Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 404, 2012 г.

Е. П. Голубева

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, СВЯЗАННЫЕ С ДЕРЕВОМ ФАРЕЯ

Настоящая работа примыкает к работе [1], где была построена гладкая, строго выпуклая кривая, содержащая большое число рациональных точек с фиксированным знаменателем. Все основные результаты (теоремы 1–4) ниже посвящены изучению кривизны этой кривой.

При оценке числа рациональных точек с фиксированным знаменателем на фиксированной выпуклой кривой вопрос о ее гладкости имеет существенное значение.

Обозначим через $N(k)$ число рациональных точек со знаменателем k, лежащих на такой кривой. В работе [2] было показано, что $N(k) = o(K^{2/3})$. Таким образом, аналог знаменитого результата Ярника в такой постановке не может иметь места.

Свиннертон–Дайер (см. [3]) показал, что $N(k) = O_\varepsilon(k^{0.6+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало, если кривая из класса C^3 и третья производная отделена от нуля. В работе [4] Бомбьери и Пила получили результат близкий к неулучшаемому при условии, что кривая принадлежит к классу C^∞. (Ясно, что неулучшаемый результат это $N(k) = O(k^{1/2})$.

В случае кривой, построенной в работе [1], $N(k) \asymp k^{\log 2/\log 3}$ для последовательности $k = 3^n$ (заметим, что $\log 2/\log 3 > 0.639$).

В работе [5] для очень редкой последовательности k строятся кривые с бóльшими $N(k)$, но эти кривые не являются гладкими.

Кривая из работы [1] задается парой функций, зависящих от параметра t (см. определение функций $P(t)$ и $Q(t)$ ниже).

Эти функции были получены с помощью взвешенных средних числителей и знаменателей рациональных чисел фиксированного уровня дерева Фарея (см. [6]).

Они удовлетворяют соотношению $dP/dQ = t$ и, следовательно, $d^2P/dQ^2 = 1/dQ/dt$.

Как уже упоминалось выше, основные результаты настоящей работы относятся к изучению dQ/dt.

В частности, показано, что почти всюду по мере dt $dQ/dt = 0$. Кроме того, указаны конкретные точки, в которых $dQ/dt = 0$ (это

Ключевые слова: дерево Фарея, гладкая выпуклая кривая, теорема Ярника.

все рациональные числа и достаточно большое число квадратичных иррациональностей).

Кроме того, указано бесконечное множество точек таких, что $dQ/dt = \infty$. К последнему множеству принадлежат, в частности, все точки спектра Маркова.

§1. Дерево Фарея. Функции $P(t)$ и $Q(t)$

Один из способов построения дерева Фарея состоит в следующем: точки нулевого уровня – это точки $0/1$ и $1/1$. Далее, точки уровня n получаются из точек уровня $n-1$ с помощью медиант Фарея: если a/b и c/d – две соседние точки уровня $n-1$, то между ними вставляется точка уровня n вида $(a+c)/(b+d)$.

По-другому точки уровня n можно описать с помощью непрерывных дробей: новые точки уровня n (т.е. не принадлежащие меньшим уровням) это в точности те рациональные числа r, разложения которых в непрерывные дроби $r = [0, k_1, \dots, k_l]$ удовлетворяют условию $k_1 + \dots + k_l = n+1$ (ср. с [6]).

Множество всех точек уровня n обозначим W_n.

Введем теперь функции $P(t)$ и $Q(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Пусть $P_n(t)$ – ступенчатая функция, определенная следующим образом:

$$P_n(t) = \frac{1}{3^n} \sum_{\substack{a/b \in W_n \\ a/b \leqslant t}} a.$$

В [1] было показано, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(t)$ существует для всех t.

Обозначим этот предел через $P(t)$. Можно показать, что $P(t)$ – непрерывная и строго возрастающая функция. Кроме того, $P(0) = 0$, $P(1) = 1/2$.

Аналогично строится функция $Q(t)$ с той разницей, что она учитывает распределение знаменателей рациональных чисел из W_n,

$$Q_n(t) = \frac{1}{3^n} \sum_{\substack{a/b \in W_n \\ a/b \leqslant t}} b,$$

и

$$Q(t) = \lim_{n\to\infty} Q_n(t).$$

Функция $Q(t)$ также непрерывна и строго монотонно возрастает. Кроме того, $Q(0) = 0$, $Q(1) = 1$.

Ясно, что параметрически заданная функция $(P(t), Q(t))$ является непрерывной и P, как функция от Q, строго возрастает.

Более того, она является непрерывно дифференцируемой и $dP/dQ = t$. Из последнего равенства следует, что $d^2P/dQ^2 = 1/\frac{dQ}{dt}$.

Кривая $(P(t), Q(t))$ является строго выпуклой при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Замечание. В работе [1] последний факт был доказан с помощью длинных вычислений, связанных с рассмотрением большого числа различных случаев. В действительности, это мгновенно следует из того, что dP/dQ монотонно возрастает.

Сформулируем теперь теоремы 1–4.

Теорема 1. *Для почти всех t $(0 < t < 1)$ по мере Лебега $Q'(t) = 0$.*

Замечание. Таким образом, функция $Q(t)$ дает пример строго возрастающей функции, производная которой почти всюду равна нулю.

Теорема 2. *Пусть r – рациональное число. Тогда $Q'(r) = 0$.*

Замечание. Теорема 2 была доказана в работе [1]. Для полноты мы здесь приводим более подробное доказательство.

Теорема 3. *Пусть d – достаточно большое бесквадратное число и $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Существует класс иррациональностей C такой, что для всех $\alpha \in C$ имеем $Q'(\alpha) = 0$.*

Теорема 4. *Пусть t – иррациональное число, разложение которого в непрерывную дробь имеет вид $t = [0, k, \ldots, k_l, \ldots]$, где для любого l $k_l = 1$ или $k_l = 2$. Тогда $Q'(t) = \infty$.*

§2. Доказательство теорем 1–4

Прежде всего, докажем несколько вспомогательных результатов, относящихся к оценкам $Q(t_1) - Q(t_2)$ сверху и снизу.

Лемма 1. *Пусть $r_1 = p_1/q_1$ и $r_2 = p_2/q_2$ – соседние точки в W_N. Тогда*

$$|Q(r_1) - Q(r_2)| = \frac{q_1 + q_2}{2 \cdot 3^N}.$$

Доказательство. В работе [1] было показано, что

$$Q(r) = Q_n(r) - \frac{q+1}{2 \cdot 3^n}, \tag{1}$$

где $r = p/q$ – рациональное, n – любое целое, удовлетворяющее условию $n \geqslant n_0$ и n_0 – точный уровень r в дереве Фарея.

Пусть, для определенности, $r_1 < r_2$. Тогда по определению функции $Q_N(t)$ имеем

$$Q_N(r_2) - Q_N(r_1) = \frac{q_2}{3^N},$$

поскольку r_1 и r_2 – соседние точки в W_N.

Подставляя это равенство в (1), при $n = N$ имеем утверждение леммы. □

Лемма 2. *Пусть* $t_1 = [0, k_1, \dots, k_k, m, \dots]$ (t_1 *может быть и рациональным*) *и* $t_2 = [0, k_1, \dots, k_l, u, \dots]$, *где* $u < m$ (t_2 *может быть и рациональным*). *Пусть* $n = k_1 \cdots + k_l$, *тогда*

$$|Q(t_2) - Q(t_1)| \leqslant C\frac{qu}{3^{n+u}},$$

где C *– абсолютная постоянная и* q *определяется из равенства* $r = p/q = [0, k, \dots, k_l]$.

Доказательство. Пусть сначала $u \neq 1$. Точки t_1 и t_2 лежат по одну сторону от r, причем t_1 лежит между r и t_2. Таким образом,

$$|Q(t_2) - Q(t_1)| < |Q(t_2) - Q(r)|.$$

Рассмотрим рациональное число $r' = [0, k_1, \dots, k_l, u-1]$. Точка t_2 лежит между r и r'. Следовательно,

$$|Q(t_2) - Q(r)| < |Q(r') - Q(r)|.$$

Точки r' и r являются соседними в W_{n+u-1}. Применяя лемму 1, получим

$$|Q(r') - Q(r)| < \frac{qu + q}{2 \cdot 3^{n+u-1}} < C\frac{qu}{3^{n+u}},$$

где C – абсолютная постоянная.

Пусть теперь $u = 1$ и $t_2 = [0, k_1, \dots, k_l, 1, v, \dots]$ и $r_1 = P_1/q_1 = [0, k_1, \dots, k_l, 1, v+1]$. Тогда

$$|Q(t_2) - Q(t_1| < |Q(t_2) - Q(r)| < |Q(r_2) - Q(r)| + |Q(r_1) - Q(r_2)|,$$

где $r_2 = p_2/q_2 = [0, k_1, \dots, k_l, 1]$. Из леммы 1 имеем

$$|Q(r_2) - Q(r)| < C\frac{q}{3^{n+1}} \quad \text{и} \quad |Q(r_1) - Q(r_2| < C\frac{qv}{3^{n+v}},$$

где C – абсолютная постоянная.

Объединяя эти два неравенства, имеем утверждение леммы. □

Лемма 3. *Пусть* $t_1 = [0, k_1, \dots, k_l, m, \dots]$ *и* $t_2 = [0, k_1, \dots, k_l, u, \dots]$ (t_1 *и* t_2 *могут быть рациональными*) *и* $1 \leqslant u < m-1$. *Тогда*

$$|Q(t_2) - Q(t_1)| > C\frac{q}{3^{n+m}},$$

где $C > 0$ *– абсолютная постоянная,* $n = k_1 + \dots + k_l$, $p/q = [0, k_1, \dots, k_l]$.

Если $t_1 = [0, k_1, \dots, k_l, m, z, \dots]$, $t_2 = [0, k_1, \dots, k_l, m-1, v, \dots]$ (t_1 *и* t_2 *могут быть рациональными*), *то*

$$|Q(t_1) - Q(t_2) > C\frac{q}{3^{n+m+w}},$$

где $C > 0$ *– абсолютная постоянная,* $n = k_1 + \dots + k_l$, $p/q = [0, k_1, \dots, k_l]$, $w = \max(z, v)$.

Доказательство. Пусть, сначала, $u < m-1$. Рассмотрим рациональные числа $r_1 = p_1/q_1 = [0, k_1, \dots, k_l, m]$ и $r_2 = [0, k, \dots, k_l, m-1]$. Оба этих числа лежат между t_1 и t_2. Поэтому

$$|Q(t_2) - Q(t_1)| \geqslant |Q(r_2) - Q(r_1)|.$$

Числа r_1 и r_2 являются соседними в W_{n+m}. В силу результата леммы 1,

$$|Q(r_2) - Q(r_1)| = \frac{q_2 + q_1}{2 \cdot 3^{n+m}} > C\frac{q}{3^{n+m}},$$

где $C > 0$ – абсолютная постоянная.

Пусть теперь $u = m-1$. Если $v \neq 1$, этот случай аналогичен предыдущему.

Нам осталось рассмотреть значения $t_1 \neq t_2$, $t_1 = [0, k_1, \dots, k_l, m, z, \dots]$, $t_2 = [0, k_1, \dots, k_l, m-1, 1, y, \dots]$. В этом случае t_1 и t_2 лежат по разные стороны от точки $r_3 = [0, k_1, \dots, k_l m,] = [0, k_1, \dots, k_l, m-1, 1]$, и, следовательно,

$$|Q(t_2) - Q(r_3)| > C\frac{qm}{3^{n+m+w}}.$$

□

Доказательство теоремы 1. Посколку $Q(t)$ – непрерывная возрастающая функция, $Q'(t)$ существует почти всюду. Кроме того, из метрической теории непрерывных дробей (см., например, [7]), известно, что для почти всех t знаменатели q_l подходящих дробей $r_l = p_l/q_l$ к t удовлетворяют условию $q_l \leqslant A^l$ для некоторой постоянной A.

Кроме того, для почти всех t существует бесконечная последовательность l_j такая, что

$$n_{l_j} = k + 1 + \dots + k_{l_j} > l_j \log l_j,$$

где $t = [0, k_1, \dots, k_l, \dots]$.

Пусть в точке t выполнены все эти три условия. Покажем, что тогда $Q'(t) = 0$.

Предположим противное. Пусть $Q'(t) = c > 0$. Тогда для всех достаточно больших l мы имеем неравенство

$$|Q(t) - Q(r_l)| > \frac{c}{2}|t - r_l|,$$

где $r_l = [0, k_1, \dots, k_l]$.

По свойствам непрерывных дробей имеем

$$|t - r_l| > \frac{1}{q(q(m+1) + q')} > \frac{1}{q^2(m+2)},$$

где мы обозначили $k_{l+1} = m$, q – знаменатель r_l и q' – знаменатель предыдущей подходящей дроби r_{l-1}.

Таким образом, для некоторой постоянной $c_1 > 0$ для всех l мы имеем

$$|Q(t) - Q(r_l)| > \frac{c_1}{mq^2}.$$

В силу неравенства леммы 2

$$|Q(t) - Q(r_l)| < \frac{c_2 q m}{3^{n_l + m}}.$$

Объединяя два последние неравенства, получаем

$$\frac{m^2 q^3}{3^{n_l + m}} > c_3,$$

где $c_3 > 0$. Так как функция $m^2/3^m$ является ограниченной, получаем неравенство $q^3/3^{n_l} > c_4$, где $c_4 > 0$.

Так как мы выбираем t таким, что $q < A^l$, имеем отсюда неравенство $B^l/3^{n_l} > c_4$ при некоторой постоянной B и всех l.

Но это невозможно в силу неравенства $n_l > l \log l$, которое выполнено для бесконечной последовательности номеров l_j. □

Доказательство теоремы 2. Пусть $r = [0, k_1, \dots, k_l] = p/q$. Если $|t - r|$ – достаточно малая величина, то $t = [0, k_1, \dots, k_l, m, \dots]$ или $t = [0, k_1, \dots, k_l, m-1, 1, \dots]$, где m достаточно велико.

В силу результата леммы 2 в обоих случаях имеем

$$|Q(t) - Q(r)| \leqslant C\frac{qm}{3^{n+m}},$$

где $n = k_1 + \cdots + k_l$, C – абсолютная постоянная.

Из теории непрерывных дробей следует, что $|t - r| > cq^{-2}m^{-1}$, где $c > 0$ – абсолютная постоянная.

Таким образом,

$$\left|\frac{Q(t) - Q(r)}{t - r}\right| \leqslant C_1\frac{m^2q^3}{3^{n+m}} \underset{m\to\infty}{\to} 0,$$

и теорема доказана. □

Для доказательства теоремы 3 нам понадобятся вспомогательные результаты о разложениях в непрерывную дробь иррациональностей поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ при больших d.

Лемма 4. *Пусть $\rho(\nu)$ – число решений сравнения $u^2 \equiv d \pmod{\nu}$. Пусть d достаточно велико и бесквадратно. Тогда при $Y \geqslant d^{1/2-\lambda}$, где $\lambda > 0$ некоторая постоянная, имеем*

$$\sum_{\nu\leqslant Y}\frac{\rho(\nu)}{\nu} > cL(1)\log d,$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная, $L(s)$ – L-функция Дирихле с квадратичным характером $\left(\frac{d}{\cdot}\right)$.

Доказательство. В работе [8] было доказано, что существует постоянная $\delta > 0$ такая, что при $d^{\frac{1}{2}-\delta} < Y \leqslant d^{1/2}$ мы имеем

$$\sum_{\nu\leqslant Y}\rho(\nu) = CYL(1)(1 + O(d^{-\eta})), \tag{2}$$

где $\eta > 0$ – некоторая постоянная. Отсюда следует, что

$$\sum_{\nu\leqslant Y}\frac{\rho(\nu)}{\nu} \geqslant \sum_{\frac{Y}{2}\leqslant\nu\leqslant Y}\rho(\nu) + \frac{2}{Y}\sum_{\frac{Y}{3}\leqslant\nu<\frac{Y}{2}}\rho(\nu) + \cdots + \frac{t}{Y}\sum_{\frac{Y}{t+1}\leqslant\nu<\frac{Y}{t}}\rho(\nu),$$

где t выбрано так, что $t > d^{\xi}$ при некотором $\xi > 0$, таком что $Y/t^2 > Yd^{-\eta}$. Следовательно, из (2) имеем

$$\sum_{\nu\leqslant Y}\frac{\rho(\nu)}{\nu} > cL(1)\sum_{2\leqslant t\leqslant d^{\xi}}\frac{1}{t} + O(d^{-\eta}\log d) > c_1L(1)\log d,$$

и лемма доказана. □

Пусть $M = \left\{\frac{b+\sqrt{d}}{a}\right\}$ – множество всех приведенных квадратичных иррациональностей определителя D. Для любого $\alpha \in M$ разложение в непрерывную дробь является чисто периодическим

$$\alpha = \left[\overline{k_1(\alpha), \ldots, k_l(\alpha)}\right],$$

где черта сверху означает, что группа элементов повторяется. Если α_1 и α_2 принадлежат одному классу иррациональностей, то множества $\{k_i(\alpha_1)\}$ и $\{k_i(\alpha_2)\}$ получаются друг из друга круговыми перестановками. В частности, l и величина $S(\alpha) = k_1(\alpha) + \cdots + k_l(\alpha)$ являются инвариантами класса эквивалентных иррациональностей, которому принадлежит α и $S(\alpha) = S(C)$.

Следствие. *В условиях леммы* 4 *существует класс* C *такой, что*

$$S(C) > c \log d \log \varepsilon, \tag{3}$$

где $c > 0$ *– абсолютная постоянная и* ε *– основная единица поля* $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Доказательство. Как известно, область приведения множества квадратичных иррациональностей определителя d вида $\frac{b+\sqrt{d}}{a}$ при $a > 0$ задана неравенствами $0 \leqslant b < \sqrt{d}$, $a+b > \sqrt{d}$, $a-b > \sqrt{d}$. Кроме того, $b^2 \equiv a \pmod{d}$. Таким образом, из леммы 2 следует, что

$$\sum_C S(C) > \sum_{\substack{a \leqslant \sqrt{d} \\ b^2 \equiv d \pmod{a}}} \left[\frac{b+\sqrt{d}}{a}\right] > \sum_{a \leqslant \sqrt{d}} \left[\frac{\sqrt{d}}{a}\right] \rho(a)$$
$$> \frac{1}{2}\sqrt{d} \sum_{a \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{d}} \frac{\rho(a)}{a} > c\sqrt{d} \log d L(1),$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная. Число классов h поля $\mathbb{Q}\sqrt{d})$ равно $c_0\sqrt{d}L(1)/\log\varepsilon$. Следовательно, хотя бы для одного класса C $S(C) > c \log d \log \varepsilon$, и следствие доказано. □

Замечание. Поскольку главный класс $\mathbb{1}$ содержит иррациональность вида $[\sqrt{d}] + \sqrt{d}$, $S(\mathbb{1}) > \sqrt{d}$. Поэтому утверждение следствия является нетривиальным только в случае очень больших значений регулятора.

Лемма 5. *Пусть* α *– приведенная иррациональность из поля* $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\alpha > 0$, $\alpha = [k_1, \ldots, k_l]$. *Пусть* $p/q = [\overline{k_1, \ldots, k_l}^{\,j}, k_1, \ldots, k_m]$ *– подходящая*

дробь к α. Здесь $m < l$ и черта сверху с индексом j означает, что соответствующий набор элементов повторяется j раз.

Тогда $q \leqslant \varepsilon^{j+1}$, где ε – наименьшая единица поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, удовлетворяющая условию $N(\varepsilon) = 1$.

Доказательство. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $p/q = [\overline{k_1, \ldots, k_l}]^j$.

При $j = 1$ мы имеем $p/q = [k_1, \ldots, k_l]$.

Пусть $\alpha = (b + \sqrt{d})/a$. Рассмотрим рациональное число $(b + U/T)/a$, где U и T определяются равенством $\varepsilon = U + \sqrt{d}T$. Можно показать, что оно совпадает с p/q. Таким образом, $q = aT$. Поскольку иррациональность является приведенной, $a < 2\sqrt{d}$ и, значит, $q < 2\sqrt{d}T < U + \sqrt{d}T < \varepsilon$.

Аналогично, если $p_j/q_j = [\overline{k_1, \ldots, k_l}]^j$, то q_j совпадает со знаменателем дроби $(b + U_j/T_j)/a = aT_j$, где U_j и T_j определены равенством $U_j + \sqrt{d}T_j = \varepsilon^j$. □

Доказательство теоремы 3. Очевидно, что достаточно рассмотреть приведенные иррациональности.

Пусть класс C, которому принадлежит α, удовлетворяет условию (3). Пусть разложение числа t имеет вид

$$t = [\overline{k_1, \ldots, k_l}^j, k_1, \ldots, k_s, m, \ldots],$$

где $s \leqslant l$ и $m \neq k_{s+1}$. Поскольку $k_i < 2\sqrt{d}$ при $1 \leqslant i \leqslant l$, из леммы 2 имеем

$$|Q(t) - Q(\alpha)| < C_1 \frac{q(m + 2\sqrt{d})}{3^{nj+m}},$$

где C_1 – абсолютная постоянная. Из свойств непрерывных дробей следует, что

$$|t - \alpha| > C_2 \frac{1}{q^2(2\sqrt{d} + m)},$$

где C_2 – абсолютная постоянная.

Значит,

$$\frac{|Q(t) - Q(\alpha)|}{|t - \alpha|} = O_d\left(\frac{q^{3j}m^2}{3^{nj+m}}\right),$$

где $n = k_1 + \dots + k_l > \log\varepsilon \log d$. Следовательно,

$$\frac{|Q(t) - Q(\alpha)|}{|t-\alpha|} = O_d\left(\frac{\varepsilon^{3j}}{3^{j\log\varepsilon\log d}}\right) \underset{j\to\infty}{\to} 0,$$

если d достаточно велико. □

Теорема 4 относится к случаю иррациональных чисел, неполные частные которых не превосходят 2. Прежде чем доказывать ее, докажем еще две леммы. Пусть α – иррациональное число вида $\alpha = [0, k_1, \dots, k_m, \dots]$, где любое $k_m = 1$ или $k_m = 2$. Поставим числу α в соответствие единственное число α', полученное из α с помощью следующей операции: если в разложение α входит набор вида $(2, \underbrace{1, \dots, 1}_{w}, 2)$, где $w \geqslant 2$, то соответствующий кусок разложения α' имеет вид $(2, \underbrace{2, \dots, 2}_{w/2}, 2)$, если w – четное, и $(2, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{(w-1)/2}, 2)$, если w является нечетным. Обозначим элементы разложения α через k'_i: $\alpha' = [0, k'_1, \dots, k'_m, \dots]$.

Лемма 6. *Пусть p/q – подходящая дробь к α, $p/q = [0, k_1, \dots, k_m]$, $k_m = 2$ и $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m} k_i = n$. Пусть p'/q' – соответствующая подходящая дробь к α', $p'/q' = [0, k', \dots, k'_{m'}]$, где $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m'} k'_i = n$. Тогда $q \geqslant q'$.*

Доказательство. Пусть $k_i = k_{i+1} = 1$ пара рядом стоящих единиц с наибольшими номерами в разложении p/q. Рассмотрим число p_1/q_1, которое получено из p/q заменой k_i и k_{i+1} на единственный элемент, равный 2, т.е. $p_1/q_1 = [0, k_1, \dots, k_{i-1}, 2, k_{i+2}, \dots, k_m]$, где $k_{i+2} = \dots = k_m = 2$. Пусть далее $p_2/q_2 = [0, k_1, \dots, k_{i-1}, 2]$. Число p_2/q_2 является подходящей дробью как к p/q, так и к p'/q'. Предыдущие подходящие дроби равны $p_3/q_3 = [0, k_1, \dots, k_{i-1}]$ в случае p'/q' и $p_4/q_4 = [0, k_1, \dots, k_{i-1}+1]$ в случае p/q.

Поскольку, очевидно, $q_4 > q_3$, имеем $q_1 < q$.

Продолжая этот процесс, имеем утверждение леммы. □

Лемма 7. *Пусть $\alpha = [0, k_1, \dots, k_m, \dots]$ – иррациональное число и любое $k_m = 1$ или $k_m = 2$, причем, если $k_m = 1$, то $k_{m-1} = k_{m+1} = 2$. Пусть $p/q = [0, k_1, \dots, k_m]$ – подходящая к α непрерывная дробь и $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m} k_i = n$. Тогда $q^3 \geqslant C\left(\frac{28}{9}\right)^n$, где C –абсолютная постоянная.*

Доказательство. Мы можем считать, что m достаточно велико. Как известно,

$$q = \left(k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{k_m}}}\right)\left(k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{k_m}}}\right)\dots\left(k_{m-1} + \frac{1}{k_m}\right).$$

Таким образом,

$$q > \left(k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3}}\right)\dots\left(k_{m-2} + \frac{1}{k_{m-1} + \frac{1}{k_m}}\right).$$

После очевидных упрощений имеем

$$q > \frac{k_1k_2k_3 + k_1 + k_3}{k_2k_3 + 1}\cdot\ \dots\ \cdot\frac{k_{m-2}k_{m-1}k_m + k_{m-2} + k_m}{k_{m-1}k_m + 1}. \qquad (4)$$

Обозначим количество единиц в разложении p/q через A, тогда количество 2 равно $m - A$.

Если $k_i = k_{i+1} = 2$, то $k_ik_{i+1} = 5$. Если один из элементов равен 1, то $k_ik_{i+1} = 3$.

Следовательно,

$$\prod_{2\leqslant i\leqslant m-1}(k_ik_{i+1} + 1) \leqslant C3^{2A}\cdot 5^{m-2A}.$$

Рассмотрим теперь тройки идущих подряд элементов $(k_i, k_{i+1},\ k_{i+2})$. Они имеют вид $(1,2,1)$, $(2,1,2)$, $(2,2,1)$, $(1,2,2)$ или $(2,2,2)$. Количество троек каждого типа обозначим J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 соответственно. Числители произвведения в (4) для каждого из типов троек равны

$$k_ik_{i+1}k_{k+2} + k_i + i_{i+2} = \begin{cases} 4 & \text{для троек первого типа,}\\ 8 & \text{для троек второго типа,}\\ 7 & \text{для троек третьего типа,}\\ 7 & \text{для троек четвертого типа,}\\ 12 & \text{для троек пятого типа.}\end{cases}$$

Следовательно,

$$q > \frac{4^{J_1}\cdot 7^{J_2+J_3+J_4}\cdot 12^{J_5}}{3^{2A}\cdot 5^{m-2A}}.$$

Положим $J_2 + J_3 + J_4 = J$. В этих обозначениях

$$A = (2J_1 + J_2 + J_3 + J_4)/3 + O(1) = (2J_1 + J)/3 + O(1),$$
$$m = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + O(1) = J_1 + J + J_5 + O(1),$$

$n = 2m - A = 4/3J_1 + 5/3J + 2J_5 + O(1)$. Кроме того,

$$q > \frac{4^{J_1}7^J 12^{J_5}}{3^{2A}5^{m-2A}}. \tag{5}$$

Подставляя значение для J_5 в неравенство (5), для q^3 имеем

$$\begin{aligned} q^3 &> C\frac{4^{3J_1}7^{3J}12^{3(n/2-2/3J_1-5/6J)}\cdot 5^{J_1}}{3^{4J_1}3^{2J}\cdot 5^J 5^{3(n/2-2/3J_1-5/6J)}} \\ &= C\frac{4^{3J_1}7^{3J}5^{J_1}5^{2J_1}5^{5/2J}}{3^{4J_1}3^{2J}5^J 12^{2J_1}12^{5/2J}}\cdot\frac{12^{3/2n}}{5^{3/2n}} \\ &= C\left(\frac{4^3\cdot 5^3}{3^4\cdot 12^2}\right)^{J_1}\left(\frac{7^3\cdot 5^{3/2}}{3^2\cdot 12^{5/2}}\right)^{J}\frac{12^{3n/2}}{5^{3n/2}} \end{aligned}$$

где $C > 0$ – абсолютная постоянная.

При фиксированном n последнее выражение убывает по J_1 и J, поскольку $4^3\cdot 5^3/(3^4\cdot 12^2) < 1$ и $7^3\cdot 5^{3/2}/(3^2\cdot 12^{5/2}) < 1$. Таким образом, наименьшее значение для q (при фиксированном n) достигается при $J_5 = 0$.

Так как $4^3\cdot 5^3/(3^4\cdot 12^2) < 7^3\cdot 5^{3/2}/(3^2\cdot 12^{5/2})$, оно убывает с ростом J_1. Но $J_1 \leqslant J$ и при $J_1 = J$ имеем $J_3 = J_4 = 0$, $J_2 = J$.

Возвращаясь к неравенству (5), имеем отсюда

$$q > C\left(\frac{4}{3}\right)^J\left(\frac{7}{3}\right)^J = C\left(\frac{28}{9}\right)^J,$$

где $J = n/3$. Таким образом, $q^3 > C\left(\frac{28}{9}\right)^n$, и лемма доказана. □

Доказательство теоремы 4. Пусть α – иррациональное число, $\alpha = [0, k_1, \dots, k_l, \dots]$, где $k_i = 1$ или $k_i = 2$, и $t = [0, k_1, \dots, k_l, m, \dots]$ (t может быть рациональным) такое, что $m \neq k_{l+1}$. Пусть $r = p/q = [0, k_1, \dots, k_l]$. По свойствам непрерывных дробей имеем

$$|t - \alpha| \leqslant |t - r| + |r - \alpha| \leqslant C/q^2,$$

где C – абсолютная постоянная.

Из леммы 6 следует, что $|Q(t) - Q(\alpha)| > C_1 q/3^n$, где $C_1 > 0$ – абсолютная постоянная, $n = k_1 + \dots + k_l$.

Таким образом,

$$\frac{Q(t)-Q(\alpha)}{t-\alpha} > C_3\frac{q^3}{3^n},$$

где $C_3 > 0$ – абсолютная постоянная.

Из леммы 7 следует, что $q^3/3^n > C_4\left(\frac{28}{27}\right)^n \to \infty$ при $n \to \infty$, и теорема доказана. $\square$

Замечание. Существуют числа t такие, что $Q'(t)$ не существует (и $Q'(t) \neq \infty$). Примером таких t могут служить числа с разложениями вида $t = [0, \overbrace{1,\dots,1}^{j_1}, k_1, \overbrace{1,\dots,1}^{j_2}, k_2, \dots]$.

Если последовательности $j_1,\dots,j_l,\dots,k_1,k_2,\dots$ растут достаточно быстро, то для знаменателей подходящих дробей p/q мы будем иметь соотношения $q > C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{j_l}$ (соответственно, $3^n = o(q^3)$), когда q соответствует набору, кончающемуся единицами, и $q^3k_\nu^2 = o(3^{k_\nu})$ для следующей подходящей дроби.

Литература

1. Е. П. Голубева, *О плоской выпуклой кривой с большим числом целых точек.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008), 22–32.
2. Ф. В. Петров, *О количестве рациональных точек на строго выпуклой кривой.* — Функц. анализ и его прил. **40**, вып. 1 (2006), 30–42.
3. H. P. F. Swinnerton–Dyer, *The number of lattice points on a convex curve.* — J. Number Theory **6** (1974), 128–135.
4. E. Bombieri, J. Pila, *The number of integral points on arcs and ovals.* — Duke Math. J. **59**, No. 2 (1989), 337–357.
5. A. Plagne, *A uniform version of Jarnik theorem.* — Acta Arith. **87**, No. 3 (1999), 255–267.
6. M. Waldschmidt, P. Moussa, J.-M. Luck, C. Itzykson (Eds.), *From Number Theory to Physics.* Berlin, 1992.
7. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби.* М., 1961.
8. Е. П. Голубева, *Асимптотическое распределение целых точек, принадлежащих заданным классам вычетов, на гиперболоидах специального вида.* — Мат. сб. **123**, No. 4 (1984), 510–533.

Golubeva E. P. Random variables associated with the Farey tree.

The purpose of the present paper is to investigate random variables associated with the limit distribution for the Farey tree rationals.

Государственный университет
телекоммуникаций им. М. А. Бонч-Бруевича
E-mail: elena_golubeva@mail.ru

Поступило 2 ноября 2012 г.