Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 403, 2012 г.

Е. М. Рудо

АСИМПТОТИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ НА МНОГОМЕРНЫХ ГРАФАХ ПАСКАЛЯ И НА РЕШЕТКАХ КОРНЕЙ

§1. Введение

В этой работе доказываются асимптотические свойства и устанавливается соответствие между распределениями для случайных блужданий на графах Паскаля и на решетках корней. Первичным объектом исследования является марковская динамика на бесконечном градуированном многомерном графе Паскаля, определяемая как марковская мера на пространстве согласованных с градуировкой траекторий по соседним вершинам графа. Проекция такого процесса соответствует несимметричному случайному блужданию на решетке корней в пространстве на единицу меньшей размерности, понимаемой как полугруппа, порожденная половиной набора образующих группы. Здесь рассматриваются эргодические меры на пространствах бесконечных путей графа Паскаля и полугруппы корней, обладающие свойством центральности, т.е. условной равновероятности возможных начальных отрезков траекторий при условии фиксации их окончания в любом выбранном элементе. В соответствии с теоремой де Финетти (см. [2]) такие процессы характеризуются как согласованные с градуировкой графа или структурой полугруппы однородные случайные блуждания, определяемые вектором переходных вероятностей. Представленные центральные меры также описываются бесконечными сериями испытаний Бернулли (см. [1, 2]).

Ключевые слова: случайные блуждания, энтропия, граф Паскаля, полиномиальное распределение, решетка корней.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-12092-офи-м и Лабораторией им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.

Изучаются предельные свойства случайных блужданий на многомерных графах Паскаля и на решетках корней, отвечающие асимптотике последовательностей зависящих от времени фактор-распределений процессов. Основное внимание в этой работе уделяется исследованию предельного поведения и строения распределений состояний случайных блужданий в возрастающие моменты времени, которое устанавливает для них полиномиальный характер (см. [2]) и новый подход к изучению асимптотики. Также обсуждаются предельные свойства распределений начальных траекторий процессов растущей длины, соответствующие классическим результатам относительно систем Бернулли (см. [1]).

Доказываются асимптотики случайных величин, определяемых вероятностями элементов фактор-пространств, и энтропий проекций рассматриваемых центральных мер. Основные результаты устанавливают нормировку и предельные значения $\frac{d-1}{2}$ и $\frac{d}{2}$ для информационных функций и энтропий распределений состояний случайных блужданий соответственно на d-мерных графах Паскаля и полугруппах корней. Также выводится предельное строение фактор-распределений процессов, характеризующее их асимптотическую равномерность. Схема рассуждений родственна общей концепции математической теории энтропии динамических систем, в частности, теореме Шеннона–Макмиллана–Бреймана (см. [1]) и развитым в работах [3] и [4] подходам к асимптотической теории случайных блужданий на группах, однако не является аналогичной.

Полученные результаты следует рассматривать в общем контексте исследования предельного поведения и энтропии марковских мер на пространствах путей градуированных графов и случайных блужданий на алгебраических объектах.

Автор глубоко благодарна А. М. Вершику за постановку обеих задач и указание на аналогию между ними, а также за внимание к работе.

§2. Асимптотика и энтропия случайных блужданий на многомерных графах Паскаля

Рассматривается d-мерный граф Паскаля PG^d, представленный как множество узлов неотрицательного конуса целочисленной решетки $\mathbf{Z}_+^d$

с набором кратчайших ребер. Вершины такого графа являются d-мерными векторами $\overline{v} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $x_k \in \mathbf{Z}_+$, $k = 1, \dots, d$, и соединены ребрами в том случае, если их координаты отличаются на 1 в одной из позиций. Естественная градуировка графа PG^d задается разбиением множества его вершин на уровни по степени удаленности от нуля, при этом уровень графа с номером n представляет собой симплекс PG^d_n узлов конуса $\mathbf{Z}^d_+$ с суммой координат равной n. Пространство бесконечных путей градуированного графа Паскаля $\Omega(\mathrm{PG}^d) = \{\omega : \omega = (\overline{0} = \overline{v}_0(\omega), \overline{v}_1(\omega), \dots)\}$ образовано последовательностями ω соединенных ребрами вершин, содержащими ровно одну вершину $\overline{v}_n(\omega)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, каждого уровня, и снабжено борелевской σ-алгеброй цилиндрических множеств $\Sigma(\mathrm{PG}^d)$. Мы рассматриваем вероятностную центральную меру $\mu^{\overline{p}}$ на пространстве бесконечных траекторий $(\Omega(\mathrm{PG}^d), \Sigma(\mathrm{PG}^d))$, определяемую вектором $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d)$, $\sum_1^d p_k = 1$, $p_k \geq 0$, $k = 1, \dots, d$, и порожденную однородным случайным блужданием на графе PG^d с начальным состоянием в нулевой вершине и условными вероятностями перехода $p_1, p_2, \dots, p_d$ в d положительных направлениях решетки $\mathbf{Z}^d$. Заданную таким образом марковскую динамику на графе Паскаля можно интерпретировать как бесконечную серию испытаний Бернулли (см. [2]) с d исходами и распределением $\overline{p}$ их вероятностей.

Основным вопросом относительно предельных свойств случайного блуждания на многомерном графе Паскаля для нас является асимптотика распределений состояний процесса в растущие моменты времени. Выделяется последовательность фактор-пространств $(\mathrm{PG}^d_n, \mu^{\overline{p}}_n)$ наборов вершин уровней n графа PG^d с проекциями марковской меры $\mu^{\overline{p}}$, отвечающими вероятностям прохождения траекторий через вершины в моменты n. Фактор-меры $\mu^{\overline{p}}_n$ описываются n-свертками распределения одного шага случайного блуждания $\mu^{\overline{p}}_n = (\mu^{\overline{p}}_1)^{*n}$ и имеют полиномиальный характер с вероятностями элементов $\overline{v}_n = (x^1_n, x^2_n, \dots, x^d_n)$, вычисляемыми по формуле

$$\mu^{\overline{p}}_n(\overline{v}_n) = \mu^{\overline{p}}\left(\omega : \overline{v}_n(\omega) = \overline{v}_n\right) = \frac{n!}{x^1_n! x^2_n! \dots x^d_n!} p_1^{x^1_n} p_2^{x^2_n} \dots p_d^{x^d_n}. \qquad (1)$$

Изучение распределений $(\mathrm{PG}^d_n, \mu^{\overline{p}}_n)$ предполагает рассмотрение случайных величин, соответствующих вероятностям элементов $\overline{v}_n(\omega)$, $\omega \in \Omega(\mathrm{PG}^d)$, уровней n графа Паскаля, и их логарифмов, имеющих

смысл информационных функций (см. [1]):

$$\mathrm{I}_n^{\overline{p}}(\omega) = -\log \mu_n^{\overline{p}}\left(\overline{v}_n(\omega)\right).$$

Исследуется асимптотическое поведение таких случайных величин, характеризующее предельные свойства и строение фактор-мер $\mu_n^{\overline{p}}$ на уровнях графа, а также асимптотику энтропий Шеннона (см. [1]):

$$\mathrm{H}_n^{\overline{p}} = \mathrm{E}_{\mu^{\overline{p}}}\left\{-\log \mu_n^{\overline{p}}\left(\overline{v}_n(\omega)\right)\right\}, \quad n \to \infty.$$

Следующая теорема устанавливает нормировку и предельное поведение информационных функций и энтропий рассматриваемых проекций центральной меры на пространстве путей графа Паскаля PG^d. Результат описывает асимптотические свойства полиномиальных распределений (1), в частности поведение энтропий.

Теорема 1. *Случайное блуждание $\mu^{\overline{p}}$ на d-мерном графе Паскаля с переходными вероятностями $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_d)$, $p_k > 0$, $k = 1, \ldots, d$, и последовательность распределений $\mu_n^{\overline{p}}$ состояний процесса после n шагов определяют следующие предельные соотношения для вероятностей случайных элементов уровней n графа и для энтропий:*

$$\frac{-\log \mu_n^{\overline{p}}\left(\overline{v}_n(\omega)\right)}{\log n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d-1}{2}, \tag{2}$$

где сходимость случайных величин имеет место по распределению, в $\mathbf{L}^q$ при всех $q > 0$ и с вероятностью 1 относительно меры $\mu^{\overline{p}}$;

$$\frac{\mathrm{H}_n^{\overline{p}}}{\log n} = \mathrm{E}_{\mu_n^{\overline{p}}}\left\{\frac{-\log \mu_n^{\overline{p}}(\overline{v}_n)}{\log n}\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d-1}{2}. \tag{3}$$

Доказательство теоремы 1. При исследовании асимптотики информационных функций относительно меры $\mu^{\overline{p}}$ на пространстве траекторий графа PG^d используем интерпретацию распределений вершин уровней n и их координат $\overline{v}_n(\omega) = (x_n^1(\omega), x_n^2(\omega), \ldots, x_n^d(\omega))$ вдоль пути $\omega \in \Omega(\mathrm{PG}^d)$ как схемы Бернулли (см. [2]). Полиномиальные распределения $\mu_n^{\overline{p}}$ состояний $\overline{v}_n(\omega)$ (1), и биномиальные с параметрами p_k, $k = 1, \ldots, d$, распределения координат $x_n^k(\omega)$ вдоль траектории ω совпадают соответственно с последовательностями распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных d-мерных векторов вида $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ и случайных величин со значениями 0

или 1. Согласно предельным теоремам для таких сумм (см. [2]), в частности законам больших чисел и закону повторого логарифма, устанавливаем асимптотические свойства последовательностей распределений вершин и их координат: концентрацию проекций $\mu_n^{\overline{p}}$ на пространствах PG_n^d в окрестности математических ожиданий $\mathrm{E}_{\mu_n^{\overline{p}}}\{\overline{v}_n\} = (np_1, np_2, \dots, np_d)$ и порядок отклонения координат $x_n^k(\omega)$ вершин вдоль $\mu^{\overline{p}}$-почти всех путей $\omega \in \Omega(\mathrm{PG}^d)$ от средних

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_n^k(\omega) - np_k|}{\sqrt{2p_k(1-p_k)n\log\log n}} = 1, \quad k = 1, \dots, d. \tag{4}$$

Вычисляем значения логарифмов вероятностей элементов $\overline{v}_n = \overline{v}_n(\omega)$ вдоль траектории $\omega \in \Omega(\mathrm{PG}^d)$. Из представления (1) распределений $\mu_n^{\overline{p}}$ в соответствии с формулой Стирлинга имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n^{\overline{p}}(\omega) &= -\log \mu_n^{\overline{p}}(\overline{v}_n) = -\log\left(\frac{n!}{x_n^1!x_n^2!\dots x_n^d!} p_1^{x_n^1} p_2^{x_n^2} \dots p_d^{x_n^d}\right) \\
&= -n\log n + n - \frac{1}{2}\log n + \sum_{k=1}^d x_n^k \log x_n^k - \sum_{k=1}^d x_n^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^d \log x_n^k \\
&\quad - \sum_{k=1}^d x_n^k \log p_k + O(1).
\end{aligned}$$

С учетом равенств $\sum_1^d x_n^k(\omega) = \sum_1^d np_k = n$ и с применением формулы Тейлора для функций $\log t$ и $t\log t$ в окрестностях точек $t = np_k$, $k = 1, \dots, d$, получаем разложение для информационных функций:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n^{\overline{p}}(\omega) &= -n\log n - \frac{1}{2}\log n \\
&\quad + \sum_{k=1}^d \left(x_n^k \log(np_k) + x_n^k - np_k + \frac{(x_n^k - np_k)^2}{2\beta_n^k}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^d \left(\log(np_k) + \frac{x_n^k - np_k}{\alpha_n^k}\right) - \sum_{k=1}^d x_n^k \log p_k + O(1) \\
&= \frac{d-1}{2}\log n + \sum_{k=1}^d \frac{(x_n^k - np_k)^2}{2\beta_n^k} + \sum_{k=1}^d \frac{x_n^k - np_k}{2\alpha_n^k} + O(1),
\end{aligned} \tag{5}$$

где случайные значения $\alpha_n^k = \alpha_n^k(\omega)$ и $\beta_n^k(\omega) = \beta_n^k(\omega)$ выбираются из случайных ненаправленных интервалов $(x_n^k(\omega), np_k)$, $k = 1, \dots, d$.

С целью доказать сходимость (2) с вероятностью 1 относительно меры $\mu^{\overline{p}}$ анализируем асимптотику разложения (5) для значений информационных функций вдоль траектории $\omega \in \Omega(\mathrm{PG}^d)$. Применяя закон повторного логарифма (4) к последовательности полиномиальных распределений (1) вершин $\overline{v}_n(\omega)$, получаем при любом выборе $\varepsilon > 0$, что для $\mu^{\overline{p}}$-почти всех путей ω существует такой номер $N_\varepsilon(\omega)$, что при $n > N_\varepsilon(\omega)$ выполнены неравенства на координаты $x_n^k(\omega)$:

$$|x_n^k(\omega) - np_k| < (1+\varepsilon)\sqrt{2p_k(1-p_k)n\log\log n},$$

и на случайные величины $\alpha_n^k(\omega)$ и $\beta_n^k(\omega)$ из интервалов $(x_n^k(\omega), np_k)$:

$$|\alpha_n^k(\omega) - np_k|,\ |\beta_n^k(\omega) - np_k| < (1+\varepsilon)\sqrt{2p_k(1-p_k)n\log\log n},$$

при $k = 1, \ldots, d$. На основании полученных оценок устанавливаем предельное поведение вдоль $\mu^{\overline{p}}$-почти всех траекторий $\omega \in \Omega(\mathrm{PG}^d)$ для слагаемых в разложении (5):

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{x_n^k(\omega) - np_k}{\alpha_n^k(\omega)} = O\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{(x_n^k(\omega) - np_k)^2}{\beta_n^k(\omega)} = O(\log\log n), \quad k = 1, \ldots, d,$$

и для значений логарифмов вероятностей вершин:

$$\frac{\mathrm{I}_n^{\overline{p}}(\omega)}{\log n} = \frac{-\log \mu_n^{\overline{p}}(\overline{v}_n(\omega))}{\log n} = \frac{d-1}{2} + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d-1}{2},$$

т.е. получаем асимптотику (2) информационных функций с вероятностью 1 по мере $\mu^{\overline{p}}$.

Для завершения анализа предельного поведения (2) в теореме 1 достаточно заметить, что сходимость с вероятностью 1 логарифмов вероятностей случайных элементов, нормированных на логарифмы мощностей пространств, в теоремах “типа Шеннона” всегда влечет сходимость по распределению и в $\mathbf{L}^q$ при всех $q > 0$.

В целях полноты изложения мы приводим здесь независимое доказательство асимптотики (2) вероятностей прохождения случайного блуждания $\mu^{\overline{p}}$ через вершины уровней n графа PG^d по распределению и в $\mathbf{L}^q$, $q > 0$.

При доказательстве сходимости по распределению выбираем $\varepsilon > 0$ и оцениваем вероятности отклонений нормированных информационных

функций от предела относительно проекций $\mu_n^{\overline{p}}$. Используем разложение (5) для логарифмов вероятностей элементов $\overline{v}_n$:

$$\mu_n^{\overline{p}}\left(\overline{v}_n : \left|\frac{-\log\mu_n^{\overline{p}}\left(\overline{v}_n\right)}{\log n} - \frac{d-1}{2}\right| > \varepsilon\right)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{d} \mu_n^{\overline{p}}\left(\overline{v}_n : |x_n^k - np_k| > \sqrt{n}\,(\log n)^{1/3}\right)$$
$$+\,\mu_n^{\overline{p}}\left(\overline{v}_n : \begin{array}{l} |x_n^k - np_k| < \sqrt{n}(\log n)^{1/3}, \quad k = 1,\ldots,d, \\ \left|\sum\limits_{k=1}^{d}\left(\frac{(x_n^k - np_k)^2}{2\beta_n^k \log n} + \frac{x_n^k - np_k}{2\alpha_n^k \log n}\right) + o(1)\right| > \varepsilon \end{array}\right). \qquad (6)$$

В этой сумме первое слагаемое стремится к нулю с ростом n по неравенству Чебышева для биномиального распределения координат x_n^k:

$$\mu_n^{\overline{p}}\left(\overline{v}_n : |x_n^k - np_k| > \sqrt{n}(\log n)^{1/3}\right) \leq \frac{p_k(1-p_k)}{(\log n)^{2/3}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad k = 1,\ldots,d.$$

Второе слагаемое представлено вероятностью пересечения двух событий, которые являются несовместными при достаточно больших $n > N_\varepsilon$ (при наступлении первого события сумма под знаком модуля в определении второго события должна иметь порядок $O\left((\log n)^{-1/3}\right)$ и становиться при $n \to \infty$ меньше ε), и, следовательно, равно нулю при таких значениях n. Получаем, что вероятности отклонений (6) стремятся к нулю с ростом n при любом заданном $\varepsilon > 0$, и это эквивалентно асимптотике (2) вероятностей случайных вершин по распределению.

Для вывода сходимости в $\mathbf{L}^q$, $q > 0$, оцениваем соответствующие средние отклонений нормированных информационных функций от предела относительно распределений $\mu_n^{\overline{p}}$. Задаем $\varepsilon > 0$ и разбиваем элементы $\overline{v}_n$ пространств PG_n^d на события трех типов по значениям разностей $\left|\frac{-\log\mu_n^{\overline{p}}\left(\overline{v}_n\right)}{\log n} - \frac{d-1}{2}\right| < \varepsilon$, $\left|\frac{-\log\mu_n^{\overline{p}}\left(\overline{v}_n\right)}{\log n} - \frac{d-1}{2}\right| \in \left(\varepsilon, \max\left\{\frac{d-1}{2}, 2\right\}\right)$,

$\left(\frac{-\log \mu_n^{\overline{p}}(\overline{v}_n)}{\log n} - \frac{d-1}{2}\right) > \max\left\{\frac{d-1}{2}, 2\right\}$, что доставляет оценку тремя слагаемыми:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_{\mu_n^{\overline{p}}}\left|\frac{-\log \mu_n^{\overline{p}}(\overline{v}_n)}{\log n} - \frac{d-1}{2}\right|^q \\
&\le \varepsilon^q \cdot 1 + \max\left\{\frac{d-1}{2}, 2\right\}^q \cdot \mu_n^{\overline{p}}\left(v_n : \left|\frac{-\log \mu_n^{\overline{p}}(\overline{v}_n)}{\log n} - \frac{d-1}{2}\right| > \varepsilon\right) \qquad (7)\\
&+ \sum_{l=2}^{\infty}(l+1)^q \cdot \mu_n^{\overline{p}}\left(\overline{v}_n : \left(\frac{-\log \mu_n^{\overline{p}}(\overline{v}_n)}{\log n} - \frac{d-1}{2}\right) \in (l, l+1)\right).
\end{aligned}$$

Здесь второе слагаемое стремится к нулю с ростом n, согласно сходимости (2) по распределению. При исследовании последнего выражения к каждому слагаемому применяется оценка

$$\mu_n^{\overline{p}}\left(\overline{v}_n : \frac{-\log \mu_n^{\overline{p}}(\overline{v}_n)}{\log n} - \frac{d-1}{2} > l\right) \le n^{1-l-\frac{d-1}{2}}, \quad l = 2, 3, \ldots,$$

которая позволяет установить для бесконечных сумм асимптотику $O\left(\sum\limits_{l=1}^{\infty} l^q n^{-l}\right)$ и сходимость к нулю при $n \to \infty$. Заключаем, что математические ожидания отклонений (7) становятся меньше $3\varepsilon^q$ для любых $\varepsilon > 0$ при достаточно больших $n > N_\varepsilon$ и стремятся к нулю с ростом n, откуда и получаем предел (2) в $\mathbf{L}^q$, $q > 0$, для нормированных информационных функций.

Отмечаем, что асимптотика (2) вероятностей состояний случайного блуждания $\mu^{\overline{p}}$ в $\mathbf{L}^1$ влечет сходимость (3) нормированных энтропий распределений на уровнях графа PG^d, и это завершает доказательство теоремы 1. □

Предлагаемое следствие из теоремы 1 описывает асимптотику строения распределений состояний случайного блуждания на графе Паскаля PG^{d} в растущие моменты времени. Для рассматриваемых проекций устанавливается свойство асимптотической равномерной распределенности на множествах типичных элементов уровней графа и характеризуются такие множества, имеющие относительно малую мощность и почти полную вероятность. Утверждение относится к предельным структурным свойствам полиномиальных распределений (1).

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *имеет место следующее предельное поведение проекций* $\mu_n^{\overline{p}}$, *описывающее их близость к равномерным распределениям на множествах типичных вершин уровней*

графа Паскаля:

$$\mu_n^{\overline{p}}\left(\overline{v}_n : n^{-\frac{d-1}{2}-\varepsilon} < \mu_n^{\overline{p}}(\overline{v}_n) < n^{-\frac{d-1}{2}+\varepsilon}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1, \quad \varepsilon > 0. \tag{8}$$

В качестве наборов типичных и асимптотически равновероятных состояний уровней n графа возможно рассматривать множества вершин $\overline{v}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^d)$, удовлетворяющих асимптотике

$$\left|x_n^k - np_k\right| < \sqrt{n} f(n), \quad k = 1, \ldots, d, \tag{9}$$

для заданной функции $f(n)$ с порядком роста $\mathrm{const} \ll f(n) \ll (\log n)^{1/2}$.

Доказательство следствия 1. Асимптотическая равномерная распределенность (8) следует из сходимости по распределению (2) нормированных информационных функций в теореме 1.

С целью характеризации удовлетворяющих асимптотике (8) подмножеств уровней графа PG^d следуем рассуждениям из доказательства теоремы 1. Воспользовавшись биномиальным характером распределений координат вершин $\overline{v}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^d)$ уровней n графа и центральной предельной теоремой для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин (см. [2]), для любой функции с порядком роста $f(n) \gg \mathrm{const}$ получаем

$$\mu_n^{\overline{p}}\left(\overline{v}_n : \left|x_n^k - np_k\right| < \sqrt{n}\ f(n),\ k = 1, \ldots, d\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Из разложения (5) для информационных функций выводим, что в случае $f(n) \ll (\log n)^{1/2}$ все вершины $\overline{v}_n$ рассматриваемых множеств (9) удовлетворяют равномерной асимптотике

$$\frac{\mathrm{I}_n^{\overline{p}}(\overline{v}_n)}{\log n} = \frac{-\log \mu_n^{\overline{p}}(\overline{v}_n)}{\log n} = \frac{d-1}{2} + O\left(\frac{f(n)^2}{\log n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d-1}{2},$$

и при достаточно больших n выполнены неравенства

$$n^{-\frac{d-1}{2}-\varepsilon} < \mu_n^{\overline{p}}(\overline{v}_n) < n^{-\frac{d-1}{2}+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Заключаем, что последовательности наборов вершин (9) удовлетворяют условиям типичности и асимптотической равновероятности элементов (8), и это завершает доказательство следствия 1. □

Замечание. Установленные в теореме 1 предельные значения (2) и (3) для нормированных информационных функций и энтропий распределений состояний случайного блуждания $\mu^{\overline{p}}$ на d-мерном графе Паскаля не зависят от вектора переходных вероятностей $\overline{p}$ и демонстрируют

определенное свойство универсальности обсуждаемого класса марковских динамик на графе PG^d. Легко видеть, что центральные меры на пространстве бесконечных путей $\Omega(\mathrm{PG}^d)$, отвечающие конечным выпуклым комбинациям $\alpha_1\mu^{\overline{p}_1}+\alpha_2\mu^{\overline{p}_2}+\dots+\alpha_m\mu^{\overline{p}_m}$ эргодических марковских мер $\mu^{\overline{p}_1}$, $\mu^{\overline{p}_2},\dots,\mu^{\overline{p}_m}$ с векторами переходных вероятностей $\overline{p}_1,\overline{p}_2,\dots,\overline{p}_m$, также удовлетворяют асимптотикам (2) и (3).

Дополнительным аспектом асимптотики марковской меры на пространстве путей многомерного графа Паскаля является предельное поведение распределений начальных траекторий процесса растущей длины. Строится последовательность фактор-пространств $(\mathrm{PG}^d_{1,\dots,n},\mu^{\overline{p}}_{1,\dots,n})$ связных цепочек вершин уровней с 0 по n графа PG^d с проекциями случайного блуждания $\mu^{\overline{p}}$, описывающими вероятности прохождения процесса по таким цепочкам в течение n шагов. Фактор-меры $\mu^{\overline{p}}_{1,\dots,n}$ соответствуют прямым произведениям распределений одного шага случайного блуждания $\mu^{\overline{p}}_{1,\dots,n}=(\mu^{\overline{p}}_1)^n$ с вероятностями траекторий $(\overline{v}_0,\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_n)\in\mathrm{PG}^d_{1,\dots,n}$, вычисляемыми в зависимости от конечных вершин $\overline{v}_n=(x_1,x_2,\dots,x_d)$ по формуле

$$\begin{aligned}\mu^{\overline{p}}_{1,\dots,n}(\overline{v}_0,\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_n)&=\mu^{\overline{p}}\,(\omega:\overline{v}_m(\omega)=\overline{v}_m,\ m=1,\dots,n)\\&=p_1^{x_1}p_2^{x_2}\dots p_d^{x_d}.\end{aligned}$$

Следующее предложение устанавливает асимптотику рассматриваемых проекций центральной меры на пространстве путей графа Паскаля PG^d. Рассуждение соответствует классическим результатам относительно энтропии системы Бернулли (см. [1]).

Предложение 1. *Для случайного блуждания $\mu^{\overline{p}}$ на d-мерном графе Паскаля с вероятностями переходов $\overline{p}=(p_1,p_2,\dots,p_d)$, $p_k>0$, $k=1,\dots,d$, имеют место следующие предельные свойства последовательности распределений $\mu^{\overline{p}}_{1,\dots,n}$ начальных траекторий процесса за n шагов, описывающие асимптотику вероятностей случайных траекторий и поведение энтропий:*

$$\frac{-\log\mu^{\overline{p}}_{1,\dots,n}\,(\overline{v}_0(\omega),\overline{v}_1(\omega),\dots,\overline{v}_n(\omega))}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathrm{H}(p_1,p_2,\dots,p_d),$$

$$\mathrm{H}(p_1,p_2,\dots,p_d)=-p_1\log p_1-p_2\log p_2-\dots-p_d\log p_d,$$

где сходимость понимается в указанных в теореме 1 *смыслах;*

$$\frac{\mathrm{H}^{\overline{p}}_{1,\dots,n}}{n} = \mathrm{E}_{\mu^{\overline{p}}_{1,\dots,n}} \left\{ \frac{-\log \mu^{\overline{p}}_{1,\dots,n}(\overline{v}_0, \overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n)}{n} \right\} = \mathrm{H}(p_1, p_2, \dots, p_d);$$

а также свойство асимптотической равновероятности типичных состояний

$$\mu^{\overline{p}}_{1,\dots,n} \left(\begin{array}{l} (\overline{v}_0, \dots, \overline{v}_n) : e^{-n(\mathrm{H}(p_1,\dots,p_d)+\varepsilon)} < \\ \mu^{\overline{p}}_{1,\dots,n}(\overline{v}_0, \dots, \overline{v}_n) < e^{-n(\mathrm{H}(p_1,\dots,p_d)-\varepsilon)} \end{array} \right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

§3. Асимптотика и энтропия случайных блужданий на решетках корней

Здесь рассматривается d-мерная решетка корней RL^d, построенная как конечно порожденная подгруппа в $\mathbf{R}^d$ с системой $d+1$ образующих векторов и обратных к ним $\{\overline{g}_1, \dots, \overline{g}_{d+1}; -\overline{g}_1, \dots, -\overline{g}_{d+1}\} \subset \mathbf{R}^d$, связанных соотношениями коммутирования и линейной зависимости

$$\overline{g}_1 + \overline{g}_2 + \dots + \overline{g}_{d+1} = \overline{0}. \tag{10}$$

При этом выделяется полугруппа RS^d линейных комбинаций образующих $\overline{g}_1, \overline{g}_2, \dots, \overline{g}_{d+1}$ с неотрицательными целыми коэффициентами:

$$\mathrm{RS}^d = \left\{ \begin{array}{c} \overline{v}^{\mathrm{rs}} : \overline{v}^{\mathrm{rs}} = y^1 \overline{g}_1 + \dots + y^{d+1} \overline{g}_{d+1} \in \mathbf{R}^d, \\ y^1, \dots, y^{d+1} \in \mathbf{Z}_+ \end{array} \right\} \Bigg|_{\overline{g}_1 + \dots + \overline{g}_{d+1} = \overline{0}}.$$

В условиях линейной зависимости (10) образующих и их обратных множества элементов таких группы и полугруппы совпадают, что позволяет обсуждать случайные блуждания на решетке корней RL^d и на полугруппе RS^d в едином контексте. Мы рассматриваем несимметричное случайное блуждание по элементам группы RL^d или полугруппы RS^d с начальным состоянием в $\overline{0}$-узле решетки и вектором $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{d+1})$, $\sum_1^{d+1} p_k = 1$, $p_k \geq 0$, $k = 1, \dots, d+1$, условных вероятностей перехода в отличающиеся прибавлением образующих $\overline{g}_1, \overline{g}_2, \dots, \overline{g}_{d+1}$ элементы. Удобно представлять такой процесс

как однородное случайное блуждание на графе Кэли полугруппы корней RS^d в образующих $\{\overline{g}_1, \overline{g}_2, \dots, \overline{g}_{d+1}\}$. Построенное случайное блуждание определяет вероятностную марковскую меру $\mu^{\mathrm{rs},\overline{p}}$ на пространстве бесконечных согласованных со структурой полугруппы траекторий $\Omega(\mathrm{RS}^d) = \left\{\omega^{\mathrm{rs}} : \omega^{\mathrm{rs}} = (\overline{0} = \overline{v}_0(\omega^{\mathrm{rs}}), \overline{v}_1(\omega^{\mathrm{rs}}), \dots)\right\}$.

Мы устанавливаем аналогию между случайными блужданиями на решетках корней и на графах Паскаля. Полугруппа корней RS^d и решетка RL^d в $\mathbf{R}^d$ с системой $d+1$ образующих могут рассматриваться как проекция $(d+1)$-мерного графа Паскаля PG^{d+1} на гиперплоскость, перпендикулярную главной диагонали неотрицательного конуса $\mathbf{R}_+^{d+1}$. Такое построение доставляет соответствие между элементами пространств бесконечных траекторий $\Omega(\mathrm{RS}^d)$ полугруппы корней и $\Omega(\mathrm{PG}^{\mathrm{d}+1})$ графа Паскаля, взаимная однозначность которого определяется следующим свойством полугруппы корней RS^d с единственным соотношением (10): любой элемент полугруппы имеет не более одного представления в виде суммы n коммутирующих образующих при всех n. Очевидна эквивалентность марковских мер $\mu^{\mathrm{rs},\overline{p}}$ и $\mu^{\overline{p}}$ на этих пространствах, порожденных однородными с вектором переходных вероятностей $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{d+1})$ случайными блужданиями на полугруппе RS^d и на графе PG^{d+1} соответственно, а также последовательностей их фактор-распределений начальных траекторий и состояний в растущие моменты времени. Тождественность распределений случайных блужданий на $(d+1)$-мерном графе Паскаля PG^{d+1} и на d-мерной полугруппе корней RS^d позволяет проинтерпретировать схему рассуждений и асимптотические результаты §2 в рассматриваемом контексте.

Предлагаемые теорема и следствие описывают предельное поведение информационных функций и энтропий, а также асимптотику строения распределений состояний случайного блуждания на полугруппе корней RS^d в растущие моменты времени. Результаты являются аналогами теоремы 1 и следствия 1.

Теорема 2. *Для случайного блуждания $\mu^{\mathrm{rs},\overline{p}}$ на полугруппе корней в $\mathbf{R}^d$ с вероятностями прибавления образующих $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{d+1})$, $p_k > 0$, $k = 1, \dots, d+1$, и последовательности распределений $\mu_n^{\mathrm{rs},\overline{p}}$ состояний процесса после n шагов выполнены следующие асимптотики*

вероятностей случайных элементов решетки и энтропий:

$$\frac{-\log \mu_n^{\mathrm{rs},\overline{p}}\left(\overline{v}_n(\omega^{\mathrm{rs}})\right)}{\log n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d}{2},$$

где сходимость случайных величин понимается по распределению, в $\mathbf{L}^q$ *при всех* $q>0$ *и с вероятностью* 1 *относительно меры* $\mu^{\mathrm{rs},\overline{p}}$*;*

$$\frac{\mathrm{H}_n^{\mathrm{rs},\overline{p}}}{\log n} = \mathrm{E}_{\mu_n^{\mathrm{rs},\overline{p}}}\left\{\frac{-\log \mu_n^{\mathrm{rs},\overline{p}}(\overline{v}_n^{\mathrm{rs}})}{\log n}\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d}{2}.$$

Следствие 2. *В условиях теоремы* 2 *имеет место следующее свойство асимптотической равномерной распределенности проекций* $\mu_n^{\mathrm{rs},\overline{p}}$ *на множествах типичных элементов полугруппы корней:*

$$\mu_n^{\mathrm{rs},\overline{p}}\left(\overline{v}_n^{\mathrm{rs}} : n^{-\frac{d}{2}-\varepsilon} < \mu_n^{\mathrm{rs},\overline{p}}(\overline{v}_n^{\mathrm{rs}}) < n^{-\frac{d}{2}+\varepsilon}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1, \quad \varepsilon>0.$$

Наборами типичных и равновероятных в пределе состояний можно считать множества узлов решетки $v_n^{\mathrm{rs}} = x_n^1\overline{g}_1 + x_n^2\overline{g}_2 + \dots + x_n^{d+1}\overline{g}_{d+1}$, $\sum_1^{d+1} x_n^k = n$, *удовлетворяющих условиям*

$$\left|x_n^k - np_k\right| < \sqrt{n}f(n), \quad k=1,\dots,d+1,$$

для заданной функции $f(n)$, *такой, что* $\mathrm{const} \ll f(n) \ll (\log n)^{1/2}$.

Следующее предложение устанавливает асимптотические свойства распределений начальных траекторий растущей длины случайного блуждания на полугруппе корней RS^d. Утверждение интерпретирует предложение 1 и результаты относительно систем Бернулли.

Предложение 2. *Для случайного блуждания* $\mu^{\mathrm{rs},\overline{p}}$ *на полугруппе корней в* $\mathbf{R}^d$ *с переходными вероятностями* $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{d+1})$, $p_k > 0$, $k = 1,\dots,d+1$, *выполнены следующие предельные соотношения для последовательности распределений* $\mu_{1,\dots,n}^{\mathrm{rs},\overline{p}}$ *начальных траекторий процесса за* n *шагов, характеризующие асимптотику вероятностей случайных траекторий и поведение энтропий:*

$$\frac{-\log \mu_{1,\dots,n}^{\mathrm{rs},\overline{p}}\left(\overline{v}_0(\omega^{\mathrm{rs}}), \overline{v}_1(\omega^{\mathrm{rs}}), \dots, \overline{v}_n(\omega^{\mathrm{rs}})\right)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{H}(p_1, p_2, \dots, p_{d+1}),$$

где имеют место перечисленные в теореме 2 *варианты сходимости;*

$$\frac{\mathrm{H}_{1,\dots,n}^{\mathrm{rs},\overline{p}}}{n} = \mathrm{E}_{\mu_{1,\dots,n}^{\mathrm{rs},\overline{p}}}\left\{\frac{-\log \mu_{1,\dots,n}^{\mathrm{rs},\overline{p}}(\overline{v}_0^{\mathrm{rs}}, \overline{v}_1^{\mathrm{rs}}, \dots, \overline{v}_n^{\mathrm{rs}})}{n}\right\} = \mathrm{H}(p_1, p_2, \dots, p_{d+1});$$

а также свойство асимптотической равномерности на типичных состояниях:

$$\mu^{\mathrm{rs},\overline{p}}_{1,\dots,n}\left(\begin{array}{l}(\overline{v}^{\mathrm{rs}}_0,\dots,\overline{v}^{\mathrm{rs}}_n) : e^{-n(\mathrm{H}(p_1,\dots,p_{d+1})+\varepsilon)} < \\ \\ \mu^{\mathrm{rs},\overline{p}}_{1,\dots,n}(\overline{v}^{\mathrm{rs}}_0,\dots,\overline{v}^{\mathrm{rs}}_n) < e^{-n(\mathrm{H}(p_1,\dots,p_{d+1})-\varepsilon)}\end{array}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Литература

1. Н. Мартин, Дж. Ингленд, *Математическая теория энтропии.* Мир, М., 1988.
2. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Мир, М., 1967.
3. V. A. Kaimanovich, A. M. Vershik, *Random walks on discrete groups: boundary and entropy.* — Ann. Prob. **11**, No. 3 (1983), 457–490.
4. А. М. Вершик, *Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры.* — Успехи мат. наук **55**, вып. 4 (2000), 59–128.

Rudo E. M. Asymptotics of distributions of random walks on multidimensional Pascal graphs and on root lattices.

A correspondence is established between random walks on Pascal graphs and on root lattices and Bernoulli schemes. Asymptotics of entropies and of random element probabilities are derived, also limiting structural properties are described for the sequences of state and trajectory distributions of the processes.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: elena.rudo@gmail.com

Поступило 9 октября 2012 г.