Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 404, 2012 г.

Е. Г. Голузина

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ В КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

Пусть T – класс функций

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n,$$

регулярных и типично вещественных в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, т.е. удовлетворяющих в U условию

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} f(z) > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

В классе T Дженкинс [1] получил точную оценку $f(r)$ при заданном значении c_2 $(-2 \leqslant c_2 \leqslant 2)$:

$$\frac{r}{1 - c_2 r + r^2} \leqslant f(r) \leqslant \frac{r(1 + c_2 r + r^2)}{(1 - r^2)^2}, \ 0 < r < 1. \tag{1}$$

Равенство в (1) слева достигается только для функции $z(1-c_2 z+z^2)^{-1}$, справа – только для функции $z(1 + c_2 z + z^2)(1 - z^2)^{-2}$.

В [2] найдено множество значений $f(z_1)$ $(0 < |z_1| < 1)$, $f \in T$, при заданных значениях c_2 и c_3 и, в частности, дана оценка $f(r)$ при заданных значениях c_2 и c_3.

В настоящей работе дополняются результаты в [2].

§1.

Пусть D – множество значений системы $\{c_2, c_3, f(r)\}$, $0 < r < 1$, на классе T. Положим

$$x_1 = c_2, \quad x_2 = c_3, \quad x_3 = f(r), \quad \rho = r + \frac{1}{r}.$$

Ключевые слова: типично вещественная функция, множество значений.

Теорема 1. 1. *D есть множество всех точек*

$$X = X(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

определяемое неравенствами

$$\varepsilon + (2 - \varepsilon\rho)x_3 \geqslant 0, \quad \varepsilon(x_2 + 1) - (2 + \varepsilon\rho)x_1 + 2\rho \geqslant 0, \quad \Delta_\varepsilon \geqslant 0, \tag{2}$$

где

$$\Delta_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon + (2 - \varepsilon\rho)x_3 & \varepsilon x_1 - 2 \\ \varepsilon x_1 - 2 & \varepsilon(x_2 + 1) - x_1(\varepsilon\rho + 2) + 2\rho \end{vmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

2. $\operatorname{Int} D = \{X \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon + (2 - \varepsilon\rho)x_3 > 0, \Delta_\varepsilon > 0, \varepsilon = \pm 1\}$.

3. *Границе ∂D соответствуют только функции*

$$f_\varepsilon(z) = \frac{\lambda_1 z}{1 - 2\varepsilon z + z^2} + \frac{\lambda_2 z}{1 - 2tz + z^2}, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{3}$$

где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$, $0 < t < 1$.

Теорема 2. *Пусть $f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots \in T$. Тогда справедливы точные оценки*

$$f(r) \leqslant \frac{1}{\rho - 2}\left[1 - \frac{(2 - c_2)^2}{c_3 + 1 - c_2(\rho + 2) + 2\rho}\right],$$

$$f(r) \geqslant \frac{1}{\rho + 2}\left[1 - \frac{(2 + c_2)^2}{c_3 + 1 - c_2(\rho - 2) - 2\rho}\right].$$

Равенства достигаются только для функций

$$f_\varepsilon(z) = \frac{z}{1 - 2\varepsilon z + z^2}\left[1 + \frac{(c_2 - 2\varepsilon)^2 z}{c_2 - 2\varepsilon - z(c_3 + 1 - 2\varepsilon c_2) + z^2(c_2 - 2\varepsilon)}\right]$$

при $\varepsilon = \pm 1$.

§2.

2.1. Доказательство теоремы 1. Как известно (см. [3, 4]), регулярная в U функция $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, тогда и только тогда принадлежит классу T, когда она допускает интегральное представление

$$f(z) = \int_{-1}^{1} z(1 - 2tz + z^2)^{-1} d\alpha(t), \quad \alpha \in M_1, \quad z \in U, \tag{4}$$

где M_1 – класс неубывающих на отрезке $[-1,1]$ функций $\alpha(t)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{1} d\alpha(t) = 1$.

В силу (4), для системы $\{c_2, c_3, f(r)\}$ имеем интегральное представление

$$c_2 = \int\limits_{-1}^{1} 2t\, d\alpha(t), \quad c_3 = \int\limits_{-1}^{1} (4t^2 - 1)\, d\alpha(t), \tag{5}$$

$$f(r) = \int\limits_{-1}^{1} (\rho - 2t)^{-1} d\alpha(t), \quad \alpha \in M_1.$$

Положим $y_1 = \frac{c_2}{2}$, $y_2 = \frac{c_3+1}{4}$, $y_3 = f(r)$.

Для того, чтобы имело место представление (5), необходимо и достаточно, чтобы при выполнении неравенства

$$\varphi(t) = \delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \delta_3 (\rho - 2t)^{-1} \geqslant 0 \tag{6}$$

для всех $t, -1 \leqslant t \leqslant 1$, где $\{\delta_k\}_0^3 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 \neq 0$, выполнялось неравенство

$$\delta_0 + \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 + \delta_3 y_3 \geqslant 0$$

(см. [5, стр. 84–85]).

Запишем (6) в виде

$$\varphi(t) = \frac{A_3(t)}{\rho - 2t} \geqslant 0, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{7}$$

где $A_3(t)$ – некоторый алгебраический многочлен третьей степени.

Используя теорему Маркова–Лукача (см. [5, стр. 89]), запишем (7) в виде

$$\varphi(t) = \frac{1+t}{\rho-2t}(\beta_0+\beta_1 t)^2 + \frac{1-t}{\rho-2t}(\gamma_0+\gamma_1 t)^2 = \beta_0^2\left[-\frac{1}{2}+\frac{2+\rho}{2(\rho-2t)}\right]$$
$$+\beta_1^2\left[-\frac{\rho(\rho+2)}{8}-\frac{(2+\rho)t}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{\rho^2(2+\rho)}{8(\rho-2t)}\right]$$
$$+2\beta_0\beta_1\left[-\frac{2+\rho}{4}-\frac{t}{2}+\frac{\rho(\rho+2)}{4(\rho-2t)}\right]$$
$$+\gamma_0^2\left[\frac{1}{2}+\frac{2-\rho}{2(\rho-2t)}\right]+\gamma_1^2\left[\frac{\rho(\rho-2)}{8}+\frac{(\rho-2)t}{4}+\frac{t^2}{2}+\frac{\rho^2(2-\rho)}{8(\rho-2t)}\right]$$
$$+2\gamma_0\gamma_1\left[\frac{\rho-2}{4}+\frac{t}{2}+\frac{\rho(2-\rho)}{4(\rho-2t)}\right]\geqslant 0,$$

где $\beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1$ – вещественные числа.

Выполнение неравенства

$$H(X) = \int_{-1}^{1} \varphi(t)\,d\alpha(t) \geqslant 0, \quad \alpha(t)\in M_1,$$

приводит к неотрицательньсти всех главных миноров матриц $A_1(X)$ и $A_{-1}(X)$, где

$$A_\varepsilon(X) = \begin{pmatrix} \varepsilon+x_3(2-\varepsilon\rho) & \varepsilon\rho-2+\varepsilon x_1+(2-\varepsilon\rho)\rho x_3 \\ \varepsilon\rho-2+\varepsilon x_1+(2-\varepsilon\rho)\rho x_3 & (\varepsilon\rho-2)\rho+(\varepsilon\rho-2)x_1+\varepsilon(x_2+1)+\rho^2(2-\varepsilon\rho)x_3 \end{pmatrix},$$

что равносильно (см. [6, стр. 270]) неотрицательности всех главных миноров матриц $B_\varepsilon(X)$:

$$B_\varepsilon(X) = \begin{pmatrix} \varepsilon+x_3(2-\varepsilon\rho) & \varepsilon x_1-2 \\ \varepsilon x_1-2 & 2\rho+\varepsilon(1+x_2)-x_1(2+\varepsilon\rho), \end{pmatrix}, \quad \varepsilon=\pm 1.$$

Первое утверждение теоремы 1 доказано. Второе и третье утверждения следуют, соответственно, из лемм 1, 3 и леммы 2 в [2]. □

Используя для системы $\{c_2, c_3\}$ на классе T представление

$$c_2 = \int_{-1}^{1} 2t\,d\alpha(t), \quad c_3 = \int_{-1}^{1}(4t^2-1)\,d\alpha(t), \quad \alpha(t)\in M_1,$$

находим множество значений этой системы: $c_3+1 \geqslant c_2^2$, $c_3 \leqslant 3$.

Пусть $T(c_2, c_3)$ – класс функций $f(z) \in T$ с заданными значениями c_2 и c_3, удовлетворяющими условию

$$c_3 + 1 > c_2^2, \quad c_3 < 3.$$

Пусть $D(c_2, c_3)$ – множество значений $f(r)$, $0 < r < 1$, $f \in T(c_2, c_3)$.

Доказательство теоремы 2. В силу второго утверждения теоремы 1, $\operatorname{Int} D(c_2, c_3)$ определяется неравенствами

$$\begin{aligned} &x_3(\rho - 2) < 1 \qquad x_3(\rho + 2) > 1, \\ &[1 - (\rho - 2)x_3][c_3 + 1 - c_2(\rho + 2) + 2\rho] > (c_2 - 2)^2, \\ &[-1 + x_3(\rho + 2)x_3][2\rho - 1 + c_3 - c_2(2 - \rho)] > (c_2 + 2)^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Из неравенств (8) находим оценки для $f(r)$. $D(c_2, c_3)$ есть отрезок вещественной оси, концам которого соответствуют функции, получающиеся из (3) при выполнении условий

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad 2\lambda_1\varepsilon + 2t\lambda_2 = c_2, \quad 3\lambda_1 + (4t^2 - 1)\lambda_2 = c_3. \tag{9}$$

В силу условий (9), имеем

$$\lambda_2 = \frac{c_3 - 3}{4(t^2 - 1)} = \frac{c_2 - 2\varepsilon}{2(t - \varepsilon)},$$

откуда

$$2t = \frac{c_3 - 3}{c_2 - 2\varepsilon} - 2\varepsilon.$$

Теорема доказана. □

Обозначим $\widetilde{D}(c_2, c_3)$ множество значений $f(z_1)$ на классе $T(c_2, c_3)$. В случае $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ $(0 < |z_1| < 1)$ имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$, $f \in T$. *Тогда*

1. $\operatorname{Int} \widetilde{D} = \{w = f(z_1) : \Delta_1 \cap \Delta_2\}$, *где*

$$\Delta_1 = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| w - \frac{1}{\zeta_1 - \overline{\zeta}_1} \left[1 - \frac{(c_2 - \overline{\zeta}_1)^2}{\Delta} \right] \right| < \frac{1}{|\zeta_1 - \overline{\zeta}_1|} \left[1 - \frac{|c_2 - \zeta_1|^2}{\Delta} \right] \right\}$$

при

$$\Delta = |\zeta_1 - c_2|^2 + c_3 + 1 - c_2^2,$$

и

$$\Delta_2 = \Bigg\{ w \in \mathbb{C} : \left| w - \frac{1}{\zeta_1^2 - 4}\left(\zeta_1 + c_2 + \frac{c_3 - 3}{\zeta_1 - \overline{\zeta}_1}\right)\right| < \frac{3 - c_3}{|\zeta_1 - \overline{\zeta}_1|\,|\zeta_1^2 - 4|}\Bigg\}, \quad \zeta_1 = z_1 + \frac{1}{z_1}.$$

2. *Точкам на* $\partial\Delta_1$ *соответствуют только функции*

$$f_1(z) \equiv f_1(z; t_1) = \frac{z}{1 - 2t_1 z + z^2}\left[1 + \frac{(c_2 - 2t_1)^2 z}{(c_2 - 2t_1)(1 + z^2) - (c_3 + 1 - 2t_1 c_2)z}\right],\ t_1 \in [-1, 1],$$

точкам на $\partial\Delta_2$ *– только функции*

$$f_2(z) \equiv f_2(z; t) = \frac{z^2}{(1 - z^2)^2}\left[c_2 + \frac{1 + z^2}{z} + \frac{(c_3 - 3)z}{1 - 2tz + z^2}\right],$$
$$t \in \left[\frac{2c_2 - c_3 - 1}{2(2 - c_2)}, \frac{2c_2 + c_3 + 1}{2(2 + c_2)}\right] \equiv [t_1, t_2].$$

Точкам пересечения граничных дуг $\partial\Delta_1$ *и* $\partial\Delta_2$*, принадлежащих* $\partial\widetilde{D}$*, соответствуют функции*

$$f(z) = \frac{z}{(1 \pm z)^2}\left[1 + \frac{(c_2 \pm 2)^2 z}{(c_2 \pm 2)(1 + z^2) - (c_3 + 1 \pm 2c_2)^z}\right].$$

Доказательство теоремы 3. Первое утверждение теоремы 3 доказано в [2]. Докажем второе утверждение.

По лемме 2 в [2] граничные функции, соответствующие точкам на $\partial\Delta_1$ и $\partial\Delta_2$, соответственно имеют вид

$$f_1(z) = \frac{\lambda_1}{\zeta - 2t_1} + \frac{\lambda_2}{\zeta - 2t_2}, \quad t_1 \neq t_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0,$$

и

$$f_2(z) = \frac{\mu_1}{\zeta + 2} + \frac{\mu_2}{\zeta - 2} + \frac{\mu_3}{\zeta - 2t}, \quad \mu_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \zeta = z + \frac{1}{z},$$

где

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ 2t_1\lambda_1 + 2t_2\lambda_2 = c_2,\ (4t_1^2 - 1)\lambda_1 + (4t_2^2 - 1)\lambda_2 = c_3 \tag{10}$$

и

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1,\ -2\mu_1 + 2\mu_2 + 2t\mu_3 = c_2,\ 3\mu_1 + 3\mu_2 + (4t^2 - 1)\mu_3 = c_3. \tag{11}$$

В силу (10), имеем

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 1 - \lambda_2, \\ &2t_1 + 2\lambda_2(t_2 - t_1) = c_2, \\ &4t_1^2 - 1 + 4\lambda_2(t_2^2 - t_1^2) = c_3, \end{aligned} \tag{12}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} &2\lambda_2(t_2 - t_1) = c_2 - 2t_1, \\ &2(c_2 - 2t_1)(t_1 + t_2) = c_3 + 1 - 4t_1^2 \end{aligned} \tag{13}$$

и находим

$$2t_2 = \frac{c_3 + 1 - 2c_2t_1}{c_2 - 2t_1}. \tag{14}$$

В силу (11), имеем

$$\begin{aligned} &\mu_1 = 1 - \mu_2 - \mu_3, \\ &2\mu_3(1 + t) = c_2 + 2 - 4\mu_2, \\ &4\mu_3(1 - t^2) = 3 - c_3, \\ &8\mu_2(1 - t) = c_3 - 3 + 2(1 - t)(c_2 + 2). \end{aligned} \tag{15}$$

Далее в силу (12)–(14), имеем

$$f_1(z) = \frac{1}{\zeta - 2t_1} + \frac{2\lambda_2(t_2 - t_1)}{(\zeta - 2t_1)(\zeta - 2t_2)} = \frac{1}{\zeta - 2t_1}\left[1 + \frac{c_2 - 2t_1}{\zeta - \frac{c_3+1-2c_2t_1}{c_2-2t_1}}\right],$$

и, используя (15), находим

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{\zeta + 2} + \frac{4\mu_2}{\zeta^2 - 4} + \frac{2\mu_3(1 + t)}{(\zeta + 2)(\zeta - 2t)} \\ &= \frac{1}{\zeta + 2} + \frac{4\mu_2}{\zeta^2 - 4} + \frac{c_2 + 2 - 4\mu_2}{(\zeta + 2)(\zeta - 2t)} \\ &= \frac{1}{\zeta + 2} + \frac{c_2 + 2}{(\zeta + 2)(\zeta - 2t)} + \frac{(c_2 + 2)2(1 - t) + c_3 - 3}{(\zeta^2 - 4)(\zeta - 2t)} \\ &= \frac{1}{\zeta^2 - 4}\left(c_2 + \zeta + \frac{c_3 - 3}{\zeta - 2t}\right). \end{aligned}$$

Заметим, что $f_1(z; -1) = f_2(z; t_2)$, $f_1(z; 1) = f_2(z; t_1)$.

Теорема 3 доказана. □

Литература

1. J. A. Jenkins, *Some probleme for typically real functions.* — Canad. J. Math. **13** (1961), 427–431.
2. Е. Г. Голузина, *Об областях значений некоторых систем функционалов в классе типично вещественных функций.* — Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1965), 45–62.
3. M. S. Robertson, *On the coefficients of typically real function.* — Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), 565–572.
4. Г. М. Голузин, *О типично вещественных функциях.* — Мат. сб. **27 (69)** (1950), 201–218.
5. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* М., 1973.
6. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* 5-е изд., М., 2010.

Goluzina E. G. On an estimate in the class of typically real functions.

Let $T(c_2, c_3)$ be the class of functions $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n$ regular and typically real in the disk $|z| < 1$ with fixed values of the coefficients c_2 and c_3. The boundary functions of the region of values of $f(z_0)$ $(0 < |z_0| < 1)$ and sharp estimates for $f(r)$, $0 < r < 1$, in the class $T(c_2, c_3)$ are determined.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
С.-Петербург, Россия
E-mail: goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 25 октября 2012 г.