Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 404, 2012 г.

О. Л. Виноградов

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЧЕРЕЗ ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ВЕЙЕРШТРАССА

§1. Предварительные сведения

1.1. Обозначения. Символами $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ обозначаются множества вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно, $[a:b]=[a,b]\cap\mathbb{Z}$; $C(E)$ и $C^{(r)}(E)$ – множества непрерывных и r раз непрерывно дифференцируемых на множестве E функций. Рассматриваются следующие пространства функций: $UCB(\mathbb{R})$ – пространство равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, C – пространство 2π-периодических непрерывных функций с равномерными нормами $\|\cdot\|=\|\cdot\|_\infty$, если $1\leqslant p<\infty$, то $L_p(\mathbb{R})$ и L_p – пространства измеримых, суммируемых с p-й степенью (на оси или на периоде, 2π-периодических) функций f с нормами $\|f\|_p=\left(\int\limits_E|f|^p\right)^{1/p}$, где $E=\mathbb{R}$ или $[-\pi,\pi]$ соответственно; $L(\mathbb{R})=L_1(\mathbb{R})$, $L=L_1$, $L_\infty(\mathbb{R})$ – пространство измеримых существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ функций f с нормой

$$\|f\|_\infty=\operatorname*{vrai\,sup}_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,$$

L_∞ – подпространство 2π-периодических функций из $L_\infty(\mathbb{R})$. Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Пусть $\mathfrak{M}$ – замкнутое подпространство пространства $L_p(\mathbb{R})$ $(1\leqslant p<\infty)$ или пространства $UCB(\mathbb{R})$ $(p=\infty)$, P – полунорма, заданная на $\mathfrak{M}$. Если выполняются условия:

1) пространство $(\mathfrak{M},P)$ инвариантно относительно сдвига, т.е. для любых $f\in\mathfrak{M}$ и $h\in\mathbb{R}$ будет $f(\cdot+h)\in\mathfrak{M}$ и $P(f(\cdot+h))=P(f)$,

2) существует такая постоянная B, что $P(f)\leqslant B\|f\|_p$ для всех $f\in\mathfrak{M}$,

---

Ключевые слова: наилучшее приближение, точные константы, свертка, вполне монотонные функции.

то будем говорить, что пространство $(\mathfrak{M}, P)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$. Примерами пространств класса $\mathcal{B}$ являются:

$$\big(UCB(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big), \quad (L_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p) \quad (1 \leqslant p < \infty),$$

пространства периодических функций $\big(C, \|\cdot\|_p\big)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, а также более общие пространства равномерно непрерывных почти-периодических функций, показатели которых принадлежат фиксированному множеству, с различными нормами.

Далее $\mathbf{E}_\sigma$ и $\mathbf{E}_{\sigma-0}$ – множества целых функций степени не больше (меньше) $\sigma > 0$; наилучшее приближение функции f по полунорме p определяется равенством

$$A_\sigma(f)_P = \inf_{\substack{g \in \mathbf{E}_\sigma \\ f-g \in \mathfrak{M}}} P(f-g)$$

($\inf \varnothing = +\infty$), аналогично определяется величина $A_{\sigma-0}(f)_P$. Индекс p у величины означает, что $P(f) = \|f\|_p$. Функции доопределяются в точке устранимого разрыва по непрерывности, в других случаях полагаем $\frac{0}{0} = 0$. Далее,

$$c(f, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt$$

– комплексное преобразование Фурье функции $f \in L(\mathbb{R})$, $a(f)$ и $b(f)$ – косинус- и синус-преобразования Фурье, то есть

$$a(f, y) = c(f, y) + c(f, -y), \quad b(f, y) = i\big(c(f, y) - c(f, -y)\big).$$

По аналогии, если на симметричном относительно нуля подмножестве $\mathbb{R}$ задана функция c, то положим

$$a(y) = c(y) + c(-y), \quad b(y) = i(c(y) - c(-y)). \tag{1.1}$$

Для четной функции c будет выполнено равенство $a = 2c$, а для нечетной $b = 2i\,c$. Через L^* обозначается множество преобразований Фурье функций из $L(\mathbb{R})$.

Свертка двух функций f и g определяется равенством

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t)\, dt,$$

при такой нормировке $c(f * g) = c(f)c(g)$. Через $W^{[k]}$ обозначается $(k-1)$-кратная свертка функции W с собой. По определению,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} a_k.$$

1.2. Приближение классов сверток. Пусть задан оператор $\mathcal{W}$ свертки с ядром $W \in L(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{W}f = f * W,$$

$w = c(W)$, функция Φ удовлетворяет следующему условию.

$\Phi 1$. Функция Φ задана по крайней мере на множестве $w(\mathbb{R}) \cup \{0\}$, $\Phi(0) = 1$, $(\Phi - 1) \circ w \in L^*$.

Здесь и далее число 1 и функция, тождественно равная 1, обозначаются одинаково. Обозначим функцию, преобразование Фурье которой есть $(\Phi - 1) \circ w$, через $(\Phi - 1)^\circ(W)$ и определим оператор $\Phi(\mathcal{W})$ равенством

$$\Phi(\mathcal{W})f = f + (\Phi - 1)^\circ(W) * f.$$

Рассматривается задача о наилучшей постоянной в оценке

$$A_\sigma(f)_P \leqslant KP(\Phi(\mathcal{W})f) \tag{1.2}$$

и о реализации этой оценки линейными методами приближения.

По теореме Винера–Леви [1, п.75, с.158] для выполнения условия $(\Phi - 1) \circ w \in L^*$ достаточно, чтобы функция Φ была голоморфна в окрестности множества $w(\mathbb{R}) \cup \{0\}$ и выполнялось равенство $\Phi(0) = 1$. Условие голоморфности Φ в окрестности множества $w(\mathbb{R}) \cup \{0\}$ не охватывает некоторых важных приложений. Поэтому ослабим его. Зафиксируем $y_0 > 0$ и потребуем, чтобы, кроме условия $\Phi 1$, функция Φ удовлетворяла следующему условию.

$\Phi 2$. Функция Φ голоморфна в окрестности множества $w\big(\mathbb{R} \setminus (-y_0, y_0)\big) \cup \{0\}$.

Покажем, что задача (1.2) сводится к классической задаче о приближении классов сверток.

Лемма 1. *Пусть $p \in [1, +\infty]$, $f \in L_p(\mathbb{R})$, $W \in L(\mathbb{R})$, $w = c(W)$, $y_0 > 0$, функция Φ удовлетворяет условиям $\Phi 1$ и $\Phi 2$, $\varphi = \Phi(\mathcal{W})f$, $\Phi(w(y)) \neq 0$ при всех $y : |y| \geqslant y_0$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Существует такая функция $G \in L(\mathbb{R})$, что $c(G, y) = \frac{1-\Phi(w(y))}{\Phi(w(y))}$ при $|y| \geqslant y_0$.*

2. *Если G – функция из утверждения* 1, *то существует такая функция $Q \in \mathbf{E}_{y_0} \cap L(\mathbb{R})$, что*

$$(I - \Phi(\mathcal{W}))f = f * Q + \varphi * G. \tag{1.3}$$

3. *Если функция W четна, то функции G и Q можно выбрать четными.*

Доказательство. 1. Возьмем ядро $V \in L(\mathbb{R})$, преобразование Фурье которого $v = c(V)$ удовлетворяет условиям: $v(y) = 0$ при $|y| \geqslant y_0$, множество $(w - v)(\mathbb{R})$ содержится в области голоморфности функции Φ, $\Phi((w - v)(y)) \neq 0$ при всех $y \in \mathbb{R}$. По теореме Винера–Леви функция $\frac{1-\Phi\circ(w-v)}{\Phi\circ(w-v)}$ есть преобразование Фурье некоторой функции $G \in L(\mathbb{R})$.

2. Поскольку

$$(1 - \Phi)^\circ(W - V) = G - (1 - \Phi)^\circ(W - V) * G,$$

выполнено равенство (1.3), в котором

$$Q = (1-\Phi)^\circ(W) - (1-\Phi)^\circ(W-V) + \big((1-\Phi)^\circ(W) - (1-\Phi)^\circ(W-V)\big) * G. \tag{1.4}$$

Отсюда видно, что $c(Q, y) = 0$ при $|y| \geqslant y_0$.

3. Если функция W четна, то и V можно взять четной, а тогда функции Q и G тоже будут четными. □

Слагаемое $f * Q$ принадлежит $\mathbf{E}_{y_0}$ и при $\sigma \geqslant y_0$ может быть включено в приближающий агрегат. Поэтому задача сводится к приближению свертки $\varphi * G$.

Напомним известные сведения о приближении классов сверток.

Пусть функция G из $L(\mathbb{R})$ четна или нечетна, $\sigma > 0$. Обозначим

$$\mathcal{K}_{\sigma,G} = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t) \operatorname{sign} \sin \sigma t \, dt \right| = \left| \frac{2}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b(G, (2s+1)\sigma)}{2s+1} \right|,$$

если G нечетна;

$$\mathcal{K}_{\sigma,G} = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t) \operatorname{sign} \cos \sigma t \, dt \right| = \left| \frac{2}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} a(G, (2s+1)\sigma) \right|,$$

если G четна.

В задаче о приближении классов сверток важную роль играет следующее условие.

N1. Существуют такие функция $G_\sigma \in \mathbf{E}_\sigma \cap L(\mathbb{R})$ и число $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, что соответственно четности G

$$\varepsilon\big(G(t) - G_\sigma(t)\big)\cos\sigma t \geqslant 0 \quad \text{или} \quad \varepsilon\big(G(t) - G_\sigma(t)\big)\sin\sigma t \geqslant 0$$

для почти всех $t \in \mathbb{R}$.

Пусть

$$f = T + \varphi * G, \tag{1.5}$$

где $T \in \mathbf{E}_\sigma$. Предположим, что выполнено условие N1. Определим оператор $\mathcal{X}_{\sigma,G}$ равенством

$$\mathcal{X}_{\sigma,G} f = T + \varphi * G_\sigma.$$

Замечание 1. Ясно, что $\mathcal{X}_{\sigma,G} f \in \mathbf{E}_\sigma$. Пусть $T = 0$. Если функция φ имеет период $\frac{2\pi}{\rho}$ $(\rho > 0)$, то $\mathcal{X}_{\sigma,G} f$ – тригонометрический многочлен степени, меньшей, чем $\frac{\sigma}{\rho}$. В частности, если $\rho \geqslant \sigma$, то $\mathcal{X}_{\sigma,G} f$ – постоянная. Если же функция φ является почти-периодической, то $\mathcal{X}_{\sigma,G} f$ – тоже почти-периодическая функция, показатели которой принадлежат функции φ.

Лемма A. *Пусть функция G из $L(\mathbb{R})$ четна или нечетна, $\sigma > 0$ и выполнено условие* N1. *Тогда*

$$\mathcal{K}_{\sigma,G} = \frac{1}{2\pi} A_\sigma(G)_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G - G_\sigma|. \tag{1.6}$$

Если при этом $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, функции f и φ связаны равенством (1.5), *то*

$$P(f - \mathcal{X}_{\sigma,G} f) \leqslant \mathcal{K}_{\sigma,G} P(\varphi), \tag{1.7}$$

$$A_\sigma(f)_P \leqslant \mathcal{K}_{\sigma,G} A_\sigma(\varphi)_P, \tag{1.8}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \mathcal{K}_{\sigma,G} A_{\sigma-0}(\varphi)_P, \tag{1.9}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \mathcal{K}_{\sigma,G} P(\varphi), \tag{1.10}$$

$$A_\sigma(f)_P \leqslant \mathcal{K}_{\sigma,G} P(\varphi) \tag{1.11}$$

(*в неравенствах* (1.9) *и* (1.10) $T \in \mathbf{E}_{\sigma-0}$). *В пространствах* $(CB(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *и* $(L(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ *константу $\mathcal{K}_{\sigma,G}$ в неравенствах* (1.7)–(1.11) *нельзя заменить меньшей. В пространствах $\frac{2\pi}{\sigma}$-периодических функций с равномерной и интегральной нормой константу в неравенствах* (1.7), (1.9) *и* (1.10) *нельзя заменить меньшей.*

Лемма А включает в себя классические результаты Ж. Фавара, Н. И. Ахиезера, М. Г. Крейна, С. М. Никольского, Сунь Юн-Шена и других математиков и в основном содержится в [1, п. 87, с. 202; п. 100, с.235]. Приведенная формулировка взята из [2, лемма 5], с одним отличием. В [1, 2] на ядро G накладывались дополнительные условия, что позволяло в качестве G_σ взять функцию $L_\sigma G$, интерполирующую G. Доказательство леммы А в приведенной, формально более общей, формулировке не отличается от данного в [1, 2], так как явный вид функции G_σ в последнем не использовался.

Замечание 2 ([2, замечание 4])**.** Неравенства типа (1.7)–(1.11) стандартным образом (например, с помощью приближения функции φ ее интегралом Фейера) переносятся с множеств непрерывных функций на множества $L_\infty(\mathbb{R})$ и L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ с полунормами $\|\cdot\|_p$, $A_\sigma(\cdot)_p$, $A_{\sigma-0}(\cdot)_p$. Кроме того, для классов сверток вида

$$f = T + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x-t)\,dg(t)$$

и их периодических аналогов справедливы аналогичные точные оценки приближений в $L_1(\mathbb{R})$ и L_1 через вариацию g.

Далее мы не будем отмечать каждый раз возможность распространения оценок на более широкие классы функций и ограничимся формулировками для пространств класса $\mathcal{B}$.

Заметим еще, что знак подмодульных выражений в определении константы $\mathcal{K}_{\sigma,G}$ равен числу ε из свойства N1.

Опишем ситуацию, в которой ядро интерполируется, подробнее и приведем явный вид интерполяционной функции.

Пусть ядро G четно или нечетно, $G \in L(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $G(t) = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$, $\varkappa$ – четность ядра G, т.е. $\varkappa = 0$, если ядро G четно, $\varkappa = 1$, если ядро G нечетно. Обозначим [1, п. 87, с. 199–203]

$$L_\sigma G(z) = \frac{\sin\left(\sigma z - \frac{\pi}{2}(1-\varkappa)\right)}{\sigma}\sum_{q=-\infty}^{\infty}(-1)^q\frac{G\left(\frac{(2q+1-\varkappa)\pi}{2\sigma}\right)}{z-\frac{(2q+1-\varkappa)\pi}{2\sigma}}. \qquad (1.12)$$

Тогда $L_\sigma G$ – четная или нечетная функция из $\mathbf{E}_\sigma \cap L(\mathbb{R})$, интерполирующая функцию G в точках $\frac{(2q+1-\varkappa)\pi}{2\sigma}$ $(q \in \mathbb{Z})$, т.е. в нулях функций $\sin\sigma t$ или $\cos\sigma t$ в соответствии с ее четностью. (Значение нечетной

функции G в нуле равно нулю, значение четной функции G в нуле несущественно.) Через преобразование Фурье функция $L_\sigma G$ выражается так:

$$L_\sigma G(t) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} c(L_\sigma, y) e^{ity}\, dy, \tag{1.13}$$

$$c(L_\sigma G, y) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^{s(1-\varkappa)} c(G, y + 2s\sigma), \quad |y| \leqslant \sigma. \tag{1.14}$$

Для справедливости этих формул достаточно, чтобы ряд в правой части равенства (1.14) сходился равномерно на $[0, \sigma]$, и его сумма после домножения на $e^{i\frac{\pi(1-\varkappa)}{2\sigma}y}$ была разложима в ряд Фурье [1, п. 87, с. 202–203].

В [1] рассмотрена более общая ситуация, в которой не предполагается четности или нечетности G.

Приведем две леммы, дающие достаточные условия для выполнения свойства N1.

Лемма B [1, п. 88]**.** *Пусть $G \in L(\mathbb{R})$, $\sigma > 0$.*

1. *Если функция G четна, $a(G)$ трижды дифференцируема на $\mathbb{R}$ и трижды монотонна на $[\sigma, +\infty)$ (т.е. $(-1)^r a^{(r)}(G, y) \geqslant 0$ при $r \in [0:3]$ и $y \geqslant \sigma$), то*

$$\big(G(t) - L_\sigma G(t)\big) \cos \sigma t \geqslant 0$$

при всех $t \in \mathbb{R}$.

2. *Если функция G нечетна, $b(G) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$, $b(G)$ дважды монотонна на $[\sigma, +\infty)$ (т.е. $(-1)^r b^{(r)}(G, y) \geqslant 0$ при $r \in [0:2]$ и $y \geqslant \sigma$), то*

$$\big(G(t) - L_\sigma G(t)\big) \sin \sigma t \geqslant 0$$

при всех $t \in \mathbb{R}$.

В обоих случаях справедливо заключение леммы A.

Условия леммы B называют условиями Б. Надя.

В работе [2] введены классы функций $\widehat{CM}^r(y_0)$ и установлена следующая далее лемма C.

Пусть $y_0 > 0$, $r \in \{1, 2\}$. Обозначим через $CM_c^r(y_0)$ и $CM_s^r(y_0)$ (от слов “completely monotone” – “вполне монотонные”) множества четных и нечетных функций c, заданных по крайней мере на $\mathbb{R} \setminus (-y_0, y_0)$,

таких что на $[y_0, +\infty)$ функция a или b соответственно (см. соглашение (1.1)) имеет вид

$$y \mapsto \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^r u} d\Psi(u), \quad \text{функция } \Psi \text{ возрастает на } (0, +\infty). \tag{1.15}$$

Пусть еще $\widehat{CM}_c^r(y_0)$ и $\widehat{CM}_s^r(y_0)$ – множества четных и нечетных функций G из $L(\mathbb{R})$, для которых $c(G) \in CM_c^r(y_0)$ или $CM_s^r(y_0)$; $\widehat{CM}^r(y_0) = \widehat{CM}_c^r(y_0) \cup \widehat{CM}_s^r(y_0)$.

Известно [2, свойство AM1], что $\widehat{CM}^1(y_0) \subset \widehat{CM}^2(y_0)$. Функции из $\widehat{CM}^r(y_0)$ удовлетворяют условиям Надя при $r = 1$, но могут не удовлетворять им при $r = 2$.

Замечание 3. В [1, п. 88, с. 204–205] установлено, что если ядро G удовлетворяет условиям Надя, то $G \in C\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$, $G(t) = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$ и верны формулы (1.13) и (1.14). В [2, свойства AM4 и AM5] доказано, что если $G \in \widehat{CM}^2(y_0)$, $c(G) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$, $\sigma \geqslant y_0$, то справедливо то же заключение.

Замечание 4. Анализ доказательства в [1] показывает, что требование трехкратной (двукратной) дифференцируемости в условиях Надя избыточно. Вместо этого можно считать, что $c(G) \in C^{(2)}[-\sigma, \sigma]$, а кратную монотонность понимать в следующем смысле. Функцию g называют r-кратно монотонной на $[\sigma, +\infty)$, если $(-1)^k \Delta_t^k g \geqslant 0$ на $[\sigma, +\infty)$ при всех $t > 0$ и $k \in [0 : r]$, где $\Delta_t^k g$ – k-я разность функции g с шагом t вперед. Тогда верны заключения замечания 3 и леммы B. Мы воспользуемся этим замечанием в примере пункта 5.4.

Замечание 5. Легко доказать [3, лемма 1], что если $g \in L^*$, $h \in C^{(1)}[-y_0, y_0]$, $h = g$ на $\mathbb{R} \setminus (-y_0, y_0)$, то $h \in L^*$. Поэтому всякую функцию $G \in L(\mathbb{R})$ можно представить в виде $G = H + V$, где $H, V \in L(\mathbb{R})$, $V \in \mathbf{E}_{y_0}$, $c(H) \in C^{(\infty)}[-y_0, y_0]$. Более того, по теореме Бореля [4, с. 124, задача VII.2.15] можно считать, что в точках $\pm y_0$ функция $c(H)$ имеет наперед заданные односторонние производные всех порядков. При этом, если функция G четна или нечетна и граничные условия имеют соответствующую четность (а именно, в противоположных точках у четной функции производные четного порядка равны, нечетного противоположны, а у нечетной функции – наоборот), то функции H и V

можно выбрать той же четности. Это замечание будет использовано при доказательстве теоремы 3 §3.

Лемма C [2, лемма 7]. *Пусть* $y_0 > 0$, *функция* G *принадлежит* $\widehat{CM}_c^2(y_0)$ *или* $\widehat{CM}_s^2(y_0)$, $c(G) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$, $\sigma \geqslant y_0$. *Тогда соответственно*

$$\big(G(t) - L_\sigma G(t)\big)\cos\sigma t \geqslant 0 \quad \textit{или} \quad \big(G(t) - L_\sigma G(t)\big)\sin\sigma t \geqslant 0$$

при всех $t \in \mathbb{R}$. *При этом справедливо заключение леммы* A.

Чтобы получить с помощью леммы A точные оценки вида (1.2), надо выяснить, какие свойства функций W и Φ обеспечивают выполнение условия N1 для функции G.

В работе [3, лемма 2] доказано, что если $y_0 > 0$, $w \in CM_c^2(y_0)$, $w(y) < 1$ при всех $y \geqslant y_0$, то $\frac{w}{1-w} \in CM_c^2(y_0)$. Это позволило получить точные оценки в случае, когда $W \in \widehat{CM}_c^2(y_0)$, а $\Phi(z) = 1 - z$, то есть оценки приближений через отклонения интегралов типа Вейерштрасса. А. Г. Бабенко и Ю. В. Крякин [5] получили точную оценку наилучшего приближения через отклонение первой функции Стеклова. В работе [6] получены оценки вида (1.2), когда операторы $\mathcal{W}$ суть линейные комбинации средних Стеклова, а $\Phi(z) = (1-z)^q$ $(q \in \mathbb{N})$, то есть оценки приближений через степени отклонений таких комбинаций. В [7] доказана точность одной из оценок. Подробнее эти результаты обсуждаются в §5.

Отметим, что в общем случае условие непрерывности функции G и условие $G(t) = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$ могут не выполняться, и поэтому не ясно, применима ли формула (1.12) для определения функции $L_\sigma G$.

Докажем лемму, полезную для дальнейшего построения.

Лемма 2. *Пусть* $G_1, G_2 \in L(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $G_1(t), G_2(t) = O(t^{-2})$ *при* $t \to \infty$. *Тогда функция* $G_1 * G_2$ *обладает теми же свойствами.*

Доказательство. 1. Суммируемость свертки хорошо известна. Докажем ее непрерывность на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Зафиксируем $t \neq 0$ и обозначим

$E_t = \left[-\frac{|t|}{2}, \frac{|t|}{2}\right]$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&2\pi\big(G_1{*}G_2(t+h) - G_1{*}G_2(t)\big)\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(u)\big(G_2(t+h-u) - G_2(t-u)\big)\,du\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(t-v)\big(G_2(v+h) - G_2(v)\big)\,dv.
\end{aligned}$$

Разобьем интеграл на два: $I_1(h)$ – по отрезку E_t – и $I_2(h)$ – по его дополнению. Если $v \in E_t$, то $|t-v| \geqslant |t|/2$. Поэтому

$$\begin{aligned}
|I_1(h)| &= \left|\int\limits_{E_t} G_1(t-v)\big(G_2(v+h) - G_2(v)\big)\,dv\right|\\
&\leqslant \sup_{|u|\geqslant|t|/2} |G_1(u)| \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} \big|G_2(v+h) - G_2(v)\big|\,dv.
\end{aligned}$$

Супремум конечен в силу условий на G_1, а интеграл стремится к нулю при $h \to 0$ по теореме о непрерывности сдвига. Следовательно, $I_1(h) \to 0$. Интеграл $I_2(h)$ также стремится к нулю ввиду оценки

$$\begin{aligned}
|I_2(h)| &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}\setminus E_t} G_1(t-v)\big(G_2(v+h) - G_2(v)\big)\,dv\right|\\
&\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |G_1| \cdot \sup_{|v|\geqslant|t|/2} |G_2(v+h) - G_2(v)|.
\end{aligned}$$

2. Докажем соотношение $G_1 * G_2(t) = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$. Имеем:

$$2\pi t^2\, G_1{*}G_2(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(u) t^2 G_2(t-u)\,du.$$

Разобьем интеграл на два: $J_1(t)$ – по отрезку $E_t = \left[-\frac{|t|}{2}, \frac{|t|}{2}\right]$ – и $J_2(t)$ – по его дополнению. Если $u \in E_t$, то $t^2 = 4\left(\frac{t}{2}\right)^2 \leqslant 4(t-u)^2$. Поэтому

$$|J_1(t)| \leqslant \int\limits_{E_t} \big|G_1(u) 4(t-u)^2 G_2(t-u)\big|\,du \leqslant 4\int\limits_{\mathbb{R}} |G_1| \cdot \sup_{|v|\geqslant|t|/2} v^2 |G_2(v)|.$$

Если $u \notin E_t$, то $t^2 = 4\left(\frac{t}{2}\right)^2 \leqslant 4u^2$. Поэтому

$$|J_2(t)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}\setminus E_t} 4u^2\big|G_1(u)G_2(t-u)\big|\,du \leqslant 4\int\limits_{\mathbb{R}} |G_2| \cdot \sup_{|u|\geqslant|t|/2} u^2|G_1(u)|.$$

Из этих оценок вытекает ограниченность обоих интегралов на множестве $\mathbb{R}\setminus[-\Delta,\Delta]$ для любого $\Delta > 0$. $\square$

Замечание 6. Так как свертка функций одной четности четна, а разной четности – нечетна, в условиях леммы 2 определена функция $L_\sigma(G_1 * G_2)$. В частности, если четная или нечетная функция Λ удовлетворяет условиям леммы, то функция $L_\sigma\Lambda^{[k]}$ определена при всех $k \in \mathbb{N}$.

§2. Построение операторов и общие оценки

Опишем в общих чертах схему построения приближающих операторов в предположении, что все рассматриваемые ряды сходятся в подходящем смысле.

Из условий Ф1 и Ф2 следует, что функция $\frac{1}{\Phi}$ в окрестности нуля раскладывается в степенной ряд вида

$$\frac{1}{\Phi(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \quad |z| < R. \tag{2.1}$$

Поэтому, если $|w(y)| < R$ при всех $y:\ |y| \geqslant y_0 > 0$, то для функции G из леммы 1 верно равенство

$$c(G,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k(y), \quad |y| \geqslant y_0.$$

Тогда

$$G = \sum_{k=1}^{\infty} c_k W^{[k]} + V,$$

где $V \in \mathbf{E}_{y_0}$. Если $\sigma \geqslant y_0$ и известно, как строить приближающие функции $T_\sigma W^{[k]}$ для ядер $W^{[k]}$, то можно положить

$$T_\sigma G = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, T_\sigma W^{[k]} + V.$$

Тогда

$$\varphi * G - \varphi * T_\sigma G = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \varphi * (W^{[k]} - T_\sigma W^{[k]}),$$

$$P(\varphi * G - \varphi * T_\sigma G) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \left\| W^{[k]} - T_\sigma W^{[k]} \right\|_1 \right) P(\varphi).$$

При этом оказывается, что если все коэффициенты c_k неотрицательны, а разности $W^{[k]} - T_\sigma W^{[k]}$ имеют одинаковые знаки, как в условии N1, то разность $G - T_\sigma G$ обладает тем же свойством и оценка получается точной в случаях, указанных в лемме A.

Описанная схема реализуется с некоторыми модификациями в этом и следующем параграфах. При этом на функции необходимо наложить условия, обеспечивающие возможность приближения слагаемых, сходимость рядов и перемены порядка совершаемых операций.

Далее предположим, что функция W имеет следующий вид.

W1. Функция Λ четна или нечетна, $\Lambda \in L(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $\Lambda = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$, $\varkappa$ – четность Λ, $\theta > 0$, $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ – двусторонняя числовая последовательность, $\alpha_{-\nu-\varkappa} = \alpha_\nu$ при всех $\nu \in \mathbb{Z}$, сумматорный оператор $\mathcal{S}$ определяется равенством

$$\mathcal{S}f(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (-1)^{\nu+\varkappa} \alpha_\nu f\left(x - \left(\nu + \frac{\varkappa}{2}\right)\theta\right), \quad \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\alpha_\nu| < +\infty, \tag{2.2}$$

$V \in \mathbf{E}_{y_0} \cap L(\mathbb{R})$, функция V четна,

$$W = \mathcal{S}\Lambda + V.$$

Тогда

$$w = \gamma\lambda + v, \tag{2.3}$$

где $v = c(V)$, функция $\lambda = c(\Lambda)$ четна или нечетна,

$$\gamma(y) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (-1)^{\nu+\varkappa} \alpha_\nu e^{i(\nu+\frac{\varkappa}{2})\theta y}, \tag{2.4}$$

четность функций γ и λ совпадает. Введение в запись множителей $(-1)^{\nu+\varkappa}$ будет удобно при формулировке условий на знак коэффициентов.

Если $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, то оператор $\mathcal{S}$ действует из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\|\mathcal{S}\|$ его норму как оператора из $UCB(\mathbb{R})$ в $UCB(\mathbb{R})$, а через

$N_P(\mathcal{S})$ его полунорму:

$$N_P(\mathcal{S}) = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \frac{P(\mathcal{S}f)}{P(f)}.$$

Ясно, что

$$N_P(\mathcal{S}) \leqslant \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\alpha_\nu| = \|\mathcal{S}\|,$$

а нормы оператора $\mathcal{S}$ в пространствах $UCB(\mathbb{R})$, $L_\infty(\mathbb{R})$ и $L_1(\mathbb{R})$ совпадают. Ясно также, что $N_P(\mathcal{S}^k) \leqslant N_P^k(\mathcal{S})$.

Запишем явное выражение для степеней оператора $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^k f(x) &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^k} (-1)^{\nu_1+\ldots+\nu_k+k\varkappa}\alpha_{\nu_1}\ldots\alpha_{\nu_k} f\left(x - \left(\nu_1+\ldots+\nu_k+\tfrac{k\varkappa}{2}\right)\theta\right)\\ &= \sum_{\mu\in\mathbb{Z}}(-1)^{\mu+k\varkappa}\Bigg(\sum_{\substack{\nu\in\mathbb{Z}^k\\ \nu_1+\ldots+\nu_k=\mu}} \alpha_{\nu_1}\ldots\alpha_{\nu_k}\Bigg) f\left(x - \left(\mu+\tfrac{k\varkappa}{2}\right)\theta\right).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Важным примером оператора $\mathcal{S}$ рассматриваемого вида служит оператор конечной разности r-го порядка δ_θ^r:

$$\delta_\theta^r f(x) = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k C_r^k f\Big(x + \frac{r\theta}{2} - k\theta\Big).$$

Для него $\gamma(y) = \left(2i\sin\frac{y\theta}{2}\right)^r$. При четном $r = 2m$ и нечетном $r = 2m+1$ разности записываются соответственно в виде

$$\delta_\theta^{2m} f(x) = \sum_{\nu=-m}^{m} (-1)^{m+\nu} C_{2m}^{m-\nu} f(x-\nu\theta),$$

$$\delta_\theta^{2m+1} f(x) = \sum_{\nu=-m-1}^{m} (-1)^{m+\nu+1} C_{2m+1}^{m-\nu} f\Big(x - \Big(\nu+\frac{1}{2}\Big)\theta\Big).$$

При $\sigma \geqslant y_0$ положим

$$T_\sigma W = \mathcal{S} L_\sigma \Lambda + V,$$

где $L_\sigma\Lambda$ выражается по формуле (1.12). Из сходимости ряда в (2.2) ясно, что $T_\sigma W \in \mathbf{E}_\sigma \cap L(\mathbb{R})$, причем $c(T_\sigma W) = \gamma c(L_\sigma\Lambda) + v$.

Обозначим $\widetilde{W} = W - V = \mathcal{S}\Lambda$. Легко видеть, что оператор $\mathcal{S}$ коммутирует с оператором свертки. Если

$$G_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \widetilde{W}^{[k]} + V = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{S}^k \Lambda^{[k]} + V,$$

то положим

$$T_\sigma G_n = \sum_{k=1}^{n} c_k T_\sigma \widetilde{W}^{[k]} + V = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{S}^k L_\sigma \Lambda^{[k]} + V. \tag{2.6}$$

По замечанию 6 функции $L_\sigma \Lambda^{[k]}$ определены корректно. По линейности $T_\sigma W \in \mathbf{E}_\sigma \cap L(\mathbb{R})$.

Для следующего шага построения предположим, что выполняется еще одно условие.

W2. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \|\mathcal{S}^k\| \left\|\Lambda^{[k]} - L_\sigma \Lambda^{[k]}\right\|_1 \tag{2.7}$$

сходится.

Из сходимости ряда (2.7) следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\widetilde{W}^{[k]} - T_\sigma \widetilde{W}^{[k]}\right) \tag{2.8}$$

абсолютно сходится в $L(\mathbb{R})$. Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\widetilde{w}^k - c\big(T_\sigma \widetilde{W}^{[k]}\big)\right)$$

сходится абсолютно, и ряд из модулей его членов сходится равномерно на $\mathbb{R}$. В частности, из условия W2 вытекает следующее утверждение.

W3. При всех $y : |y| \geqslant y_0$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k w^k(y)$ абсолютно сходится.

Действительно, при $|y| \geqslant y_0$ справедливы равенства $\widetilde{w}(y) = w(y)$ и $c\big(T_\sigma \widetilde{W}^{[k]}, y\big) = 0$, так как $T_\sigma \widetilde{W}^{[k]} \in \mathbf{E}_\sigma$, $\sigma \geqslant y_0$.

Замечание 7. Если ряд (2.1) абсолютно сходится при $|z| = R$, то условие W3 означает, что $|w(y)| \leqslant R$ при всех y: $|y| \geqslant y_0$. В противном случае оно означает, что $|w(y)| < R$ при всех y: $|y| \geqslant y_0$.

Исправляя при необходимости $c(\Lambda)$ на $(-y_0, y_0)$ и добавляя поправку к V, можно считать, что $|\widetilde{w}(y)| < R$ или соответственно $|\widetilde{w}(y)| \leqslant R$

при всех $y \in \mathbb{R}$ и, таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \widetilde{w}^k(y)$ абсолютно сходится при всех $y \in \mathbb{R}$. При этом можно считать, что множество значений $\widetilde{w}$ содержится в области голоморфности Φ. При таком соглашении

$$c(G_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \widetilde{w}^k + v \to \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \widetilde{w}^k + v = \frac{1}{\Phi \circ (w - v)} - 1 + v \qquad (2.9)$$

при $n \to \infty$ равномерно на $\mathbb{R}$. По теореме Винера – Леви правая часть соотношения (2.9) есть преобразование Фурье $c(G)$ некоторой функции $G \in L(\mathbb{R})$. Эта функция G – одна из тех, о существовании которых говорится в первом утверждении леммы 1.

Положим

$$T_\sigma G = G - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \big(\widetilde{W}^{[k]} - T_\sigma \widetilde{W}^{[k]}\big). \qquad (2.10)$$

Ясно, что $T_\sigma G \in L(\mathbb{R})$. Из сходимости ряда (2.8) в $L(\mathbb{R})$, включений $T_\sigma \widetilde{W}^{[k]} \in \mathbf{E}_\sigma$ и соотношения (2.9) следует, что

$$c(T_\sigma G) = c(G) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \big(\widetilde{w}^k - c(T_\sigma \widetilde{W}^{[k]})\big) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \gamma^k\, c\big(L_\sigma \Lambda^{[k]}\big). \qquad (2.11)$$

Следовательно, $c(T_\sigma G, y) = 0$ при всех $y : |y| > \sigma$, и потому $T_\sigma G \in \mathbf{E}_\sigma$.

Если $\varphi = \Phi(\mathcal{W}) f$, $f - \Phi(\mathcal{W}) f$ представляется равенством (1.3), положим

$$\mathcal{Z}_{\sigma, W, \Phi} f = f * Q + \varphi * T_\sigma G.$$

Тогда

$$f - \mathcal{Z}_{\sigma, W, \Phi} f = \varphi + \varphi * (G - T_\sigma G).$$

Замечание 8. Мыслима ситуация, когда функция W допускает различные представления вида $W = \mathcal{S}\Lambda + V$ и построенные операторы $\mathcal{Z}_{\sigma, W, \Phi}$ могут оказаться различными. Это не приведет к недоразумениям, если считать, что при фиксированном представлении из свойства W1 операторы строятся на основе этого представления. Если же представление не фиксировано, можно считать, что через $\mathcal{Z}_{\sigma, W, \Phi}$ обозначается любой из построенных операторов.

Для операторов $\mathcal{Z}_{\sigma, W, \Phi}$ справедлив аналог замечания 1.

Замечание 9. Из абсолютной сходимости ряда (2.8) в $L(\mathbb{R})$ следует [7, лемма 4], что для произвольного пространства $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \big(\widetilde{\mathcal{W}}^k - \mathcal{T}_\sigma \widetilde{\mathcal{W}}^k\big)$$

абсолютно сходится по полунорме пространства операторов, действующих из $(\mathfrak{M}, P)$ в $(\mathfrak{M}, P)$. Здесь $\widetilde{\mathcal{W}}^k$ и $\mathcal{T}_\sigma \widetilde{\mathcal{W}}^k$ суть операторы свертки с ядрами $\widetilde{W}^{[k]}$ и $T_\sigma \widetilde{W}^{[k]}$.

Замечание 10. Из определения следует, что $\mathcal{Z}_{\sigma,W,\Phi}$ – оператор свертки с ядром

$$Z_\sigma = Q + T_\sigma G + (\Phi - 1)^\circ(W) * T_\sigma G.$$

Выразим преобразование Фурье ядра Z_σ. Пользуясь формулой (1.4) для ядра Q и равенством (2.11), имеем:

$$c(Z_\sigma) = (\Phi \circ (w - v) - \Phi \circ w)(1 + c(G)) + (\Phi \circ w) \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \gamma^k\, c\big(L_\sigma \Lambda^{[k]}\big).$$

Учитывая, что $c(G) = \frac{1 - \Phi \circ (w-v)}{\Phi \circ (w-v)}$, получаем:

$$c(Z_\sigma) = \left(1 + \frac{\Phi \circ w}{\Phi \circ (w - v)}\right) + (\Phi \circ w) \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \gamma^k\, c\big(L_\sigma \Lambda^{[k]}\big).$$

Теорема 1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $y_0 > 0$, $\sigma \geqslant y_0$, *функция* Φ *удовлетворяет условиям* $\Phi 1$ *и* $\Phi 2$, *функция* W *– условиям* W1 *и* W2; *при всех* $k \in \mathbb{N}$, *для которых* $c_k \neq 0$, *существует* $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$, *такое что*

$$\varepsilon_k \big(\Lambda^{[k]}(t) - L_\sigma \Lambda^{[k]}(t)\big) \cos\left(\sigma t - \frac{k \varkappa \pi}{2}\right) \geqslant 0$$

для почти всех $t \in \mathbb{R}$; $\varphi = \Phi(\mathcal{W}) f$. *Тогда*

$$P(f - \mathcal{Z}_{\sigma,W,\Phi} f) \leqslant P(\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\, \mathcal{K}_{\sigma,\Lambda^{[k]}} P(\mathcal{S}^k \varphi), \tag{2.12}$$

$$P(f - \mathcal{Z}_{\sigma,W,\Phi} f) \leqslant \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\, \|\mathcal{S}^k\| \mathcal{K}_{\sigma,\Lambda^{[k]}}\right) P(\varphi), \tag{2.13}$$

$$A_\sigma(f)_P \leqslant \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\, \|\mathcal{S}^k\| \mathcal{K}_{\sigma,\Lambda^{[k]}}\right) A_\sigma(\varphi)_P, \tag{2.14}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\,\|\mathcal{S}^k\|\mathcal{K}_{\sigma,\Lambda^{[k]}}\right)A_{\sigma-0}(\varphi)_P, \tag{2.15}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\,\|\mathcal{S}^k\|\mathcal{K}_{\sigma,\Lambda^{[k]}}\right)P(\varphi), \tag{2.16}$$

$$A_{\sigma}(f)_P \leqslant \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\,\|\mathcal{S}^k\|\mathcal{K}_{\sigma,\Lambda^{[k]}}\right)P(\varphi). \tag{2.17}$$

Доказательство. Поскольку ряд (2.8) абсолютно сходится в $L(\mathbb{R})$, верно равенство

$$f-\mathcal{Z}_{\sigma,W,\Phi}f=\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,\varphi*\big(\widetilde{W}^{[k]}-T_\sigma\widetilde{W}^{[k]}\big),$$

причем ряд в правой части абсолютно сходится по полунорме P. Пользуясь определением $T_\sigma\widetilde{W}^{[k]}$ и тем, что операторы $\mathcal{S}$ и свертки коммутируют, получаем

$$f-\mathcal{Z}_{\sigma,W,\Phi}f=\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,\mathcal{S}^k\varphi*\big(\Lambda^{[k]}-L_\sigma\Lambda^{[k]}\big).$$

Применяя неравенство треугольника и соотношение (1.6), приходим к неравенству (2.12). Неравенство (2.13) вытекает из (2.12).

Неравенство (2.14) проще всего следует из (2.13), если в качестве полунормы взять $A_\sigma(\cdot)_P$ и учесть, что $A_\sigma(f-\mathcal{Z}_{\sigma,W,\Phi}(f))_P=A_\sigma(f)_P$. Приведем и другой способ доказательства, общий для неравенств (2.14) и (2.15). Запишем по лемме 1

$$f=\varphi+f*Q+\varphi*G,$$

где $f*Q\in\mathbf{E}_{y_0}\cap L(\mathbb{R})$. Отсюда, внося полунорму под знак интеграла [2, следствие 2], получаем

$$A_\sigma(f)_P\leqslant\big(1+A_\sigma(G)_1\big)A_\sigma(\varphi)_P.$$

Остается применить неравенство

$$A_\sigma(G)_1\leqslant\|G-T_\sigma G\|_1\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\,\|\mathcal{S}^k\|\mathcal{K}_{\sigma,\Lambda^{[k]}}.$$

Неравенство (2.15) доказывается аналогично. При этом надо еще учесть, что [1, п. 99, с. 232] $A_{\sigma-0}(G)_1=A_\sigma(G)_1$ и

$$A_{\sigma-0}(f*Q)_P\leqslant A_{\sigma-0}(f)_PA_{\sigma-0}(Q)_1=A_{\sigma-0}(f)_PA_\sigma(Q)_1=0.$$

Неравенства (2.16) и (2.17) очевидно следуют из (2.15). □

§3. Точные неравенства

В этом параграфе при $\theta = \frac{\pi}{\sigma}$ устанавливаются дополнительные свойства приближающих операторов и доказывается, что в ряде случаев неравенства теоремы 1 точны.

Замечание 11. При $\theta = \frac{\pi}{\sigma}$ в точках $z_q = \left(q + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\sigma}$ $(q \in \mathbb{Z})$ значения $T_\sigma G_n$ и G_n совпадают.

Доказательство. Обозначая $\tau_\nu = (-1)^{\nu+\varkappa}\alpha_\nu$, где $\varkappa$ – четность ядра Λ, имеем

$$T_\sigma \mathcal{S}\Lambda(z_q) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \tau_\nu L_\sigma \Lambda\Big(z_q - \Big(\nu + \frac{\varkappa}{2}\Big)\frac{\pi}{\sigma}\Big).$$

В обоих случаях точки $z_q = \left(\nu+\frac{\varkappa}{2}\right)\frac{\pi}{\sigma}$ суть узлы интерполяции, поэтому

$$T_\sigma \mathcal{S}\Lambda(z_q) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \tau_\nu \Lambda\Big(z_q - \Big(\nu + \frac{\varkappa}{2}\Big)\frac{\pi}{\sigma}\Big) = \mathcal{S}\Lambda(z_q).$$

Таким образом, равенство $T_\sigma \widetilde{W}^{[k]}(z_q) = \widetilde{W}^{[k]}(z_q)$ доказано для $k = 1$. Чтобы доказать его для произвольного k, надо применить доказанное равенство к функции $\Lambda^{[k]}$ и оператору $\mathcal{S}^k$, который имеет тот же вид, что и $\mathcal{S}$. По линейности $T_\sigma G_n(z_q) = G_n(z_q)$. □

Из замечания 11 вытекает, что если $G_n \in C(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $G_n(t) = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$, то $T_\sigma G_n = L_\sigma G_n$, так как суммируемая интерполяционная функция единственна [8, п. 4.3.1, с. 195]. Поэтому при $\theta = \frac{\pi}{\sigma}$ мы будем использовать обозначение $L_\sigma G_n$ вместо $T_\sigma G_n$.

Неравенства (2.13)–(2.17) бессодержательны в случае расходимости ряда (2.7), так как константы в их правых частях бесконечны. Построение приближающих операторов также опиралось на сходимость ряда (2.7). Однако, непосредственная проверка сходимости этого ряда не всегда удобна.

Далее мы будем по-прежнему предполагать выполнение условия W1, но, но не будем предполагать выполнения условия W2, то есть сходимости ряда (2.7). Вместо этого потребуем, чтобы функция W удовлетворяла более слабому условию W3 и еще двум условиям.

W4. Функция $|\lambda|$ убывает на $[y_0, +\infty)$.

W5. При всех $k \in \mathbb{N}$, для которых $c_k \neq 0$, выполняются равенства

$$L_\sigma \Lambda^{[k]}(t) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} c\big(L_\sigma \Lambda^{[k]}, y\big) e^{ity}\, dy,$$

$$c\big(L_\sigma \Lambda^{[k]}, y\big) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^{s(1-k\varkappa)} c\big(\Lambda^{[k]}, y + 2s\sigma\big), \quad |y| \leqslant \sigma.$$

Здесь c_k – коэффициенты ряда (2.1), ядро Λ определено в свойстве W1, $\lambda = c(\Lambda)$, $\varkappa$ – четность ядра Λ.

Мы также будем пользоваться соглашениями из замечания 7, справедливого при условии W3.

Впоследствии (см. далее замечание 14) мы покажем, что при дополнительных предположениях, обеспечивающих точность неравенств, условие W2 выполняется автоматически.

Лемма 3. *Пусть $y_0 > 0$, $\sigma \geqslant y_0$, $\theta = \frac{\pi}{\sigma}$, функция W удовлетворяет условиям* W1, W3, W4 *и* W5. *Тогда последовательность $\{L_\sigma G_n\}$ сходится на $\mathbb{R}$ поточечно.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $V = 0$, то есть $\widetilde{W} = W$.

1. Рассмотрим случай, когда функции γ и λ из формулы (2.3) четны, и для определенности будем считать, что $\lambda \geqslant 0$ на $[y_0, +\infty)$. Отметим, что функция γ имеет период 2σ. Обозначим $\xi_{n\sigma} = c(L_\sigma G_n)$. Ввиду условия W5 и равенства (2.6) верны формулы

$$L_\sigma G_n(t) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \xi_{n\sigma}(y) e^{ity}\, dy, \tag{3.1}$$

$$\xi_{n\sigma}(y) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \gamma^k(y) \lambda^k(y + 2s\sigma), \qquad |y| \leqslant \sigma. \tag{3.2}$$

Докажем, что последовательность $\{\xi_{n\sigma}(y)\}$ сходится и возможен предельный переход под знаком интеграла в правой части равенства (3.1). Рассмотрим повторный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \gamma^k(y) \lambda^k(y + 2s\sigma). \tag{3.3}$$

Ввиду убывания функции λ на $[\sigma, +\infty)$ к нулю

$$0 \leqslant \sum_{q=1}^{\infty} \big(\lambda^k(y + (4q-2)\sigma) - \lambda^k(y + 4q\sigma)\big) \leqslant \lambda^k(y + 2\sigma).$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k||w^k(y + 2\sigma)|$ сходится, двойной ряд

$$\sum_{k,q=1}^{\infty} c_k \gamma^k(y) \big(\lambda^k(y + (4q-2)\sigma) - \lambda^k(y + 4q\sigma)\big)$$

сходится абсолютно. Следовательно, равны суммы повторных рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma^k(y) \sum_{q=1}^{\infty} \big(\lambda^k(y + (4q-2)\sigma) - \lambda^k(y + 4q\sigma)\big)$$
$$= \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma^k(y) \big(\lambda^k(y + (4q-2)\sigma) - \lambda^k(y + 4q\sigma)\big). \tag{3.4}$$

Воспользуемся следующим фактом: если $a_s \to 0$ и ряд $\sum\limits_{q=1}^{\infty} (a_{2q-1} - a_{2q})$ сходится, то ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} a_s$ сходится к той же сумме. Применение его к внутренней сумме в левой части равенства (3.4), где $a_s = \lambda^k(y + 2s\sigma)$, очевидно. В правой части $a_s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \gamma^k(y) \lambda^k(y + 2s\sigma)$. Этот ряд сходится равномерно по $s \in \mathbb{N}$, а его члены стремятся к нулю при $s \to \infty$. Следовательно, условие $a_s \to 0$ выполнено. Получаем, что ряд (3.3) сходится и в нем законна перемена порядка суммирования. Кроме того, частичные суммы ряда (3.3) удовлетворяют неравенству

$$\left| \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \gamma^k(y) \lambda^k(y + 2s\sigma) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k||\gamma^k(y)| \lambda^k(y + 2\sigma) = M(y),$$

причем $M \in L[-\sigma, \sigma]$.

Сумма по отрицательным индексам s в ряде (3.2) ввиду четности λ сводится к только что разобранной, а слагаемое с $s = 0$ легко рассматривается отдельно.

Обозначим $\xi_\sigma(y) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_{n\sigma}(y)$. По теореме Лебега о мажорированной сходимости $\xi_\sigma \in L[-\sigma, \sigma]$ и возможен предельный переход под знаком интеграла в правой части равенства (3.1).

2. Случай, когда функции γ и λ из формулы (2.3) нечетны, разбирается аналогично. При этом надо учесть, что $\gamma(y+2\sigma) = -\gamma(y)$ ввиду формулы (2.4), и при нечетных k в сумме по s группировать слагаемые с противоположными номерами. $\square$

Итак, в условиях леммы 3 верна формула

$$\xi_\sigma(y) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma^k(y+2s\sigma)\lambda^k(y+2s\sigma), \tag{3.5}$$

и можно определить функцию $L_\sigma G$ равенством

$$L_\sigma G(t) = \lim_{n\to\infty} L_\sigma G_n(t) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \xi_\sigma(y) e^{ity}\, dy, \tag{3.6}$$

причем сходимость равномерна по t. Здесь G – функция, определенная в замечании 7. Отсюда $L_\sigma G \in \mathbf{E}_\sigma$. Вопрос о совпадении правых частей формул (3.6) и (1.12) в общем случае мы исследовать не будем и под $L_\sigma G$ будем понимать функцию, определенную соотношением (3.6).

Если $\varphi = \Phi(\mathcal{W})f$, $f - \Phi(\mathcal{W})f$ представляется равенством (1.3), положим

$$\mathcal{Y}_{\sigma,W,\Phi} f = f * Q + \varphi * L_\sigma G.$$

Другими словами, $\mathcal{Y}_{\sigma,W,\Phi} = \mathcal{X}_{\sigma,G}\big(I - \Phi(\mathcal{W})\big)$. Тогда

$$f - \mathcal{Y}_{\sigma,W,\Phi} f = \varphi + \varphi * (G - L_\sigma G).$$

Для оператора $\mathcal{Y}_{\sigma,W,\Phi}$ справедлив аналог замечания 1.

Замечание 12. Из определения следует, что $\mathcal{Y}_{\sigma,W,\Phi}$ – оператор свертки с ядром

$$Y_\sigma = Q + L_\sigma G + (\Phi - 1)^\circ(W) * L_\sigma G.$$

Выразим преобразование Фурье ядра Y_σ через преобразование Фурье исходного ядра W. Пользуясь, как и в замечании 10, выражением (1.4) для ядра Q, имеем:

$$c(Y_\sigma) = (\Phi \circ (w - v) - \Phi \circ w)(1 + c(G)) + (\Phi \circ w) c(L_\sigma G).$$

Записывая $c(L_\sigma G)$ по формуле (3.5), выделяя слагаемое при $s = 0$ и учитывая, что $c(G) = \frac{1-\Phi\circ(w-v)}{\Phi\circ(w-v)}$, а $v(y) = 0$ при $|y| \geqslant \sigma$, получаем, что

при $|y| \leqslant \sigma$

$$c(Y_\sigma, y) = 1 - (\Phi \circ w)(y) - (\Phi \circ w)(y) \sum_{s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-1)^{s-1} \frac{1 - (\Phi \circ w)(y + 2s\sigma)}{(\Phi \circ w)(y + 2s\sigma)}$$
$$= 1 - (\Phi \circ w)(y) - (\Phi \circ w)(y) \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-1)^{s-1} w^k (y + 2s\sigma). \tag{3.7}$$

Из этой формулы следует, что оператор $\mathcal{Y}_{\sigma,W,\Phi}$ не зависит от выбора функций Λ и V и оператора $\mathcal{S}$ в представлении (2.2).

Замечание 13. Пусть $\theta = \frac{\pi}{\sigma}$ и выполнены условия W1–W5, то есть обе функции $T_\sigma G$ и $L_\sigma G$ определены, соответственно, формулами (2.10) и (3.6). Тогда из равенства преобразований Фурье вытекает, что $T_\sigma G = L_\sigma G$. Следовательно, в этом случае $\mathcal{Y}_{\sigma,W,\Phi} = \mathcal{Z}_{\sigma,W,\Phi}$.

Напомним, что через c_k обозначаются коэффициенты ряда (2.1), функция Λ, коэффициенты α_ν и оператор $\mathcal{S}$ определены в условии W1.

Теорема 2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $y_0 > 0$, $\sigma \geqslant y_0$, $\theta = \frac{\pi}{\sigma}$, *функция* Φ *удовлетворяет условиям* $\Phi 1$ *и* $\Phi 2$, *функция* W *– условиям* W1, W3, W4 *и* W5; $c_k \geqslant 0$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_\nu \geqslant 0$ *при всех* $\nu \in \mathbb{Z}$; *при всех* k, *для которых* $c_k \neq 0$, *и почти всех* $t \in \mathbb{R}$

$$\left(\Lambda^{[k]}(t) - L_\sigma \Lambda^{[k]}(t)\right) \cos\left(\sigma t - \frac{k\varkappa\pi}{2}\right) \geqslant 0, \tag{3.8}$$

$\varphi = \Phi(\mathcal{W}) f$. *Тогда*

$$P(f - \mathcal{Y}_{\sigma,W,\Phi} f) \leqslant P(\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathcal{K}_{\sigma,\Lambda^{[k]}} P(\mathcal{S}^k \varphi), \tag{3.9}$$
$$P(f - \mathcal{Y}_{\sigma,W,\Phi} f) \leqslant (1 + \mathcal{K}_{\sigma,G}) P(\varphi), \tag{3.10}$$
$$A_\sigma(f)_P \leqslant (1 + \mathcal{K}_{\sigma,G}) A_\sigma(\varphi)_P, \tag{3.11}$$
$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant (1 + \mathcal{K}_{\sigma,G}) A_{\sigma-0}(\varphi)_P, \tag{3.12}$$
$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant (1 + \mathcal{K}_{\sigma,G}) P(\varphi), \tag{3.13}$$
$$A_\sigma(f)_P \leqslant (1 + \mathcal{K}_{\sigma,G}) P(\varphi). \tag{3.14}$$

В пространствах $(UCB(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *и* $(L(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ *константу в неравенствах* (3.10)–(3.14) *нельзя заменить меньшей, даже если ограничиться функциями, ортогональными* $\mathbf{E}_\sigma$. *В пространствах* $\frac{2\pi}{\sigma}$*-периодических функций с равномерной и интегральной нормами константу в неравенствах* (3.10), (3.12), (3.13) *нельзя заменить меньшей, даже если ограничиться функциями с нулевым средним.*

Доказательство. 1. Сначала докажем сами неравенства. Проверим, что при всех $k \in \mathbb{N}$, для которых $c_k \neq 0$, и почти всех $t \in \mathbb{R}$

$$\big(\widetilde{W}^{[k]}(t) - L_\sigma \widetilde{W}^{[k]}(t)\big) \cos \sigma t \geqslant 0.$$

Обозначим для краткости

$$f_k = \Lambda^{[k]} - L_\sigma \Lambda^{[k]}, \quad \beta_\mu = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^k \\ \nu_1 + \ldots + \nu_k = \mu}} \alpha_{\nu_1} \ldots \alpha_{\nu_k}.$$

По формуле (2.5) имеем

$$\begin{aligned}
&\big(\widetilde{W}^{[k]}(t) - L_\sigma \widetilde{W}^{[k]}(t)\big) \cos \sigma t = \mathcal{S}^k f_k(t) \cos \sigma t \\
&= \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} (-1)^{\mu + k\varkappa} \beta_\mu f_k \left(t - \left(\mu + \frac{k\varkappa}{2} \right) \frac{\pi}{\sigma} \right) \cos \sigma t \\
&= \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \beta_\mu f_k \left(t - \frac{\mu\pi}{\sigma} - \frac{k\varkappa\pi}{2\sigma} \right) \cos \left(\sigma \left(t - \frac{\mu\pi}{\sigma} - \frac{k\varkappa\pi}{2\sigma} \right) - \frac{k\varkappa\pi}{2} \right).
\end{aligned}$$

Ввиду неотрицательности коэффициентов α_ν и условия (3.8) правая часть неотрицательна.

Из неотрицательности коэффициентов c_k вытекает, что при всех $n \in \mathbb{N}$ и почти всех $t \in \mathbb{R}$

$$\big(G_n(t) - L_\sigma G_n(t)\big) \cos \sigma t \geqslant 0.$$

Обозначим

$$H_n(t) = \big(G_n(t) - L_\sigma G_n(t)\big) \cos \sigma t, \quad H(t) = \big(G(t) - L_\sigma G(t)\big) \cos \sigma t.$$

В силу положительности операторов Фейера σ_N при всех $N > 0$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\sigma_N H_n(t) \geqslant 0$. По замечанию 7 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \widetilde{w}^k$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$, то есть $c(G_n)$ равномерно сходится к $c(G)$ на $\mathbb{R}$. Кроме того, $L_\sigma G_n \to L_\sigma G$ при $n \to \infty$ равномерно на $\mathbb{R}$. Умножение

на $\cos\sigma t$ не нарушает ни той, ни другой сходимости. Следовательно, при каждом $N > 0$

$$\sigma_N H_n \to \sigma_N H$$

при $n \to \infty$ равномерно на $\mathbb{R}$. Отсюда $\sigma_N H(t) \geqslant 0$ при всех $N > 0$ и $t \in \mathbb{R}$. Устремляя N к ∞, получаем неравенство

$$(G(t) - L_\sigma G(t)) \cos\sigma t \geqslant 0$$

при почти всех t.

Последовательность $\{|G_n(t) - L_\sigma G_n(t)|\}$ возрастает при почти всех t. По теореме Леви

$$\|G_n - L_\sigma G_n\|_1 \to \|G - L_\sigma G\|_1. \tag{3.15}$$

Пользуясь записью константы в (1.6), соотношение (3.15) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathcal{K}_{\sigma,\widetilde{W}^{[k]}} = \mathcal{K}_{\sigma,G}.$$

Таким образом, выполнено условие W2 и, следовательно, все неравенства (3.9)–(3.14) выполняются по теореме 1.

Для дальнейшего заметим, что неравенство (3.9) усиливает (3.10), так как

$$\mathcal{K}_{\sigma,\Lambda^{[k]}} P(\mathcal{S}^k \varphi) \leqslant \mathcal{K}_{\sigma,\Lambda^{[k]}} \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \alpha_\nu \right)^k P(\varphi) = \mathcal{K}_{\sigma,\widetilde{W}^{[k]}} P(\varphi).$$

Докажем точность неравенств.

2. Сначала заметим, что по формуле (1.6) в пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$ для функции $\varphi_\sigma(t) = \operatorname{sign}\cos\sigma t$ неравенство

$$\|\varphi + \varphi * (G - L_\sigma G)\|_\infty \leqslant (1 + \mathcal{K}_{\sigma,G})\|\varphi\|_\infty$$

обращается в равенство. Поэтому неравенство (3.10) в пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$ обращается в равенство, если $\Phi(\mathcal{W})f = \varphi_\sigma$. В качестве такой функции можно взять

$$\psi_\sigma = \varphi_\sigma + \varphi_\sigma * G.$$

Функция ψ_σ периодическая с периодом $\frac{2\pi}{\sigma}$, и раскладывается в ряд Фурье

$$\psi_\sigma(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)(\Phi \circ w)((2s+1)\sigma)} \cos(2s+1)\sigma t.$$

Поэтому $\mathcal{Y}_{\sigma,W,\Phi}\psi_\sigma = 0$. Кроме того, [1, п. 96, с. 227], $A_{\sigma-0}(\psi_\sigma)_\infty = \|\psi_\sigma\|_\infty$. Отсюда вытекает, что неравенство (3.13), а значит, и предшествующие неравенства (3.10) и (3.12) также обращаются в равенства на функции ψ_σ.

3. Докажем точность неравенства (3.14) в пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$ на множестве функций, ортогональных $\mathbf{E}_\sigma$. Возьмем $\rho > \sigma$ и положим

$$\psi_\rho = \varphi_\rho + \varphi_\rho * G.$$

Тогда, как и ранее,

$$\mathcal{Y}_{\sigma,W,\Phi}\psi_\rho = 0, \qquad \Phi(\mathcal{W})\psi_\rho = \varphi_\rho,$$
$$\|\Phi(\mathcal{W})\psi_\rho\|_\infty = \|\varphi_\rho\|_\infty = \|\varphi_\sigma\|_\infty, \quad A_\sigma(\psi_\rho)_\infty = \|\psi_\rho\|_\infty.$$

По теореме Лебега о мажорированной сходимости $\psi_\rho \underset{\rho\to\sigma+}{\longrightarrow} \psi_\sigma$ почти всюду, поэтому

$$\varliminf_{\rho\to\sigma+} \|\psi_\rho\|_\infty \geqslant \|\psi_\sigma\|_\infty,$$

что и доказывает точность неравенства (3.14).

Неулучшаемость неравенств на множествах непрерывных функций стандартно выводится из неулучшаемости на множествах функций из $L_\infty(\mathbb{R})$ (например, с помощью приближения функций φ_ρ их интегралами Фейера).

4. Докажем точность неравенств в случае интегральной нормы. Оператор $\Phi(\mathcal{W})$ обратим на множествах функций, ортогональных $\mathbf{E}_\sigma$. Поэтому при всех $p \in [1,\infty]$ имеем:

$$\sup_{\substack{f\perp\mathbf{E}_\sigma\\ \|\Phi(\mathcal{W})f\|_p\leqslant 1}} A_\sigma(f)_p = \sup_{\substack{\varphi\perp\mathbf{E}_\sigma\\ \|\varphi\|_p\leqslant 1}} A_\sigma(\varphi+\varphi*G)_p.$$

Воспользуемся соотношениями двойственности (см. [9, §1.4]):

$$\sup_{\substack{\varphi\perp\mathbf{E}_\sigma\\ \|\varphi\|_1\leqslant 1}} A_\sigma(\varphi+\varphi*G)_1 = \sup_{\substack{\varphi\perp\mathbf{E}_\sigma\\ \|\varphi\|_1\leqslant 1}} \sup_{\substack{g\perp\mathbf{E}_\sigma\\ \|g\|_\infty\leqslant 1}} \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi+\varphi*G)\, g\right|$$
$$= \sup_{\substack{g\perp\mathbf{E}_\sigma\\ \|g\|_\infty\leqslant 1}} \sup_{\substack{\varphi\perp\mathbf{E}_\sigma\\ \|\varphi\|_1\leqslant 1}} \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (g+g*G)\,\varphi\right| = \sup_{\substack{g\perp\mathbf{E}_\sigma\\ \|g\|_\infty\leqslant 1}} A_\sigma(g+g*G)_\infty.$$

Из доказанной точности неравенств в $L_\infty(\mathbb{R})$ следует, что последняя верхняя грань равна $1+\mathcal{K}_{\sigma,G}$. Значит, неравенство (3.14) (а, следовательно, и предшествующие неравенства (3.10)–(3.13)) точно в $L(\mathbb{R})$.

Аналогично доказывается точность неравенства (3.13) (а, следовательно, и предшествующих неравенств (3.10) и (3.12)) в пространстве L $\frac{2\pi}{\sigma}$-периодических функций:

$$\sup_{\substack{\varphi\perp 1\\ \|\varphi\|_1\leqslant 1}} A_{\sigma-0}(\varphi+\varphi*G)_1 = \sup_{\substack{\varphi\perp 1\\ \|\varphi\|_1\leqslant 1}} \sup_{\substack{g\perp 1\\ \|g\|_\infty\leqslant 1}} \left|\int\limits_{-\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{\pi}{\sigma}} (\varphi+\varphi*G)\,g\right|$$

$$= \sup_{\substack{g\perp 1\\ \|g\|_\infty\leqslant 1}} \sup_{\substack{\varphi\perp 1\\ \|\varphi\|_1\leqslant 1}} \left|\int\limits_{-\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{\pi}{\sigma}} (g+g*G)\,\varphi\right| = \sup_{\substack{g\perp 1\\ \|g\|_\infty\leqslant 1}} A_{\sigma-0}(g+g*G)_\infty.$$

При этом используется, что для таких функций $A_{\sigma-0}$ совпадает с наилучшим приближением константами. □

Замечание 14. При доказательстве теоремы 2 установлено, что в ее условиях выполнено свойство W2, причем

$$\mathcal{K}_{\sigma,G} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathcal{K}_{\sigma,\widetilde{W}^{[k]}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \alpha_\nu\right)^k \mathcal{K}_{\sigma,\Lambda^{[k]}}.$$

Через преобразование Фурье константы выражаются так:

$$\mathcal{K}_{\sigma,G} = \frac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1}\,\frac{1-(\Phi\circ w)((2s+1)\sigma)}{(\Phi\circ w)((2s+1)\sigma)}$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1}\sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k\left((2s+1)\sigma\right),$$

$$\mathcal{K}_{\sigma,\widetilde{W}^{[k]}} = \frac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} w^k\left((2s+1)\sigma\right).$$

По замечанию 13 в условиях теоремы 2 верно равенство $\mathcal{Y}_{\sigma,W,\Phi} = \mathcal{Z}_{\sigma,W,\Phi}$.

Теорема 3. *Пусть* $(\mathfrak{M},P)\in\mathcal{B}$, $f\in\mathfrak{M}$, $y_0>0$, $\sigma\geqslant y_0$, $\theta=\frac{\pi}{\sigma}$, *функция* Φ *удовлетворяет условиям* $\Phi1$ *и* $\Phi2$, *функция* W *– условиям* W1 *и* W3, $c_k\geqslant 0$ *при всех* $k\in\mathbb{N}$, $\alpha_\nu\geqslant 0$ *при всех* $\nu\in\mathbb{Z}$, $\varphi=\Phi(\mathcal{W})f$. *Пусть еще функция* Λ *удовлетворяет одному из двух условий:*

1) *функция* $a(\Lambda)$ *или* $b(\Lambda)$, *соответственно четности* Λ, *трижды монотонна на* $[y_0,+\infty)$;

2) $\Lambda\in\widehat{CM}^2(y_0)$, $c(\Lambda)\in C^{(2)}(\mathbb{R}\setminus(-y_0,y_0))$.

Тогда справедливо заключение теоремы 2.

Трехкратная монотонность понимается в смысле замечания 4.

Доказательство. По замечанию 5 можно, не умаляя общности, считать, что функция $\lambda = c(\Lambda)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[-y_0, y_0]$ (во втором случае – на $\mathbb{R}$). Проверим выполнение условий теоремы 2. Условие монотонности W4 выполняется очевидно. Четность функции $\Lambda^{[k]}$ совпадает с четностью $k\varkappa$, где $\varkappa$ – четность Λ. Воспользуемся формулами (1.1). Если функция Λ четна, то при всех $k \in \mathbb{N}$

$$a\bigl(\Lambda^{[k]}\bigr) = 2c\bigl(\Lambda^{[k]}\bigr) = 2c^k(\Lambda) = \frac{1}{2^{k-1}}a^k(\Lambda).$$

Если функция Λ нечетна, то при четном $k = 2r$

$$a\bigl(\Lambda^{[2r]}\bigr) = 2c\bigl(\Lambda^{[2r]}\bigr) = 2c^{2r}(\Lambda) = \frac{2b^{2r}(\Lambda)}{(2i)^{2r}} = \frac{(-1)^r}{2^{2r-1}}b^{2r}(\Lambda),$$

а при нечетном $k = 2r+1$

$$b\bigl(\Lambda^{[2r+1]}\bigr) = 2ic\bigl(\Lambda^{[2r+1]}\bigr) = 2ic^{2r+1}(\Lambda) = \frac{2ib^{2r+1}(\Lambda)}{(2i)^{2r+1}} = \frac{(-1)^r}{2^{2r}}b^{2r+1}(\Lambda).$$

1. Пусть функция Λ удовлетворяет первому условию теоремы. Из аналога правила Лейбница для конечной разности произведения двух функций (см., например, [10, глава I, п. 16, с. 19–20])

$$\Delta_t^n(uv)(x) = \sum_{\nu=0}^{n} C_n^\nu \Delta_t^{n-\nu} u(x+\nu t)\Delta_t^\nu v(x)$$

следует, что произведение трижды монотонных функций трижды монотонно. Отсюда по индукции степени трижды монотонной функции трижды монотонны. Следовательно, если функция Λ четна, то при каждом $k \in \mathbb{N}$ функция $\Lambda^{[k]}$ удовлетворяет условиям Надя (см. лемму B и замечание 4). Если же функция Λ нечетна, то условиям Надя удовлетворяют функции $(-1)^r\Lambda^{[2r]}$ при $k = 2r$ и $(-1)^r\Lambda^{[2r+1]}$ при $k = 2r+1$. Отсюда по лемме B и замечанию 4 выполняются неравенства (3.8), а по замечанию 3 – условие W5.

2. Пусть функция Λ удовлетворяет второму условию теоремы. Заменой переменной в двойном интеграле можно убедиться в том, что произведение двух функций вида (1.15) имеет тот же вид [11, с. 88, теорема 11.5]. По индукции степени функций вида (1.15) имеют тот же вид. Следовательно, если функция Λ четна, то $\Lambda^{[k]} \in \widehat{CM}_c^2(y_0)$ при

всех $k \in \mathbb{N}$. Если же функция Λ нечетна, то $(-1)^r\Lambda^{[2r]} \in \widehat{CM}_c^2(y_0)$, а $(-1)^r\Lambda^{[2r+1]} \in \widehat{CM}_s^2(y_0)$. Отсюда по лемме C выполняются неравенства (3.8), а по замечанию 3 – условие W5.

Таким образом, в обоих случаях выполнены условия теоремы 2. $\square$

Замечание 15. Условие $\alpha_\nu \geqslant 0$ выполнено, в частности, для оператора $(-1)^{(r-\varkappa_r)/2}\delta_\theta^r$, где $\varkappa_r$ – четность числа r, т.е. остаток от деления r на 2.

§4. Оценки приближений через линейные комбинации полунорм разностей

В работе [2] оценка сверху в лемме C была обобщена и усилена в виде, указанном в названии этого параграфа. Чтобы аналогичным образом усилить теоремы 1 и 2, введем новые обозначения и сформулируем предшествующие результаты из [2].

Пусть $y_0 > 0$, $G \in \widehat{CM}^2(y_0)$, $c(G) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$, $c_0(y) = c(G, y)$ при всех y: $|y| \geqslant y_0$, $0 < h < \frac{2\pi}{y_0}$. Положим $c_{h0}(y) = c_0(y)$ $(|y| \geqslant y_0)$,

$$c_{hj}(y) = \frac{1}{2i}\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(c_{h,j-1}(y) - c_{h,j-1}\left(\frac{2\pi s}{h}\right)\right)\frac{(-1)^{s-1}}{\pi s - hy/2} \quad \begin{matrix}(|y| \geqslant y_0,\\ j \in \mathbb{N}),\end{matrix}$$

$$c_{hj}(0) = \sum_{s\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(-1)^{s-1}c_{hj}\left(\frac{2\pi s}{h}\right) \quad (j \in \mathbb{Z}_+),$$

$$K_{hj,G}(t) = \begin{cases} \frac{2\pi}{h}\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}} c_{hj}\left(\frac{2\pi s}{h}\right)e^{i\frac{2\pi s}{h}t}, & |t| \leqslant \frac{h}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{h}{2} \end{cases} \quad (j \in \mathbb{Z}_+).$$

По общему соглашению (1.1) определим функции a_{hj} и b_{hj}.

Если $c_0 \in CM_c^r(y_0)$, то $c_{h1} \in CM_s^r(y_0)$, а если $c_0 \in CM_s^r(y_0)$, то $-c_{h1} \in CM_c^r(y_0)$. Функции c_{hj} и $K_{hj} = K_{hj,G}$ имеют ту же четность, что и c_0, при четном j и четность, противоположную четности c_0, при нечетном j. При всех $m \in \mathbb{Z}_+$ существует функция $N_{hm} = N_{hm,G} \in L(\mathbb{R})$, той же четности, что и c_{hm}, для которой $c(N_{hm}) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$ и $c(N_{hm}, y) = c_{hm}(y)$ при всех y: $|y| \geqslant y_0$. Функции K_{hj} не меняют знака

на $\left(0, \frac{h}{2}\right)$ и суммируемы. При любом $m \in \mathbb{N}$ справедливы разложения

$$G = \sum_{j=0}^{m-1} \delta_h^j K_{hj} + \delta_h^m N_{hm} + M_{hm},$$

$$f = T + \varphi * M_{hm} + \delta_h^m \varphi * N_{hm} + \sum_{j=0}^{m-1} \delta_h^j \varphi * K_{hj},$$

где $M_{hm} = M_{hm,G} \in \mathbf{E}_{y_0} \cap L(\mathbb{R})$, а функции f и φ связаны соотношением (1.5).

Пусть $\sigma \geqslant y_0$. Положим

$$T_{\sigma hm} G = M_{hm,G} + \delta_h^m L_\sigma N_{hm,G}, \quad \mathcal{U}_{\sigma hm,G} f = T + \varphi * T_{\sigma hm} G,$$

$$A_{hj,G} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left| \sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2s+1} b_{hj}\left(\frac{2\pi(2s+1)}{h}\right) \right|, & \text{четность } j \text{ противоположна четности } G, \\ \left| \sum\limits_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} a_{hj}\left(\frac{2\pi s}{h}\right) \right|, & \text{четность } j \text{ совпадает с четностью } G, \end{cases}$$

$$B_{\sigma hm,G} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left| \sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2s+1} b_{hm}((2s+1)\sigma) \right|, & \text{четность } m \text{ противоположна четности } G, \\ \frac{2}{\pi} \left| \sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} a_{hm}((2s+1)\sigma) \right|, & \text{четность } m \text{ совпадает с четностью } G. \end{cases}$$

Для операторов $\mathcal{U}_{\sigma hm,G}$ справедливо замечание, аналогичное замечанию 1.

Теорема D [2, теорема 1]**.** *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, $y_0 > 0$, $G \in \widehat{CM}^2(y_0)$, $c(G) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$, *функции* f *и* φ *связаны равенством* (1.5), $m \in \mathbb{N}$, $0 < h < \frac{2\pi}{y_0}$, $\sigma \geqslant y_0$. *Тогда*

$$P(f - \mathcal{U}_{\sigma hm,G} f) \leqslant A_{h0,G} P(\varphi) + \sum_{j=1}^{m-1} A_{hj,G} P\big(\delta_h^j \varphi\big) + B_{\sigma hm,G} P\big(\delta_h^m \varphi\big).$$

Если, сверх того, ядро G *нечетно, то* $A_{h0,G} P(\varphi)$ *можно заменить на* $A_{h0,G} \frac{\omega_1(\varphi,h)_P}{2}$, *где* $\omega_1(\varphi,h)_P = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant h} P\big(\delta_t^1 \varphi\big)$ *– модуль непрерывности первого порядка функции* φ *относительно полунормы* P.

Здесь и далее ограничимся формулировками неравенств вида (2.12), (2.13) и (3.9), то есть оценок отклонений линейных методов приближения. Неравенства для наилучших приближений выводятся отсюда стандартным способом, как в теореме 1.

В случае, когда функция W четна, а $\mathcal{S}$ – тождественный оператор, результаты этого параграфа получены в [3].

Будем по-прежнему считать, что функция Φ удовлетворяет условиям $\Phi 1$ и $\Phi 2$, функция W – условиям W1 и W3, и предположим еще, что $\Lambda \in \widehat{CM}^2(y_0)$, $c(\Lambda) \in C^{(2)}\big(\mathbb{R} \setminus (-y_0, y_0)\big)$, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \|\mathcal{S}^k\| \left(\sum_{j=0}^{m-1} 2^j A_{hj,\Lambda^{[k]}} + 2^m B_{\sigma hm,\Lambda^{[k]}} \right) \tag{4.1}$$

сходится. Из сходимости ряда (4.1) вытекает, во-первых, условие W2 и, во-вторых, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \, \mathcal{S}^k \big(\Lambda^{[k]} - T_{\sigma hm}\Lambda^{[k]}\big) \tag{4.2}$$

абсолютно сходится в $L(\mathbb{R})$. Положим

$$T_{\sigma hm}G = G - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, \mathcal{S}^k \big(\Lambda^{[k]} - T_{\sigma hm}\Lambda^{[k]}\big).$$

Из определения следует, что $T_{\sigma h0}G = T_\sigma G$. Как и в § 2, легко доказывается, что $T_{\sigma hm}G \in L(\mathbb{R}) \cap \mathbf{E}_\sigma$.

Если $\varphi = \Phi(\mathcal{W})f$, $f - \Phi(\mathcal{W})f$ представляется равенством (1.3), положим

$$\mathcal{Z}_{\sigma hm,W,\Phi} f = f * Q + \varphi * T_{\sigma hm}G.$$

Тогда

$$f - \mathcal{Z}_{\sigma hm,W,\Phi} f = \varphi + \varphi * (G - T_{\sigma hm}G).$$

Для операторов $\mathcal{Z}_{\sigma hm,W,\Phi}$ также справедливо замечание, аналогичное замечанию 1.

Применение теоремы D сразу приводит к следующему результату.

Теорема 4. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $y_0 > 0$, $\sigma \geqslant y_0$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < h < \frac{2\pi}{y_0}$, *функция* Φ *удовлетворяет условиям* $\Phi 1$ *и* $\Phi 2$, *функция* W *– условиям* W1 *и* W3, $\Lambda \in \widehat{CM}^2(y_0)$, $c(\Lambda) \in C^{(2)}\big(\mathbb{R} \setminus (-y_0, y_0)\big)$, *ряд* (4.1) *сходится,* $\varphi = \Phi(\mathcal{W})f$. *Тогда*

$$\begin{aligned} &P(f - \mathcal{Z}_{\sigma hm,W,\Phi} f) \\ &\quad \leqslant P(\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \left(\sum_{j=0}^{m-1} A_{hj,\Lambda^{[k]}} P\big(\delta_h^j \mathcal{S}^k \varphi\big) + B_{\sigma hm,\Lambda^{[k]}} P\big(\delta_h^m \mathcal{S}^k \varphi\big) \right). \end{aligned}$$

Сформулируем частный случай теоремы 4, когда $\mathcal{S} = \pm\delta_h^r$. Напомним, что по условию W1 четность r и Λ одинакова.

Следствие 1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $y_0 > 0$, $\sigma \geqslant y_0$, $r, m \in \mathbb{N}$, $0 < h < \frac{2\pi}{y_0}$, *функция* Φ *удовлетворяет условиям* $\Phi 1$ *и* $\Phi 2$, *функция* W *– условиям* W1 *и* W3, *где* $\mathcal{S} = \pm\delta_h^r$, $\Lambda \in \widehat{CM}^2(y_0)$, $c(\Lambda) \in C^{(2)}\big(\mathbb{R} \setminus (-y_0, y_0)\big)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \left(\sum_{j=0}^{m-1} 2^{rk+j} A_{hj,\Lambda^{[k]}} + 2^{rk+m} B_{\sigma hm,\Lambda^{[k]}} \right) < +\infty,$$

$\varphi = \Phi(\mathcal{W})f$. *Тогда*

$$\begin{aligned} &P(f - \mathcal{Z}_{\sigma hm,W,\Phi} f) \\ &\leqslant P(\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \left(\sum_{j=0}^{m-1} A_{hj,\Lambda^{[k]}} P\big(\delta_h^{rk+j}\varphi\big) + B_{\sigma hm,\Lambda^{[k]}} P\big(\delta_h^{rk+m}\varphi\big) \right). \end{aligned}$$

В [2, лемма 13 и следствие 5] для ядер $\Lambda \in CM^2(y_0)$ установлены равенства

$$B_{\sigma,\frac{\pi}{\sigma},m,\Lambda} = 2^{-m} \left(\mathcal{K}_{\sigma,\Lambda} - \sum_{j=0}^{m-1} 2^j A_{\frac{\pi}{\sigma},j,\Lambda} \right), \quad \mathcal{U}_{\sigma,\frac{\pi}{\sigma},m,\Lambda} = \mathcal{X}_{\sigma,\Lambda}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{Z}_{\sigma,\frac{\pi}{\sigma},m,W,\Phi} = \mathcal{Z}_{\sigma,W,\Phi}.$$

Если же и параметр θ в условии W1 равен $\frac{\pi}{\sigma}$ (в частности, если оператор $\mathcal{S}$ тождественный), то по замечанию 13

$$\mathcal{Z}_{\sigma,\frac{\pi}{\sigma},m,W,\Phi} = \mathcal{Y}_{\sigma,W,\Phi}.$$

Поэтому при $h = \frac{\pi}{\sigma}$ теорема 4 и следствие 1 принимают следующий вид.

Следствие 2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $y_0 > 0$, $\sigma \geqslant y_0$, $m \in \mathbb{N}$, *функция* Φ *удовлетворяет условиям* $\Phi 1$ *и* $\Phi 2$, *функция* W *– условиям* W1 *и* W3, $\Lambda \in \widehat{CM}^2(y_0)$, $c(\Lambda) \in C^{(2)}\big(\mathbb{R} \setminus (-y_0, y_0)\big)$, *при* $h = \frac{\pi}{\sigma}$ *ряд* (4.1)

сходится, $\varphi = \Phi(\mathcal{W})f$. *Тогда*

$$P(f - \mathcal{Z}_{\sigma,W,\Phi}f) \leqslant P(\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \left(\sum_{j=0}^{m-1} A_{\frac{\pi}{\sigma},j,\Lambda^{[k]}} P\big(\delta^j_{\frac{\pi}{\sigma}} \mathcal{S}^k \varphi\big) + B_{\sigma,\frac{\pi}{\sigma},m,\Lambda^{[k]}} P\big(\delta^m_{\frac{\pi}{\sigma}} \mathcal{S}^k \varphi\big) \right). \tag{4.3}$$

Следствие 3. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $y_0 > 0$, $\sigma \geqslant y_0$, $r, m \in \mathbb{N}$, *функция* Φ *удовлетворяет условиям* $\Phi 1$ *и* $\Phi 2$, *функция* W *– условиям* W1 *и* W3, *где* $\mathcal{S} = \pm\delta^r_{\frac{\pi}{\sigma}}$, $\Lambda \in \widehat{CM}^2(y_0)$, $c(\Lambda) \in C^{(2)}\big(\mathbb{R} \setminus (-y_0, y_0)\big)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \left(\sum_{j=0}^{m-1} 2^{rk+j} A_{\frac{\pi}{\sigma},j,\Lambda^{[k]}} + 2^{rk+m} B_{\sigma,\frac{\pi}{\sigma},m,\Lambda^{[k]}} \right) < +\infty,$$

$\varphi = \Phi(\mathcal{W})f$. *Тогда*

$$P(f - \mathcal{Y}_{\sigma,W,\Phi}f) \leqslant P(\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \left(\sum_{j=0}^{m-1} A_{\frac{\pi}{\sigma},j,\Lambda^{[k]}} P\big(\delta^{rk+j}_{\frac{\pi}{\sigma}} \varphi\big) + B_{\sigma,\frac{\pi}{\sigma},m,\Lambda^{[k]}} P\big(\delta^{rk+m}_{\frac{\pi}{\sigma}} \varphi\big) \right). \tag{4.4}$$

Положим $\eta_j(\varphi, h)_P = 2^{-j} P\big(\delta^j_h \varphi\big)$. Поскольку последовательность $\big\{\eta_j(\varphi, h)_P\big\}_{j=0}^{\infty}$ убывает, существует предел

$$\eta_\infty(\varphi, h)_P = \lim_{j\to\infty} \eta_j(\varphi, h)_P.$$

Из убывания последовательности $\big\{\eta_j(\varphi, h)_P\big\}_{j=0}^{\infty}$ следует, что правая часть неравенств (4.3) и (4.4) убывают по m. Поэтому наилучшая оценка получается в пределе при $m \to \infty$.

Следствие 4. *Пусть при некотором* $m \in \mathbb{N}$ *выполнены условия следствия* 2. *Тогда*

$$P(f - \mathcal{Z}_{\sigma,W,\Phi}f) \leqslant P(\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^j A_{\frac{\pi}{\sigma},j,\Lambda^{[k]}}\, \eta_j \left(\mathcal{S}^k \varphi, \frac{\pi}{\sigma}\right)_P \right.$$
$$\left. + \left(\mathcal{K}_{\sigma,\Lambda^{[k]}} - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j A_{\frac{\pi}{\sigma},j,\Lambda^{[k]}} \right) \eta_\infty \left(\mathcal{S}^k \varphi, \frac{\pi}{\sigma}\right)_P \right). \tag{4.5}$$

Следствие 5. *Пусть при некотором* $m \in \mathbb{N}$ *выполнены условия следствия* 3. *Тогда*

$$P(f - \mathcal{Y}_{\sigma,W,\Phi} f) \leqslant P(\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| 2^{rk} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^j A_{\frac{\pi}{\sigma},j,\Lambda^{[k]}} \eta_{rk+j} \left(\varphi, \frac{\pi}{\sigma}\right)_P \right.$$
$$\left. + \left(\mathcal{K}_{\sigma,\Lambda^{[k]}} - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j A_{\frac{\pi}{\sigma},j,\Lambda^{[k]}} \right) \eta_\infty \left(\varphi, \frac{\pi}{\sigma}\right)_P \right). \quad (4.6)$$

Следствия 4 и 5 получаются из следствий 2 и 3 предельным переходом. Для обоснования предельного перехода используется следующий вариант теоремы Лебега о мажорированной сходимости. Если $\{a_{km}\}$ – двойная последовательность неотрицательных чисел, при каждом $k \in \mathbb{N}$ a_{km} убывает по m, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{km_0} < +\infty$ при некотором $m_0 \in \mathbb{N}$, то

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{km} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} a_{km}.$$

Напомним, что коэффициенты c_k и α_ν определяются равенствами (2.1) и (2.2).

Замечание 16. Неравенства (4.3) и (4.5) усиливают неравенство (2.12). Если $\theta = \frac{\pi}{\sigma}$, $c_k \geqslant 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_\nu \geqslant 0$ при всех $\nu \in \mathbb{Z}$, то они усиливают неравенство (3.9) и являются точными в случаях, указанных в теореме 2. Если $c_k \geqslant 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, а $\mathcal{S} = (-1)^{(r-\varkappa_r)/2} \delta^r_{\frac{\pi}{\sigma}}$, то по замечанию 15 эти утверждения относятся и к неравенствам (4.4) и (4.6).

§5. Приложения

За исключением одного примера, при применении теоремы 4 и ее следствий ограничимся явной записью неравенств при $m = 0$ (в этом случае они сводятся к теоремам 1–3) и $m = 1$. Напомним, что

$$A_{\frac{\pi}{\sigma},0,G} = 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{1 - (\Phi \circ w)(2s\sigma)}{(\Phi \circ w)(2s\sigma)},$$
$$\mathcal{K}_{\sigma,G} = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \frac{1 - (\Phi \circ w)((2s+1)\sigma)}{(\Phi \circ w)((2s+1)\sigma)}.$$

В формулировках утверждений этого параграфа мы не будем каждый раз отмечать точность неравенств. Все записанные неравенства и соответствующие им неравенства для наилучших приближений точны в случаях, указанных в теореме 2.

Обозначим через Φ_q главную ветвь степенной функции $z \mapsto (1-z)^q$. Функция Φ_q голоморфна в единичном круге $B(0,1)$. Коэффициенты

$$C_{k+q-1}^{q-1} = \frac{q(q+1)\dots(q+k-1)}{k!}$$

(при $k=0$ дробь считается равной 1) разложения

$$\frac{1}{(1-z)^q} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+q-1}^{q-1} z^k, \quad |z|<1$$

положительны при всех $q>0$. Отметим, что если $|w(y)|<1$ при всех $y : |y| \geqslant y_0$, то условие $\Phi 2$ позволяет не считать число q целым.

5.1. Пусть $\lambda > 0$,

$$W_\lambda(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda y^2} e^{ity}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{t^2}{4\lambda}}$$

– ядро Вейерштрасса (ядро теплопроводности). Ясно, что $W_\lambda \in \widehat{CM}_c^2(y_0)$ для всех $y_0>0$. Свертка $\mathcal{W}_\lambda f = f * W_\lambda$ есть интеграл Вейерштрасса функции f. В силу произвольности y_0 оценки верны для всех $\sigma>0$.

Следствие 6. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $\lambda, \sigma, q > 0$, $\varphi = (I - \mathcal{W}_\lambda)^q f$. *Тогда*

$$\begin{aligned} P\big(f - \mathcal{Y}_{\sigma, W_\lambda, \Phi_q} f\big) \leqslant & \left(1 + 2\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{1-\big(1-e^{-\lambda(2s\sigma)^2}\big)^q}{\big(1-e^{-\lambda(2s\sigma)^2}\big)^q}\right) P(\varphi) \\ & + \left(\frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \frac{1-\big(1-e^{-\lambda((2s+1)\sigma)^2}\big)^q}{\big(1-e^{-\lambda((2s+1)\sigma)^2}\big)^q}\right. \\ & \left. - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{1-\big(1-e^{-\lambda(2s\sigma)^2}\big)^q}{\big(1-e^{-\lambda(2s\sigma)^2}\big)^q}\right) P\big(\delta_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{1}{\pi}} \varphi\big), \end{aligned}$$

$$P\big(f - \mathcal{Y}_{\sigma, W_\lambda, \Phi_q} f\big) \leqslant \left(1 + \frac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \frac{1-\big(1-e^{-\lambda((2s+1)\sigma)^2}\big)^q}{\big(1-e^{-\lambda((2s+1)\sigma)^2}\big)^q}\right) P(\varphi).$$

5.2. Пусть $\lambda > 0$,

$$P_\lambda(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda|y|} e^{ity}\, dy = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + t^2}$$

– ядро Пуассона. Ясно, что $P_\lambda \in \widehat{CM}_c^1(y_0)$ для всех $y_0 > 0$. Свертка $\mathcal{P}_\lambda f = f * P_\lambda$ есть интеграл Пуассона функции f. В силу произвольности y_0 оценки верны для всех $\sigma > 0$.

Следствие 7. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $\lambda, \sigma, q > 0$, $\varphi = (I - \mathcal{P}_\lambda)^q f$. *Тогда*

$$\begin{aligned} P\big(f - \mathcal{Y}_{\sigma, P_\lambda, \Phi_q} f\big) \leqslant{}& \left(1 + 2\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{1 - (1 - e^{-2\lambda\sigma s})^q}{(1 - e^{-2\lambda\sigma s})^q}\right) P(\varphi) \\ &+ \left(\frac{2}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \frac{1 - (1 - e^{-(2s+1)\lambda\sigma})^q}{(1 - e^{-(2s+1)\lambda\sigma})^q}\right. \\ &\left. - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{1 - (1 - e^{-2\lambda\sigma s})^q}{(1 - e^{-2\lambda\sigma s})^q}\right) P\big(\delta^1_{\frac{\pi}{\sigma}} \varphi\big), \\ P\big(f - \mathcal{Y}_{\sigma, P_\lambda, \Phi_q} f\big) \leqslant{}& \left(1 + \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(2s+1)\sigma})^q}{(1 - e^{-\lambda(2s+1)\sigma})^q}\right) P(\varphi). \end{aligned}$$

5.3. Пусть $\lambda > 0$,

$$\Theta_\lambda(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ity}}{\operatorname{ch} \lambda y}\, dy = \frac{\pi}{\lambda \operatorname{ch} \frac{\pi t}{2\lambda}},$$

$\mathcal{T}_\lambda f = f * \Theta_\lambda$. Известно [2, формула (7.10)], что $\Theta_\lambda \in \widehat{CM}_c^2(y_0)$ при всех $y_0 > 0$. Ядро Θ_λ возникает при описании классов аналитических в полосе $\{z : |\operatorname{Im} z| < \lambda\}$ функций [1, п. 110, с. 267–268]. В силу произвольности y_0 оценки верны для всех $\sigma > 0$.

Следствие 8. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $\lambda, \sigma, q > 0$, $\varphi = (I - \mathcal{T}_\lambda)^q f$. *Тогда*

$$P\big(f - \mathcal{Y}_{\sigma,\Theta_\lambda,\Phi_q} f\big) \leqslant \left(1 + 2\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{1-\big(1-\frac{1}{\operatorname{ch} 2\lambda\sigma s}\big)^q}{\big(1-\frac{1}{\operatorname{ch} 2\lambda\sigma s}\big)^q}\right)P(\varphi)$$
$$+\left(\frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}\frac{1-\big(1-\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda(2s+1)\sigma}\big)^q}{\big(1-\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda(2s+1)\sigma}\big)^q}\right.$$
$$\left.-\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{1-\big(1-\frac{1}{\operatorname{ch} 2\lambda\sigma s}\big)^q}{\big(1-\frac{1}{\operatorname{ch} 2\lambda\sigma s}\big)^q}\right)P\big(\delta^1_{\frac{\pi}{\sigma}}\varphi\big),$$
$$P\big(f - \mathcal{Y}_{\sigma,\Theta_\lambda,\Phi_q} f\big) \leqslant \left(1 + \frac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}\frac{1-\big(1-\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda(2s+1)\sigma}\big)^q}{\big(1-\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda(2s+1)\sigma}\big)^q}\right)P(\varphi).$$

При $q = 1$ следствия 6–8 установлены в [3]. В частности, при $q = 1$ следствия 6 и 7 усиливают неравенства из [12, с. 285, следствие 2 и с. 276, следствие 1].

5.4. Обозначим $x_+ = x$ при $x \geqslant 0$, $x_+ = 0$ при $x < 0$. Пусть $N > 0$, $\beta \geqslant 2$,

$$F_{N\beta}(t) = \int_{-N}^{N}\left(1 - \frac{|y|}{N}\right)^\beta e^{ity}\,dy,$$

$\mathcal{F}_{N\beta} f = f * F_{N\beta}$. Функция $c(F_{N\beta}, y) = \left(1 - \frac{|y|}{N}\right)^\beta_+$ четна и трижды монотонна на $[0, +\infty)$ в смысле замечания 4. Значит, для любого $y_0 > 0$ можно воспользоваться теоремой 3. При $\sigma \geqslant N$ оценка вида (1.2) с константой 1 тривиальна, так как $F_{N\beta} \in \mathbf{E}_N$. Поэтому сформулируем результат при $N > \sigma$.

Следствие 9. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $\sigma, q > 0$, $\beta \geqslant 2$, $N > \sigma$. $\varphi = (I - \mathcal{F}_{N\beta})^q f$. *Тогда*

$$P\big(f - \mathcal{Y}_{\sigma,F_{N\beta},\Phi_q} f\big) \leqslant \left(1 + \frac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}\frac{1-\Big(1-\big(1-\frac{(2s+1)\sigma}{N}\big)^\beta_+\Big)^q}{\Big(1-\big(1-\frac{(2s+1)\sigma}{N}\big)^\beta_+\Big)^q}\right)P(\varphi).$$

5.5. В этом пункте при записи сумм используется логическая нотация: $[A] = 1$, если утверждение A истинно, $[A] = 0$, если A ложно. Через $\varkappa_r$ обозначается четность числа r;

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s(r+1)}}{(2s+1)^{r+1}}$$

– константы Фавара: $I_r \in L(\mathbb{R})$ – непериодический аналог ядра Бернулли, то есть такое ядро, что $c(I_r) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$, $c(I_r, y) = (iy)^{-r}$ при $|y| \geqslant y_0 > 0$. Ясно, что $(-1)^{(r-\varkappa_r)/2} I_r \in \widehat{CM}^1(y_0)$. Если $\sigma \geqslant y_0$, то $\mathcal{K}_{\sigma, I_r} = \mathcal{K}_r \sigma^{-r}$. Это другая запись классического неравенства Ахиезера–Крейна–Фавара [1, п. 101, с. 237–241]

$$P\bigl(f - \mathcal{X}_{\sigma, I_r} f\bigr) \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} P\bigl(f^{(r)}\bigr),$$

получающегося сопоставлением лемм A и B или лемм A и C. Поскольку величина $\mathcal{K}_{\sigma, I_r}$ не зависит от y_0, этот параметр не включается в обозначение ядра I_r.

Пусть $\theta > 0$, $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_\theta^r$ – оператор Стеклова порядка r с шагом θ:

$$\mathcal{S}_\theta^r f = \delta_\theta^r f^{(-r)},$$

где $f^{(-r)}$ означает произвольную r-ю первообразную f. Другими словами, это оператор свертки с ядром $\Psi_{\theta r}$, преобразование Фурье которого выражается формулой $y \mapsto \left(\frac{2}{\theta y} \sin \frac{\theta y}{2}\right)^r$.

В работе [6] изучались операторы вида

$$\mathcal{W} f(x) = \sum_{j \in \mathbb{N},\, i \in \mathbb{Z}} A_{ij} \mathcal{S}_{\lambda_j \theta}^r f(x + \beta_i \theta),$$

где θ, A_{ij}, λ_j, β_i – числовые параметры, удовлетворяющие некоторым условиям, $\sum\limits_{i \in \mathbb{Z},\, j \in \mathbb{N}} |A_{ij}| < +\infty$. Рассмотрим те операторы, ядро которых удовлетворяет условию W1. В качестве Λ выступает какое-либо из ядер I_r, явный вид функции V роли не играет, $y_0 > 0$ произвольно.

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\theta > 0$, $\{A_{\xi\eta}\}_{\xi \in \mathbb{N},\, \eta \in \mathbb{Z}}$ – двойная последовательность,

$$\sum_{\xi \in \mathbb{N},\, \eta \in \mathbb{Z}} |A_{\xi\eta}| < +\infty.$$

При четном r положим

$$\mathcal{W}_{\theta r} f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{N},\, \eta \in \mathbb{Z}} A_{\xi\eta} \mathcal{S}_{\xi\theta}^r f(x - \eta\theta)$$

и будем считать, что $A_{\xi\eta} = A_{\xi,-\eta}$. Здесь и далее запись вида $\xi\theta$ в нижнем индексе у оператора Стеклова означает произведение, а не двойную нумерацию. При нечетном r положим

$$\mathcal{W}_{\theta r} f(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{N},\,\eta\in\mathbb{Z}} A_{\xi\eta} \mathcal{S}^r_{\xi\theta} f\left(x - \left(\eta + \tfrac{1-\varkappa_\xi}{2}\right)\theta\right)$$

и будем считать, что $A_{\xi\eta} = A_{\xi,-\eta}$ при нечетных ξ, $A_{\xi\eta} = A_{\xi,-\eta-1}$ при четных ξ.

Оператор $\mathcal{W}_{\theta r}$ есть оператор свертки. Обозначим его ядро через $W_{\theta r}$, а преобразование Фурье ядра через $w_{\theta r}$. В обоих случаях имеем

$$\mathcal{W}_{\theta r} f = \frac{1}{\theta^r} \mathcal{V}_{\theta r} f^{(-r)},$$

где $\mathcal{V}_{\theta r}$ – сумматорный оператор. Запишем его явное выражение. При четном r

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\theta r} f(x) &= \sum_{\xi\in\mathbb{N},\,\eta\in\mathbb{Z}} \frac{A_{\xi\eta}}{\xi^r} \delta^r_{\xi\theta} f(x - \eta\theta) \\
&= \sum_{\substack{\xi\in\mathbb{N},\,\eta\in\mathbb{Z},\\ l\in[0:r]}} (-1)^l C^l_r \frac{A_{\xi\eta}}{\xi^r} f\Big(x - \eta\theta + \left(\tfrac{r}{2} - l\right)\xi\theta\Big) \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (-1)^\nu B_{r\nu} f(x - \nu\theta), \\
B_{r\nu} &= \sum_{\substack{\xi\in\mathbb{N},\,\eta\in\mathbb{Z},\\ l\in[0:r]}} (-1)^{l+\nu} C^l_r \frac{A_{\xi\eta}}{\xi^r} \Big[\eta + \left(l - \tfrac{r}{2}\right)\xi = \nu\Big].
\end{aligned}$$

При нечетном r

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\theta r} f(x) &= \sum_{\xi\in\mathbb{N},\,\eta\in\mathbb{Z}} \frac{A_{\xi\eta}}{\xi^r} \delta^r_{\xi\theta} f\left(x - \left(\eta + \tfrac{1-\varkappa_\xi}{2}\right)\theta\right) \\
&= \sum_{\substack{\xi\in\mathbb{N},\,\eta\in\mathbb{Z},\\ l\in[0:r]}} (-1)^l C^l_r \frac{A_{\xi\eta}}{\xi^r} f\left(x - \left(\eta + \tfrac{1-\varkappa_\xi}{2}\right)\theta + \left(\tfrac{r}{2} - l\right)\xi\theta\right) \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (-1)^{\nu+1} B_{r\nu} f(x - (\nu + \tfrac{1}{2})\theta), \\
B_{r\nu} &= \sum_{\substack{\xi\in\mathbb{N},\,\eta\in\mathbb{Z},\\ l\in[0:r]}} (-1)^{l+\nu+1} C^l_r \frac{A_{\xi\eta}}{\xi^r} \Big[\left(\eta - \tfrac{\varkappa_\xi}{2}\right) + \left(l - \tfrac{r}{2}\right)\xi = \nu\Big].
\end{aligned}$$

С другой стороны, поскольку

$$\delta_{\xi\theta}^r f(x) = \sum_{\mu\in[0:\xi-1]^r} \delta_\theta^r f\Big(x + \theta \sum_{d=1}^r \Big(\mu_d - \tfrac{\xi-1}{2}\Big)\Big),$$

оператор $\mathcal{V}_{\theta r}$ допускает выделение разностного множителя δ_θ^r:

$$\mathcal{V}_{\theta r} = \delta_\theta^r \mathcal{U}_{\theta r},$$

где

$$\mathcal{U}_{\theta r} f(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (-1)^\nu D_{r\nu} f(x - \nu\theta),$$

при четном r

$$D_{r\nu} = (-1)^\nu \sum_{\substack{\xi\in\mathbb{N},\, \eta\in\mathbb{Z},\\ \mu\in[0:\xi-1]^r}} \frac{A_{\xi\eta}}{\xi^r} \Big[\eta - \sum_{d=1}^r \Big(\mu_d - \tfrac{\xi-1}{2}\Big) = \nu\Big],$$

при нечетном r

$$D_{r\nu} = (-1)^\nu \sum_{\substack{\xi\in\mathbb{N},\, \eta\in\mathbb{Z},\\ \mu\in[0:\xi-1]^r}} \frac{A_{\xi\eta}}{\xi^r} \Big[\eta + \tfrac{1-\varkappa_\xi}{2} - \sum_{d=1}^r \Big(\mu_d - \tfrac{\xi-1}{2}\Big) = \nu\Big].$$

Напомним оценки полунормы сумматорного оператора:

$$N_P\big(\mathcal{V}_{\theta r}^k\big) \leqslant \big\|\mathcal{V}_{\theta r}^k\big\| = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \Bigg| \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{Z}^k\\ \nu_1+\ldots+\nu_k=\mu}} B_{r\nu_1}\ldots B_{r\nu_k} \Bigg| \leqslant \Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |B_{r\nu}|\Big)^k.$$

Аналогичные оценки с заменой $B_{r\nu}$ на $D_{r\nu}$ верны для $N_P\big(\mathcal{U}_{\theta r}^k\big)$. Средние и правые части этих оценок не зависят от θ, поэтому мы будем обозначать нормы без индекса θ: например, $\big\|\mathcal{V}_r\big\|$.

Следствие 10. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $r \in \mathbb{N}$, $\theta, \sigma, q > 0$, $\varphi = (I - \mathcal{W}_{\theta r})^q f$.

1. *Если*

$$\sum_{k=0}^\infty C_{k+q-1}^{q-1} 2^{rk} \big\|\mathcal{U}_r^k\big\| \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma\theta)^{rk}} < +\infty,$$

то

$$P(f - \mathcal{Z}_{\sigma, W_{\theta r}, \Phi_q} f) \leqslant \sum_{k=0}^\infty C_{k+q-1}^{q-1} \big\|\mathcal{U}_r^k\big\| \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma\theta)^{rk}} P(\delta_\theta^{rk}\varphi). \tag{5.1}$$

2. *Если*

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+q-1}^{q-1} \|\mathcal{V}_r^k\| \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma\theta)^{rk}} < +\infty,$$

то

$$P(f - \mathcal{Z}_{\sigma, W_{\theta r}, \Phi_q} f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+q-1}^{q-1} \|\mathcal{V}_r^k\| \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma\theta)^{rk}} \right) P(\varphi). \tag{5.2}$$

Замечание 17. Если $D_{r\nu} \geqslant 0$ при всех $\nu \in \mathbb{Z}$, то $(-1)^{(r-\varkappa_r)/2} B_{r\nu} \geqslant 0$ при всех $\nu \in \mathbb{Z}$ и $\|\mathcal{V}_r\| = 2^r \|\mathcal{U}_r\|$. В этом случае неравенство (5.1) усиливает (5.2).

Следствие 11. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $r \in \mathbb{N}$, $\sigma, q > 0$, $\varphi = \left(I - \mathcal{W}_{\frac{\pi}{\sigma}, r}\right)^q f$.

1. *Если*

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+q-1}^{q-1} 2^{rk} \|\mathcal{U}_r^k\| \frac{\mathcal{K}_{rk}}{\pi^{rk}} < +\infty,$$

то

$$P\left(f - \mathcal{Y}_{\sigma, W_{\frac{\pi}{\sigma}, r}, \Phi_q} f\right) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+q-1}^{q-1} \|\mathcal{U}_r^k\| \frac{\mathcal{K}_{rk}}{\pi^{rk}} P\left(\delta_{\frac{\pi}{\sigma}}^{rk} \varphi\right). \tag{5.3}$$

2. *Если*

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+q-1}^{q-1} \|\mathcal{V}_r^k\| \frac{\mathcal{K}_{rk}}{\pi^{rk}} < +\infty, \tag{5.4}$$

то

$$P\left(f - \mathcal{Y}_{\sigma, W_{\frac{\pi}{\sigma}, r}, \Phi_q} f\right) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+q-1}^{q-1} \|\mathcal{V}_r^k\| \frac{\mathcal{K}_{rk}}{\pi^{rk}} \right) P(\varphi). \tag{5.5}$$

3. *Если* $(-1)^{(r-\varkappa_r)/2} B_{r\nu} \geqslant 0$ *при всех* $\nu \in \mathbb{Z}$, *то условие* (5.4) *выполнено,*

$$P\left(f - \mathcal{Y}_{\sigma, W_{\frac{\pi}{\sigma}, r}, \Phi_q} f\right) \leqslant \left(1 + \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \frac{1 - \left(1 - w_{\frac{\pi}{\sigma}, r}((2s+1)\sigma)\right)^q}{\left(1 - w_{\frac{\pi}{\sigma}, r}((2s+1)\sigma)\right)^q}\right) P(\varphi), \tag{5.6}$$

правые части неравенств (5.5) *и* (5.6) *равны и эти неравенства точны в случаях, указанных в теореме* 2.

Приведем для примера частный случай следствия 4.

Следствие 12. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $r \in \mathbb{N}$, $\sigma, q > 0$, *при некотором* $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{k+q-1}^{q-1} 2^{rk} \|\mathcal{U}_r^k\| \left(\sum_{j=0}^{m-1} 2^j A_{\frac{\pi}{\sigma}, j, I_r^{[k]}} + \left(\frac{\mathcal{K}_{rk}}{\sigma^{rk}} - \sum_{j=0}^{m-1} 2^j A_{\frac{\pi}{\sigma}, j, I_r^{[k]}} \right) \right) < +\infty,$$

$\varphi = \left(I - \mathcal{W}_{\frac{\pi}{\sigma}, r}\right)^q f$. *Тогда*

$$\begin{aligned} P\left(f - \mathcal{Y}_{\sigma, W_{\frac{\pi}{\sigma}, r}, \Phi_q} f\right) \leqslant P(\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} C_{k+q-1}^{q-1} 2^{rk} \|\mathcal{U}_r^k\| \\ \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^j A_{\frac{\pi}{\sigma}, j, I_r^{[k]}} \eta_{rk+j} \left(\varphi, \frac{\pi}{\sigma}\right)_P \right. \\ \left. + \left(\frac{\mathcal{K}_{rk}}{\sigma^{rk}} - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j A_{\frac{\pi}{\sigma}, j, I_r^{[k]}} \right) \eta_\infty \left(\varphi, \frac{\pi}{\sigma}\right)_P \right). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Если $D_{r\nu} \geqslant 0$ при всех $\nu \in \mathbb{Z}$, то неравенство (5.7) усиливает (5.3) и, тем более, по замечанию 17 усиливает (5.4).

Сформулируем отдельно результаты для операторов Стеклова.

Следствие 13. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $r \in \mathbb{N}$, $\sigma, q > 0$, $\theta > \frac{2}{\sigma}$, $\varphi = \left(I - \mathcal{S}_\theta^r\right)^q f$. *Тогда*

$$P\left(f - \mathcal{Z}_{\sigma, \Psi_{\theta r}, \Phi_q} f\right) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+q-1}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma\theta)^{rk}} P\left(\delta_\theta^{rk} \varphi\right).$$

В частности,

$$P\left(f - \mathcal{Y}_{\sigma, \Psi_{\frac{\pi}{\sigma}, r}, \Phi_q} f\right) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+q-1}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{\pi^{rk}} P\left(\delta_{\frac{\pi}{\sigma}}^{rk} \varphi\right), \tag{5.8}$$

$$P\left(f - \mathcal{Y}_{\sigma, \Psi_{\frac{\pi}{\sigma}, r}, \Phi_q} f\right) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+q-1}^{q-1} \frac{2^{rk} \mathcal{K}_{rk}}{\pi^{rk}} \right) P(\varphi). \tag{5.9}$$

Неравенства (5.8) *и* (5.9) *точны в случаях, указанных в теореме* 2.

Замечание 18. Отметим два частных случая неравенства (5.9) при $q = 1$, $r = 1, 2$:

$$P\left(f - \mathcal{Y}_{\sigma, \Psi_{\frac{\pi}{\sigma}, 1}, \Phi_1} f\right) \leqslant (\operatorname{tg} 1 + \sec 1) \cdot P\left(f - \mathcal{S}_{\frac{\pi}{\sigma}}^1 f\right), \tag{5.10}$$

$$P\left(f - \mathcal{Y}_{\sigma, \Psi_{\frac{\pi}{\sigma}, 2}, \Phi_1} f\right) \leqslant \sec 1 \cdot P\left(f - \mathcal{S}_{\frac{\pi}{\sigma}}^2 f\right). \tag{5.11}$$

При выводе неравенств (5.10) и (5.11) надо воспользоваться равенствами

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{K}_k z^k = \operatorname{tg}\frac{\pi z}{2} + \sec\frac{\pi z}{2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{K}_{2k} z^{2k} = \sec\frac{\pi z}{2},$$

верными при $|z| < 1$. Эти разложения обычно записываются с помощью чисел Бернулли и Эйлера [13, формулы 1.411.5, 1.411.9], через которые можно выразить константы Фавара [13, формулы 0.233.5, 0.233.6].

Неравенство (5.10) для наилучших приближений периодических функций с утверждением о его точности содержится в [5, замечание 3]. При $q \in \mathbb{N}$ аналоги оценок (5.1)–(5.3) и (5.5) для полуаддитивных функционалов и, в частности, для наилучших приближений получены в [6, теоремы 2–5 и следствие 4]. В [7, теоремы 1 и 2] при $q = 1$ для оператора

$$\mathcal{W}_{\theta,2,m} = \frac{2}{C_{2m}^m} \sum_{\xi=1}^{m} (-1)^{\xi-1} C_{2m}^{m-\xi} \mathcal{S}_{\xi\theta}^2$$

оценки (5.5) и (5.6) получены линейным методом и доказана их точность. При $m = 1$ оператор $\mathcal{W}_{\theta,2,m}$ совпадает с $\mathcal{S}_\theta^2$, и частным случаем этих оценок является неравенство (5.11).

По сравнению с предшествующими результатами в настоящей работе оценки распространены на нецелые показатели степени и разложения по разностям различных порядков, получены линейными методами, и в ряде случаев установлена точность оценок.

Литература

1. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* М., 1965.
2. О. Л. Виноградов, *Точные неравенства типа Джексона для приближений классов сверток целыми функциями конечной степени.* — Алгебра и анализ **17** (2005), No. 4, 56–111.
3. О. Л. Виноградов, *Точные оценки наилучших приближений через отклонения интегралов типа Вейерштрасса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **401** (2012), 53–70.
4. Б. М. Макаров, М. Г. Голузина, А. А. Лодкин, А. Н. Подкорытов, *Избранные задачи по вещественному анализу.* СПб., 2004.
5. А. Г. Бабенко, Ю. В. Крякин, *Интегральное приближение характеристической функции интервала и неравенство Джексона в $C(\mathbb{T})$.* — Труды ИММ УрО РАН **15 (1)** (2009), 59–65.

6. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Оценки функционалов с известной последовательностью моментов через отклонения средних типа Стеклова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **383** (2010), 5–32.
7. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *корость убывания констант в неравенствах типа Джексона в зависимости от порядка модуля непрерывности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **383** (2010), 33–52.
8. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного.* М., 1960.
9. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения.* М., 1987.
10. И. Ф. Стефенсен, *Теория интерполяции.* М.-Л., 1935.
11. D. V. Widder, *The Laplace Transform.* Princeton, 1946.
12. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Л., 1982.
13. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М., 1963.

Vinogradov O. L. Sharp estimates of best approximations in terms of holomorphic functions of Weierstrass-type operators.

We establish the estimates

$$A_\sigma(f)_P \leqslant KP\big(\Phi(\mathcal{W})f\big),$$

where W is a kernel of special type summable on $\mathbb{R}$, a function Φ is holomorphic in the neighborhood of the spectrum of W, $A_\sigma(f)_P$ is the best approximation of a function f by entire functions of exponential type not greater than σ, with respect to seminorm P. In some cases for the uniform and the integral norm we find the least possible constant K. The estimates are obtained by linear methods of approximation.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: olvin@math.spbu.ru

Поступило 5 мая 2012 г.