proved. Some open problems are discussed. One of them associates with the well-known Smale's mean value conjecture.

Дальневосточный федеральный университет,
ул.Суханова 8, 690950 Владивосток, Россия
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило 5 мая 2012 г.