Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 403, 2012 г.

А. Осиненко

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ УНИТАРНО-СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЕ

§0. Введение

Группа $\mathrm{Sp}\,(\infty)$, элементами которой являются бесконечные унитарно-симплектические матрицы $S = [S_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots$, для которых $S_{ij} = \delta_{ij}$ для достаточно большого $i + j$, наряду с бесконечными унитарными и симметрическими группами является примером "большой" группы. Согласно идее, развиваемой в работах [5, 6], основной задачей гармонического анализа на такой группе является разложение наиболее "естественных" унитарных представлений этой группы на неприводимые.

Пусть $G = \mathrm{Sp}\,(\infty) \times \mathrm{Sp}\,(\infty)$, K – диагональная подгруппа в G, изоморфная $\mathrm{Sp}\,(\infty)$. Тогда (G, K) является парой Гельфанда. В работе [3] было построено семейство T_z представлений, зависящее от комплексного параметра z, удовлетворяющего условию $\mathrm{Re}\, z > -\frac{1}{4}$. Для любого такого z представление T_z может быть представлено в виде прямого интеграла без кратностей от неприводимых сферических (т.е. обладающих выделенным циклическим K-инвариантным вектором) представлений группы G, которые параметризуются точками множества Ω, определяемого в разделе 1. Таким образом, класс эквивалентности представления T_z полностью определяется классом эквивалентности мер на Ω. Последний называется спектральным типом представления T_z.

Спектральный тип представления T_z существенно зависит от того, является ли z целым. В настоящей работе разобран случай целого z. В этом случае представление T_z разлагается в прямую сумму подпредставлений T_{pq}, которые мы называем его блоками. В работе показано, что спектральный тип представления T_z определяется набором мер

Ключевые слова: некоммутативный гармонический анализ, характеры, спектральные меры, многомерные многочлены Якоби.

Работа поддержана грантом RFBR-CNRS 10-01-93114 и Фондом поддержки молодых ученых "Конкурс Мёбиуса".

на конечномерных гранях $\Omega(p;q) \subset \Omega$, определенных в разделе 1. Аналогичный результат для симметрической и унитарной группы был получен в работах [6] и [8] соответственно.

§1. Характеры и граф Γ

В этом разделе мы сформулируем некоторые утверждения, касающиеся характеров произвольных топологических групп и бесконечномерной унитарно-симплектической группы в частности. Доказательства утверждений из разделов 1 и 2 можно найти в [4, 5] и приведенных там ссылках.

Определение 1. Пусть K – топологическая группа. Характером этой группы будем называть непрерывную комплекснозначную функцию χ на K, удовлетворяющую следующим трем условиям:

(1) χ центральна, т.е. постоянна на классах сопряженности группы K;

(2) χ положительно определена, т.е. для любого конечного числа элементов $g_1, \ldots, g_n$ группы K матрица $[\chi(g_j^{-1}g_i)]_{1\le i,j\le n}$ эрмитова и неотрицательна;

(3) $\chi(e) = 1$, где e – единичный элемент группы K.

Множество всех характеров группы K обозначим через $\mathfrak{X}(K)$. Очевидно, что $\mathfrak{X}(K)$ является выпуклым множеством. Экстремальные точки этого множества называются экстремальными характерами.

Обозначим через $\mathrm{Sp}\,(N)$ компактную форму комплексной симплектической группы $Sp(2N,\mathbb{C})$: $\mathrm{Sp}\,(N) = Sp(2N,\mathbb{C}) \cap U(2N)$. В данной работе в качестве K будет выступать бесконечномерная унитарно-симплектическая группа $\mathrm{Sp}\,(\infty) = \cup_{N\ge 1}\mathrm{Sp}\,(N)$, являющаяся индуктивным пределом унитарно-симплектических групп $\mathrm{Sp}\,(N)$, где $\mathrm{Sp}\,(N)$ естественным образом вложена в $\mathrm{Sp}\,(N+1)$. Таким образом, $\mathrm{Sp}\,(\infty)$ есть группа бесконечных унитарно-симплектических матриц $S = [S_{ij}]$, $i,j = 1,2,\ldots$, у которых лишь конечное число элементов S_{ij} отлично от δ_{ij}. Снабдим $\mathrm{Sp}\,(\infty)$ топологией индуктивного предела. В этой топологии $\mathrm{Sp}\,(\infty)$ не является локально компактной группой.

Обозначим через $\mathbb{R}^\infty$ произведение счетного числа копий $\mathbb{R}$ и положим

$$\mathbb{R}^{2\infty+1} = \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}.$$

Обозначим через $\Omega \subset \mathbb{R}^{2\infty+1}$ подмножество таких троек

$$\omega = (\alpha, \beta, \delta),$$

что

$$\alpha = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \ldots \geq 0) \in \mathbb{R}^\infty,$$

$$\beta = (\beta_1 \geq \beta_2 \ldots \geq 0) \in \mathbb{R}^\infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i + \beta_i) \leq \delta.$$

Теорема 1.1. *Существует взаимно однозначное соответствие* $\omega \leftrightarrow \chi^{(\omega)}$ *между* Ω *и множеством экстремальных характеров группы* $\mathrm{Sp}\,(\infty)$.

Теорема 1.2. *Для любого характера* χ *группы* $\mathrm{Sp}\,(\infty)$ *существует и единственна вероятностная мера* P *на топологическом пространстве* Ω, *такая, что*

$$\chi(S) = \int\limits_{\Omega} \chi^{(\omega)}(S) P(d\omega), \quad S \in \mathrm{Sp}\,(\infty).$$

Мера P называется спектральной мерой характера χ.

Пусть p, q – целые числа. Обозначим через $\Omega(p;q) \subset \Omega$ подмножество тех $\omega \in \Omega$, для которых

$$\alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = \ldots = 0, \quad \beta_{q+1} = \beta_{q+2} = \ldots = 0, \quad \delta = \sum(\alpha_i + \beta_i).$$

Размерность множества $\Omega(p;q)$ равна $p+q$. В дальнейшем будет показано, что спектральный тип представлений T_z, определяемых далее, при целом z определяется набором мер на множествах $\Omega(p;p+z)$, где $p \geq 0$ – целое число.

Неприводимые представления группы $\mathrm{Sp}\,(N)$ параметризуются упорядоченными наборами из N неотрицательных целых чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N \geq 0$, которые называются неотрицательными сигнатурами. При этом N называется длиной сигнатуры λ. Множество неотрицательных сигнатур длины N обозначим через Γ_N. Введем градуированный граф $\Gamma = \sqcup_{N=0}^{\infty}\Gamma_N$. Две вершины $\lambda \in \Gamma_N$ и $\nu \in \Gamma_{N+1}$ соединены ребром, если существует такая вершина $\mu \in \Gamma_{N+1}$, что $\lambda \prec \mu$ и $\mu \prec \nu \cup \{0\}$, т.е. выполнены соотношения перемежаемости:

$$\mu_1 \geq \lambda_1 \geq \mu_2 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \mu_N \geq \lambda_N \geq \mu_{N+1},$$
$$\nu_1 \geq \mu_1 \geq \nu_2 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_N \geq \nu_{N+1} \geq \mu_{N+1} \geq 0.$$

В этом случае мы будем писать $\lambda \sqsubset \nu$ или $\nu \sqsupset \lambda$. При этом мы считаем, что $\mathbb{GT}_0$ состоит из одного элемента, обозначаемого через $\varnothing$, и что этот элемент соединен ребром со всеми $\lambda \in \mathbb{GT}_1$.

Граф Γ естественным образом возникает в правиле ветвления для неприводимых характеров симплектических групп:

$$\chi^{\nu}|_{\mathrm{Sp}\,(N)} = \sum_{\lambda:\ \lambda\sqsubset\nu} \chi^{\lambda}\cdot \#\{\mu : \lambda \prec \mu\cup\{0\}, \mu\prec\nu\}, \tag{1}$$

где χ^{λ} – характер того неприводимого представления группы $\mathrm{Sp}\,(N)$, которое отвечает сигнатуре λ. Размерность этого представления вычисляется по следующей формуле:

$$\begin{aligned}\mathrm{Dim}_{\mathrm{Sp}\,(N)}\,\lambda = \prod_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i+N-i+1}{N-i+1}\\ \times\prod_{1\le i<j\le N}\frac{(\lambda_i-\lambda_j+j-i)(\lambda_i+\lambda_j+2N+2-i-j)}{(j-i)(2N+2-i-j)}.\end{aligned} \tag{2}$$

Для любых двух неотрицательных сигнатур $\lambda\in\Gamma_N$ и $\nu\in\Gamma_{N+1}$ положим

$$q(\lambda,\nu) = \begin{cases}\frac{\mathrm{Dim}_{\mathrm{Sp}\,(N)}\,\lambda}{\mathrm{Dim}_{\mathrm{Sp}\,(N+1)}\,\nu}\#\{\mu:\lambda\prec\mu,\mu\prec\nu\cup\{0\}\}, & \lambda\sqsubset\nu,\\ 0, & \lambda\not\sqsubset\nu.\end{cases}$$

При этом мы считаем, что $q(\varnothing,\lambda)=1$ для любой сигнатуры $\lambda\in\mathbb{GT}_1$. Числа $q(\nu,\lambda)$ называются копереходными вероятностями графа Γ. Из (1) и (2) следует, что

$$\sum_{\lambda\in\Gamma_N} q(\lambda,\nu)=1 \ \text{ для любой } \nu\in\Gamma_{N+1}.$$

Предположим, что для каждого $N=0,1,\dots$ задана вероятностная мера P_N на дискретном множестве Γ_N. Семейство $\{P_N\}$ называется когерентной системой мер, если

$$P_N(\lambda) = \sum_{\nu\in\Gamma_{N+1}} q(\lambda,\nu)P_{N+1}(\nu), \quad N=0,1,\dots,\lambda\in\Gamma_N.$$

Теорема 1.3. *Существует взаимно однозначное соответствие $\chi\leftrightarrow\{P_N\}$ между характерами группы $\mathrm{Sp}\,(\infty)$ и когерентными системами мер на графе Γ. Это соответствие задается соотношением*

$$\chi_N = \sum_{\lambda\in\Gamma_N} P_N(\lambda)\tilde{\chi}^{\lambda}, \quad \chi_N=\chi|_{\mathrm{Sp}\,(N)}, \quad N=1,2,\dots,$$

где $\tilde{\chi}^{\lambda}(u)=\frac{\chi^{\lambda}(u)}{\chi^{\lambda}(e)}$ – нормированный характер.

Будем рассматривать сигнатуру λ и как диаграмму Юнга. Обозначим через $d(\lambda)$ количество клеток на её диагонали и введем модифицированные координаты Фробениуса:

$$\bar{p}_i(\lambda) = \lambda_i - i + \frac{1}{2}, \quad \bar{q}_i(\lambda) = \lambda'_i - i + \frac{1}{2}, \quad i = 1, \dots, d(\lambda),$$

где λ' – транспонированная к λ диаграмма. Положим

$$\bar{p}_i(\lambda) = \bar{q}_i(\lambda) = 0, \quad i = d(\lambda) + 1, d(\lambda) + 2, \dots.$$

Для любого $N = 1, 2, \dots$ вложим множество Γ_N в Ω следующим образом:

$$\Gamma_N \ni \lambda \mapsto \omega = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}) \in \Omega,$$
$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{p}_i(\lambda)}{N}, \quad \bar{\beta} = \frac{\bar{q}_i(\lambda)}{N} \ (i = 1, 2, \dots), \quad \bar{\delta}^{\pm} = \frac{|\lambda|}{N},$$

где $|\lambda| = \sum\limits_i \lambda_i$. Данное вложение обозначим через $\bar{\imath}_N$.

Теорема 1.4. *Пусть χ – произвольный характер группы $\mathrm{Sp}\,(\infty)$, P – его спектральная мера и $\{P_N\}$ – когерентная система, соответствующая χ. Тогда образы мер P_N при вложении $\bar{\imath}_N$ слабо сходятся к мере P.*

Пусть $G = \mathrm{Sp}\,(\infty) \times \mathrm{Sp}\,(\infty)$, K – диагональная подгруппа в G, канонически изоморфная $\mathrm{Sp}\,(\infty)$, и T – унитарное представление группы G в некотором гильбертовом пространстве H. Вектор $\xi \in H$ называется циклическим, если линейная оболочка всех векторов $T(g)\xi$, $g \in G$, плотна в H. Если вектор ξ является циклическим, инвариантным относительно действия подгруппы K и $\|\xi\| = 1$, то пара (T, ξ) называется сферическим представлением. При этом вектор ξ называется сферическим вектором.

Обозначим через Φ множество всех непрерывных функций на G, являющихся положительно определенными, K-биинвариантными и нормированными в единице e группы G. Такие функции называются сферическими функциями. Если (T, ξ) – сферическое представление пары (G, K), то матричный коэффициент

$$\varphi(g) = (T(g)\xi, \xi), \quad g \in G,$$

соответствующий сферическому вектору, является сферической функцией. Отображение $(T, \xi) \mapsto \varphi$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности сферических представлений и сферическими функциями. При этом экстремальным сферическим функциям соответствуют неприводимые сферические представления.

Между множеством характеров $\mathfrak{X}(K) = \mathfrak{X}(\mathrm{Sp}\,(\infty))$ и множеством сферических функций Φ также существует взаимно однозначное соответствие, заданное следующим образом:

$$\chi(S) = \varphi(S, 1), \quad \varphi(S_1, S_2) = \chi(S_1 S_2^{-1}), \quad S, S_1, S_2 \in \mathrm{Sp}\,(\infty).$$

При этом биекция $\chi \leftrightarrow \varphi$ является также изоморфизмом выпуклых множеств. Таким образом, экстремальным характерам соответствуют экстремальные сферические функции.

Так как (G, K) является парой Гельфанда, для любого неприводимого унитарного представления T группы G пространство K-инвариантных векторов имеет размерность 0 или 1. Значит, если T обладает ненулевым K-инвариантным вектором ξ, то ξ единствен с точностью до умножения на число. При этом ξ автоматически является циклическим, так как представление T неприводимо и $\xi \neq 0$. Таким образом, выбирая $\|\xi\| = 1$, получаем сферическое представление (T, ξ). Неединственность выбора вектора ξ заключается только в возможности его умножения на число, по модулю равное 1, что не влияет на сферическую функцию $\varphi(g) = (T(g)\xi, \xi)$. Из всего вышесказанного следует, что неприводимые сферические представления пары (G, K) параметризуются точками $\omega \in \Omega$.

§2. Представления T_z, коммутант и разложение на блоки

В работе [3] было построено семейство сферических представлений T_z пары (G, K), зависящее от комплексного параметра z, такого, что $\mathrm{Re}\, z > -\frac{1}{4}$. Пусть μ_N – мера Хаара на $\mathrm{Sp}\,(N)$. Представление T_z является индуктивным пределом бирегулярных представлений групп $G(N) = \mathrm{Sp}\,(N) \times \mathrm{Sp}\,(N)$ в пространствах $H^N = L^2(\mathrm{Sp}\,(N), \mu_N)$,

$$(\mathrm{Reg}^N(g)f)(S) = f(S_2^{-1} S S_1), \quad f \in H^N,$$

$$S \in \mathrm{Sp}\,(N), \quad g = (S_1, S_2) \in G(N),$$

при некоторых изометрических вложениях $L_z^N : H^{N-1} \to H^N$, точная формула для которых нам не понадобится. При этом представление T_z обладает выделенным K-инвариантным вектором ξ_0, лежащим в H^N при любом натуральном N, и имеет место следующее равенство:

$$\xi_0 = \sum_{\lambda \in \Gamma_N} a_{z;N}(\lambda)\xi_\lambda,$$

где

$$\begin{aligned} a_{z;N}(\lambda) &= C_{z;N} \prod_{1 \le i < j \le N} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)(\lambda_i + \lambda_j + 2N - i - j) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{N} \frac{\Gamma(z+i)(\lambda_i + N - i + 1)}{\Gamma(z - \lambda_i + i)\Gamma(2N + 2 + z + \lambda_i - i)}, \qquad (3) \\ C_{z;N} &= \prod_{i=1}^{N} \sqrt{\frac{2^N \Gamma^2(z + i + \frac{1}{2})\Gamma(2z + N + i + 1)}{\Gamma(i)\Gamma(i + \frac{1}{2})\Gamma(2z + i + \frac{1}{2})}}, \end{aligned}$$

а ξ_λ – вектор из H^N, соответствующий характеру χ^λ. Отсюда легко выводится, что когерентное семейство мер, соответствующее характеру представления T_z, задается формулой $P_N(\lambda|z) = |a_{z;N}(\lambda)|^2$.

Замечание 2.1. Повторяя рассуждения работы [2], можно показать, что представления T_z дизъюнктны при различных нецелых z, удовлетворяющих условиям $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{4}$ и $\operatorname{Im} z \ge 0$. Пользуясь теоремами 3.8 и 4.1, можно показать, что представления T_z дизъюнктны при всех различных z, удовлетворяющих этим двум условиям.

Замечание 2.2. Доказательства утверждений, приводимых далее в этом разделе и начале следующего, можно найти в работе [6].

Пусть $P_N : H \to H^N$ – ортопроектор на H^N, $H(\lambda) \subset H^N$ – пространство представления группы $\pi^\lambda \times (\pi^\lambda)^*$ ($= \pi^\lambda \times \pi^\lambda$, поскольку представления группы $\mathrm{Sp}\,(N)$ самодвойственны) и $P(\lambda) : H \to H(\lambda)$ – ортопроектор на $H(\lambda)$. Проекторы $P(\lambda)$, $\lambda \in \Gamma_N$, попарно ортогональны, и их сумма равна P_N. Обозначим через $\mathcal{A}$ коммутант представления T_z, т.е. алгебру всех ограниченных операторов в H, коммутирующих с представлением T_z.

Для любой пары сигнатур $\lambda \in \Gamma_N$ и $\nu \in \Gamma_{N+1}$ положим

$$p_z(\lambda, \nu) = \frac{|a_z(\nu)|^2}{|a_z(\lambda)|^2} q(\lambda, \nu).$$

Тогда

$$\sum_{\nu \sqsupset \lambda} p_z(\lambda, \nu) = 1 \quad \text{для любой} \quad \lambda \in \Gamma_N.$$

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}$ пространство всех ограниченных комплекснозначных функций $A(\lambda)$ на множестве вершин графа $\Gamma \backslash \{\varnothing\}$, удовлетворяющих условию

$$A(\lambda) = \sum_{\nu \succ \lambda} p_z(\lambda, \nu) A(\nu) \quad \text{для всех } \varnothing \neq \lambda \in \Gamma. \tag{4}$$

Тогда $\widetilde{\mathcal{A}}$ – банахово пространство с нормой $\|A\| = \sup_\lambda |A(\lambda)|$.

Предложение 2.3. *Коммутант $\mathcal{A}$ представления T_z как банахово пространство с обычной операторной нормой изометричен пространству $\widetilde{\mathcal{A}}$. Если $A(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ – функция, соответствующая оператору $A \in \mathcal{A}$, то для всех N*

$$P_N A P_N = \sum_{\lambda \in \Gamma_N} A(\lambda) P(\lambda).$$

Для пары неотрицательных целых чисел $(p; q)$ определим подмножество

$$\Gamma(p; q) = \{\lambda \in \Gamma \mid \lambda_p \geq q,\ \lambda_{p+1} < q + 1\} \subset \Gamma,$$

где λ_0 полагается равным бесконечности. Таким образом, в $\Gamma(p; q)$ лежат только те сигнатуры, для которых, во-первых, соответствующие диаграммы Юнга не содержат клетку $(p+1, q+1)$, а во-вторых, эти диаграммы содержат клетку (p, q) или $p = 0$. Ясно, что $\Gamma(p; q)$ является связным подграфом в графе Γ. Далее, пусть A_{pq} – характеристическая функция множества $\Gamma(p; q)$.

Теорема 2.4. *Пусть $q - p = k \geq 0$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) *Функция $A_{pq}(\cdot)$ удовлетворяет соотношению (4) для $z = k$. Следовательно, она определяет оператор A_{pq} в коммутанте представления T_k.*

2) *Оператор A_{pq} является ортогональным проектором на некоторое подпространство $H_{pq} \subset H$. Подпространства H_{pq} попарно*

ортогональны, и их прямая сумма есть все пространство H. Таким образом, они определяют разложение представления T_k в прямую сумму подпредставлений:

$$T_k = \bigoplus_{q-p=k,\, p\geq 0} T_{pq}.$$

3) *Обозначим через Reg^N_{pq}, где N достаточно велико, подпредставление регулярного представления Reg^N, которое является объединением тех компонент $\pi^\lambda \times \pi^\lambda$, для которых $\lambda \in \Gamma(p;q)$. Пусть H^N_{pq} – соответствующее подпространство в H^N. Тогда изометрическое вложение $L^N_k : H^N \to H^{N+1}$ отображает H^N_{pq} в H^{N+1}_{pq}, и представление $T_{pq} \subset T_k$ совпадает с индуктивным пределом представлений Reg^N_{pq}.*

§3. Построение вектора v_{pq}

Повторяя рассуждения работы [6], можно показать, что для произвольного z пространство V_z K-инвариантных векторов изоморфно пространству $\mathcal{F}_z$ функций на Γ, удовлетворяющих условию псевдогармоничности и условию типа Харди, причем в случае целого z этот изоморфизм хорошо согласован с разложением представления T_z на блоки, полученным в разделе 2. В этом разделе с помощью этого изоморфизма мы построим K-инвариантный вектор v_{pq} в каждом из блоков T_{pq}. В разделе 4 будет доказана цикличность этих векторов.

Предложение 3.1. *Для любых $N \geq 1$, $\lambda \in \Gamma_N$ и $\nu \in \Gamma_{N+1}$*

$$(\xi_\lambda, \xi_\nu) = \begin{cases} \frac{a_z(\nu)}{a_z(\lambda)} \cdot q(\lambda,\nu), & \lambda \prec \nu, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следствие 3.2. *Для любых $N \geq 1$, $\lambda \in \Gamma_N$ и $\nu \in \Gamma_{N+1}$*

$$(\xi_\nu, \xi_\lambda) = C_{z;N,N+1} \frac{\Gamma(z+N+1) \prod_{i=1}^{N} \Gamma(z-\lambda_i+i)\Gamma(2N+2+z+\lambda_i-i)}{\prod_{i=1}^{N+1} \Gamma(z-\nu_i+i)\Gamma(2N+4+z+\nu_i-i)} \times (2N+1)!\sharp\{\mu : \lambda \prec \mu, \mu \prec \nu \cup 0\},$$

где

$$C_{z;N,N+1} = \frac{C_{z;N+1}}{C_{z;N}} = \sqrt{\frac{2\Gamma(2z+2N+3)\Gamma(2z+2N+2)\Gamma^2(N+z+\frac{3}{2})}{\Gamma(N+\frac{3}{2})\Gamma(N+1)\Gamma(2z+N+2)\Gamma(2z+N+\frac{3}{2})}}.$$

Замечание 3.3. Целые числа $z-\lambda_i+i$ и $z-\nu_i+i$ могут быть неположительными, и тогда соответствующие гамма-функции обращаются в бесконечность. Так как $\lambda \sqsubset \nu$, мы имеем $z-\lambda_i+i \geq z-\nu_i+i$ при любом $1 \leq i \leq N$. Поэтому отношение $\frac{\Gamma(z-\lambda_i+i)}{\Gamma(z-\nu_i+i)}$ может быть корректно определено. Также мы полагаем $\frac{1}{\Gamma(z-\nu_{N+1}+N+1)}$ равным 0, если $z-\nu_{N+1}+N+1 \leq 0$.

Определение 2. Обозначим через $\mathcal{F}_z$ пространство комплекснозначных функций $f(\lambda)$ на вершинах $\lambda \neq \varnothing$ графа Γ, удовлетворяющих следующим двум свойствам.

(1) Псевдогармоничность: для всех $\lambda \in \Gamma_N$ выполнено соотношение

$$f(\lambda) = \sum_{\nu \sqsupset \lambda} f(\nu)(\xi_\nu, \xi_\lambda). \tag{5}$$

(2) Условие типа Харди: для любого $N = 1, 2, \ldots$

$$\|f\|^2 := \sup_N \sum_{\lambda \in \Gamma_N} |f(\lambda)|^2 < \infty.$$

На самом деле верно, что для всякой псевдогармонической функции сумма $\sum\limits_{\lambda \in \Gamma_N} |f(\lambda)|^2$ не убывает при $N \to \infty$, поэтому

$$\|f\|^2 := \lim_{N\to\infty} \sum_{\lambda \in \Gamma_N} |f(\lambda)|^2.$$

Предложение 3.4. *Отображение*

$$v \mapsto f_v, \quad f_v(\lambda) = (v, \xi_\lambda),$$

является линейным сохраняющим норму изоморфизмом пространства V_z K-инвариантных векторов представления T_z и пространства $\mathcal{F}_z$.

Обозначим через $V_{pq} = V \cap H_{pq}$ пространство всех K-инвариантных векторов в блоке H_{pq} и через $\mathcal{F}_{pq}$ подпространство $\mathcal{F}_{kl}$ функций, носитель которых содержится в $\Gamma(p,q)$. Разложение

$$\mathcal{F}_{kl} = \bigoplus_{q-p=k,\, p\geq 0} \mathcal{F}_{pq}$$

согласовано с разложением

$$V_k = \bigoplus_{q-p=k,\, p\geq 0} V_{pq}.$$

Таким образом, задача построения циклического вектора в блоке H_{pq} сводится к задаче построения псевдогармонической функции f_{pq} на $\Gamma(p;q)$, удовлетворяющей условию Харди.

Зафиксируем p, q, такие, что $q \geq p \geq 0$. Для сигнатуры $\lambda \in \Gamma(p;q) \cap \Gamma_N$ определим $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ следующим образом:

$$\lambda^{(1)} = (\lambda_1 - q, \ldots, \lambda_p - q, 0, \ldots, 0),$$
$$\lambda^{(2)} = (\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_N),$$

где количество нулей в формуле для $\lambda^{(1)}$ равно $N + q - p$.

Заметим, что если $\lambda \sqsubset \nu$, то $\lambda^i \sqsubset \nu^i$, $i = 1, 2$, и для любых функций g_1 и g_2 выполнено равенство

$$\sum_{\nu \sqsupset \lambda} g_1(\nu^1) g_2(\nu^2) = \left(\sum_{\nu^1 \sqsupseteq \lambda^1} g_1(\nu^1) \right) \left(\sum_{\nu^2 \sqsupset \lambda^2} g_2(\nu^2) \right), \tag{6}$$

где $\nu \sqsupseteq \lambda$ означает, что $\nu \sqsupset \lambda$ и ν имеет столько же ненулевых компонент, сколько λ.

Будем искать функцию f_{pq} в виде

$$f_{pq}(\lambda) = D_N f_{pq}^{(1)}(\lambda^{(1)}) f_{pq}^{(2)}(\lambda^{(2)}), \quad \lambda \in \Gamma(p;q) \cap \Gamma_N.$$

Прямое вычисление показывает, что если $\lambda \in \Gamma(p;q) \cap \Gamma_N$ и $\nu \in \Gamma(p;q) \cap \Gamma_{N+1}$, то

$$(\xi_\nu, \xi_\lambda)_{z;N} = (\xi_{\nu^{(2)}}, \xi_{\lambda^{(2)}})_{q;N-p} \cdot (\xi_{\nu^{(1)}}, \xi_{\lambda^{(1)}})_{-p;N+q} / C(N;p,q), \tag{7}$$

где $C(N;p,q)$ – константа, зависящая только от N, p и q, но не от λ и ν. Ее точное значение нам не понадобится, важно лишь то, что

$$C(N;p,q) = 1 + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad \text{при } N \to \infty. \tag{8}$$

С учетом (7) и (6) имеем

$$\sum_{\nu\sqsupset\lambda} f_{pq}(\nu)(\xi_\nu,\xi_\lambda) = \frac{D_{N+1}}{C(N;p,q)} \sum_{\nu^{(2)}\sqsupset\lambda^{(2)}} f_{pq}^{(2)}(\nu^{(2)})(\xi_{\nu^{(2)}},\xi_{\lambda^{(2)}})_{q;N-p} \times \sum_{\nu^{(1)}\sqsupseteq\lambda^{(1)}} f_{pq}^{(1)}(\nu^{(1)})(\xi_{\nu^{(1)}},\xi_{\lambda^{(1)}})_{-p;N+q}.$$

Значит, если D_N, $f_{pq}^{(1)}$ и $f_{pq}^{(2)}$ выбраны так, что

$$\frac{D_{N+1}}{D_N} = C(N;p,q), \tag{9}$$

$$\sum_{\nu^{(2)}\sqsupset\lambda^{(2)}} f_{pq}^{(2)}(\nu^{(2)})(\xi_{\nu^{(2)}},\xi_{\lambda^{(2)}})_{q;N-p} = f_{pq}^{(2)}(\lambda^{(2)}), \tag{10}$$

$$\sum_{\nu^{(1)}\sqsupseteq\lambda^{(1)}} f_{pq}^{(1)}(\nu^{(1)})(\xi_{\nu^{(1)}},\xi_{\lambda^{(1)}})_{-p;N+q} = f_{pq}^{(1)}(\lambda^{(1)}), \tag{11}$$

то

$$\sum_{\nu\sqsupset\lambda} f_{pq}(\nu)(\xi_\nu,\xi_\lambda) = f_{pq}(\lambda),$$

то есть функция f_{pq} удовлетворяет условию псевдогармоничности.

Поскольку выделеный вектор ξ_0 лежит в H^N при всех N и является K-инвариантным, функция $a_z(\lambda) = (\xi_0, \xi_l a)_{z;N}$ лежит в $\mathcal{F}_z$. Кроме того, для фиксированной сигнатуры $\lambda \in \Gamma(p;q) \cap \Gamma_N$

$$a_z(\lambda) = (z-q+p)^p \tilde{a}_z(\lambda), \tag{12}$$

где $\tilde{a}_{q-p}(\lambda) \neq 0$. Таким образом, $a_q \in \mathcal{F}_{0q}$. Значит, выбирая

$$f_{pq}^{(2)}(\lambda^{(2)}) := a_q(\lambda^{(2)}),$$

получаем, что выполнено равенство (10) и, кроме того,

$$\sum_{\lambda^{(2)}\in\Gamma_{N-p}} |f_{pq}^{(2)}(\lambda^{(2)})|^2 = 1.$$

Из условий (9) и (8) следует, что

$$\lim_{N\to\infty} D_N < \infty.$$

Так как

$$\sum_{\lambda\in\Gamma(p;q)\cap\Gamma_N}|f_{pq}(\lambda)|^2 = D_N^2\left(\sum_{\lambda^{(1)}\in\Gamma(p;0)\cap\Gamma_{N+q}}|f_{pq}^{(1)}(\lambda^{(1)})|^2\right)$$
$$\times\left(\sum_{\lambda^{(2)}\in\Gamma(0;q)\cap\Gamma_{N-p}}|f_{pq}^{(2)}(\lambda^{(2)})|^2\right),$$

для завершения построения функции f_{pq} остается построить функцию $f_{pq}^{(1)}$, удовлетворяющую условию (11), такую, что

$$\sup_N\left(\sum_{\lambda^{(1)}\in\Gamma(p;0)\cap\Gamma_{N+q}}|f_{pq}^{(1)}(\lambda^{(1)})|^2\right)<\infty. \tag{13}$$

Рассмотрим функцию

$$a_{-p;N}(\lambda) = (-1)^{|\lambda|}\prod_{1\le i<j\le p}(\lambda_i-\lambda_j+j-i)(\lambda_i+\lambda_j+2N-i-j+2)$$
$$\times\prod_{i=1}^{p}\sqrt{\frac{(2N-2p-2i+1)!!(N-p-i+1)!}{(2N-2i+1)!!(N-i)!}}. \tag{14}$$

Замечание 3.5. Функция $a_{z;N}$ была определена ранее равенством (3) только при $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{4}$. Однако, переходя к пределу при $z\to -p$ в выражении (3), мы получаем функцию $a_{-p;N}$, определенную выше, и поэтому сохраняем для нее обозначение $a_{z;N}$.

Лемма 3.6. *Функция $a_{-p;N}$ удовлетворяет условию*

$$a_{-p;N}(\lambda) = \sum_{\nu\sqsupseteq\lambda} a_{-p;N+1}(\nu)(\xi_\nu,\xi_\lambda)_{-p;N}, \tag{15}$$

где $N\ge 2p$, $\lambda\in\Gamma(p;0)\cap\Gamma_N$ и $\nu\in\Gamma(p;0)\cap\Gamma_{N+1}$.

Доказательство. Следует из результатов работы [7]. □

Как видно из формулы (14), функция $a_{-p;N}(\lambda)$ не удовлетворяет условию (13), но с её помощью можно построить необходимую нам функцию $f_{pq}^{(1)}$. Для $\lambda\in\Gamma(p;0)\cap\Gamma_N$ рассмотрим сигнатуру λ^{*p}, получаемую из λ добавлением p нулевых компонент. Таким образом,

$\lambda^{*p} \in \Gamma(p;0) \cap \Gamma_{N+p}$. Запишем условие (15), взяв λ^{*p} вместо λ:

$$a_{-p;N+p}(\lambda^{*p}) = \sum_{\mu \sqsupseteq \lambda^{*p}} a_{-p;N+p+1}(\mu)(\xi_\mu, \xi_{\lambda^{*p}})_{-p;N+p} = (*).$$

Так как все участвующие в предыдущем равенстве сигнатуры имеют не более p ненулевых компонент,

$$(*) = \sum_{\nu \sqsupseteq \lambda} a_{-p;N+p+1}(\nu^{*p})(\xi_{\nu^{*p}}, \xi_{\lambda^{*p}})_{-p;N+p}.$$

Далее, нетрудно видеть, что

$$(\xi_{\nu^{*p}}, \xi_{\lambda^{*p}})_{-p;N+p} = (\xi_\nu, \xi_\lambda)_{-p;N} \frac{g_{N+1;p}(\nu)}{g_{N;p}(\lambda)},$$

где

$$g_{N;p}(\lambda) = G(N;p) \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{(2N+2-p+\lambda_i - i)^{\uparrow 2p}}, \tag{16}$$

$$G(N;p) = \sqrt{N^{\downarrow p} \prod_{i=1}^{p} (2N-2p-2i+1)^{\uparrow(4p-1)}}, \tag{17}$$

а

$$x^{\uparrow n} = x(x+1)\dots(x+n-1), \quad x^{\downarrow n} = x(x-1)\dots(x-n+1).$$

Значит,

$$a_{-p;N+p}(\lambda^{*p}) = \sum_{\nu \sqsupseteq \lambda} a_{-p;N+p+1}(\nu^{*p})(\xi_\nu, \xi_\lambda)_{-p;N} \frac{g_{N+1;p}(\nu)}{g_{N;p}(\lambda)}.$$

Таким образом, функция

$$f_{pq}^{(1)}(\lambda) = a_{-p;N+p}(\lambda^{*p}) g_{N;p}(\lambda)$$

удовлетворяет условию (11).

Лемма 3.7.

$$\sup_N \left(\sum_{\lambda \in \Gamma(p;0) \cap \Gamma_{N+q}} |f_{pq}^{(1)}(\lambda)|^2 \right) < \infty.$$

Доказательство. Оценим $|f_{pq}^{(1)}(\lambda)|$:

$$
\begin{aligned}
|f_{pq}^{(1)}(\lambda)| &= G(N;p)\frac{|a_{-p;N+p}(\lambda^{*p})|}{\prod\limits_{i=1}^{p}(2N+2-p+\lambda_i-i)^{\uparrow 2p}} \\
&\le \frac{C_1 N^{p^2+\frac{p}{2}} \prod\limits_{1\le i<j\le p}(\lambda_i-\lambda_j+j-i)(\lambda_i+\lambda_j+2(N+p+1)-i-j)}{\prod\limits_{i=1}^{p}(2N+2-p+\lambda_i-i)^{\uparrow 2p}} \\
&\le \frac{C_2 N^{p^2+\frac{p}{2}} \prod\limits_{i=1}^{p}(\lambda_i+N)^{2p-2i}}{\prod\limits_{i=1}^{p}(\lambda_i+2N)^{2p}} \le \frac{C_2 N^{p^2+\frac{p}{2}}}{N^{1+3+\ldots+2p-1}\prod\limits_{i=1}^{p}(\lambda_i+2N)} \\
&= \frac{N^{\frac{p}{2}}}{\prod\limits_{i=1}^{p}(\lambda_i+2N)}.
\end{aligned}
$$

Значит,

$$
\sum_{\lambda\in\Gamma(p;0)\cap\Gamma_{N+q}} |f_{pq}^{(1)}(\lambda)|^2 \le \prod_{i=1}^{p}\left(\sum_{\lambda_i=0}^{\infty}\frac{N}{(\lambda_i+2N)^2}\right) \le 1.
$$

□

Теорема 3.8. *Пусть $q-p=z$, $p\ge 0$. Тогда в пространстве H_{pq} существует такой K-инвариантный вектор, что соответствующая ему функция $f_{pq}(\lambda)=f_{v_{pq}}(\lambda)$ в пространстве $\mathcal{F}_{pq}$ функций на $\Gamma(p;q)$ равна*

$$
f_{pq}(\lambda) = D_N f_{pq}^{(1)}(\lambda^{(1)}) f_{pq}^{(2)}(\lambda^{(2)}),
$$

где D_N, $f_{pq}^{(1)}$ и $f_{pq}^{(2)}$ были определены выше.

Пусть $\varphi_{pq}(g)$ – сферическая функция на группе G, соответствующая вектору v_{pq},

$$
\varphi_{pq}(g) = \frac{(T_z(g)v_{pq}, v_{pq})}{\|v_{pq}\|^2} = \frac{(T_{pq}(g)v_{pq}, v_{pq})}{\|v_{pq}\|^2},
$$

и σ_{pq} – спектральная мера на Ω, соответствующая функции φ_{pq}.

Тогда носителем меры σ_{pq} является множество $\Omega(p,q)$, и эта мера с точностью до константы, зависящей только от p и q, имеет

плотность

$$\frac{\prod\limits_{1\le i<j\le p}(\alpha_i+\alpha_j+2)^2(\alpha_i-\alpha_j)^2\prod\limits_{1\le k<l\le q}(\beta_k-\beta_l)^2(2-\beta_k-\beta_l)^2\prod\limits_{k=1}^{q}(1-\beta_k)^2}{\prod\limits_{i=1}^{p}(2+\alpha_i)^{4p}}$$

относительно меры Лебега на $\Omega(p,q)$.

Доказательство. Первая часть теоремы следует из уже доказанного выше. Докажем вторую часть. Для сигнатуры $\lambda\in\Gamma(p;q)$ положим

$$a_1=\lambda_1^{(1)},\dots,a_p=\lambda_p^{(1)};\quad \alpha_i=\frac{a_i}{N};$$

$$b_1=(\lambda^{(2)})'_1,\dots,b_q=(\lambda^{(2)})'_q;\quad \beta_i=\frac{b_i}{N};$$

$$\imath_N(\lambda)=(\alpha_1,\dots,\alpha_p,0,0,\dots;\beta_1,\dots,\beta_q,0,0,\dots)\in\Omega(p;q).$$

Рассмотрим следующее семейство мер на $\Gamma(p;q)\cap\Gamma_N$:

$$\overline{M}_{pq}^{(N)}(\lambda)=\frac{|f_{pq}(\lambda)|^2}{\sum|f_{pq}(\lambda)|^2}.$$

Меры $\imath_N(\overline{M}_{pq}^{(N)})$ на $\Omega(p;q)$, являющиеся образами мер $\overline{M}_{pq}^{(N)}$ при отображениях $\imath_N$, равномерно плотны, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует такой компакт K, что $\imath_N(\overline{M}_{pq}^{(N)})(K)>1-\varepsilon$ для достаточно большого N. Доказательство этого факта мы опускаем, поскольку оно аналогично доказательству леммы 4.4, приведенному в разделе 5. Далее, нетрудно видеть, что

$$\left(f_{pq}^{(1)}(\lambda^{(1)})\right)^2=C_1\frac{\prod\limits_{1\le i<j\le p}(\alpha_i-\alpha_j)^2(\alpha_i+\alpha_j+2)^2}{\prod\limits_{i=1}^{p}(2+\alpha_i)^{4p}}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)N^{-p},$$

$$\left(f_{pq}^{(2)}(\lambda^{(2)})\right)^2=C_2\left(\prod_{1\le k<l\le q}(\beta_k-\beta_l)^2(2-\beta_k-\beta_l)^2\right)$$
$$\times\prod_{k=1}^{q}(1-\beta_k)^2\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)N^{-q}.$$

Здесь $O(1/N)$ равномерно по λ, где $\imath_N(\lambda)\in K$. Перемножая эти выражения и учитывая то, что D_N имеет предел, размерность множества $\Omega(p;q)$ равна $p+q$ и меры $\imath_N(\overline{M}_{pq}^{(N)})$ равномерно плотны, получаем, что

меры $\imath_N(\overline{M}_{pq}^{(N)})$ на $\Omega(p;q)$ слабо сходятся при $N \to \infty$ к вероятностной мере, имеющей плотность относительно меры Лебега на $\Omega(p;q)$, формула для которой приведена в формулировке теоремы. Доказательство того факта, что спектральная мера σ_{pq} совпадает со слабым пределом мер $\imath_N(\overline{M}_{pq}^{(N)})$, полностью аналогично соответствующему доказательству в [8]. □

§4. Цикличность вектора v_{pq}

Зафиксируем p и q, такие, что $q-p=z$. В этом разделе мы докажем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Вектор v_{pq}, построенный ранее, является циклическим вектором представления T_{pq}.*

Обозначим через $\mathcal{A}_{pq}^{+}$ подмножество неотрицательных эрмитовых операторов в $\mathcal{A}_{pq}$, где $\mathcal{A}_{pq}$ – коммутант представления T_{pq}. Образ этого подмножества при изоморфизме $\mathcal{A}_{pq} \to \widetilde{\mathcal{A}}_{pq}$ содержится в множестве $\widetilde{\mathcal{A}}_{pq}^{+} \subset \widetilde{\mathcal{A}}_{pq}$ функций с неотрицательными значениями, где $\widetilde{\mathcal{A}}_{pq} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$ – множество функций из $\widetilde{\mathcal{A}}$ (т.е. удовлетворяющих условию (4)), равных нулю вне множества $\Gamma(p;q)$. Обозначим через $\lambda_{\min}$ сигнатуру длины p, у который все компоненты равны q.

Лемма 4.2. *Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{A}}_{pq}^{+}$ и $A(\lambda_{\min})=0$. Тогда $A \equiv 0$.*

Доказательство. Заметим, что из соотношения

$$A(\lambda) = \sum_{\nu \sqsupset \lambda} A(\nu) p_z(\lambda,\nu)$$

и неотрицательности функций $A(\cdot)$ и $p_z(\cdot,\cdot)$ следует, что если $A(\lambda)=0$, то $A(\nu)=0$ для всех $\nu \sqsupset \lambda$. Значит, в этом случае $A(\nu)=0$ для всех ν, для которых существует путь из λ в ν. Но все вершины из $\Gamma_{2p}(p;q)$ обладают этим свойством. Таким образом, $A(\nu)=0$ для всех $\nu \in \Gamma_{2p}(p;q)$. Пользуясь опять основным соотношением для функции A, получаем требуемое утверждение. □

Определим функцию $\mathfrak{M}_{pq}(\lambda)$ на графе $\Gamma(p;q)$ рекуррентным соотношением

$$\mathfrak{M}_{pq}(\nu) = \sum_{\lambda:\lambda \sqsubset \nu} \mathfrak{M}_{pq}(\lambda) p_z(\lambda,\nu)$$

с начальным условием

$$\mathfrak{M}_{pq}(\lambda_{\min}) = 1.$$

Лемма 4.3. *Для функции $\mathfrak{M}_{pq}(\lambda)$ имеет место следующая явная формула:*

$$\mathfrak{M}_{pq}(\lambda) = C(p,q)\frac{V^2(\{a_i - i\})V^2(\{b_k - k\})\prod\limits_{i=1}^{p}(2N-2p+1-i)^{\uparrow(2p+1-i)}}{\prod\limits_{i=1}^{p}(a_i+2N-2p-i+1)^{\uparrow(2q+p+1)}\prod\limits_{i=1}^{q-p}(2N+2i)^{\uparrow(2q-2p+1)}}$$
$$\times\frac{\prod\limits_{1\le i<j\le p}(2(N+q+1)-i-j+a_i+a_j)\prod\limits_{1\le k\le l\le q}(2(N-p)+k+l-b_k-b_l)^2}{\prod\limits_{i=1}^{p}\prod\limits_{k=1}^{q}(a_i+b_k+p-i+q-k+1)(2N+a_i-b_k+q-p+k-i-1)},$$

где $C(p,q)$ – некоторая константа, зависящая только от p и q.

Доказательство. Функция $\mathfrak{M}_{pq}(\lambda)$ удовлетворяет соотношению

$$\mathfrak{M}_{pq}(\nu) = \sum_{\lambda\sqsubset\nu}\mathfrak{M}_{pq}(\lambda)\left|\frac{a_z(\nu)}{a_z(\lambda)}\right|^2 q(\lambda,\nu).$$

Положим

$$\mathfrak{M}'_{pq}(\lambda) = \frac{\mathfrak{M}_{pq}(\lambda)}{|\tilde{a}_z(\lambda)|^2}\prod_{1\le i<j\le N}\frac{(\lambda_i-\lambda_j+j-i)(\lambda_i+\lambda_j+2N-i-j)}{(j-i)(2N-i-j)}. \quad (18)$$

Для этой новой функции имеем более простое рекуррентное соотношение:

$$\mathfrak{M}'_{pq}(\nu) = \sum_{\lambda\sqsubset\nu}\mathfrak{M}'_{pq}(\lambda)\{\mu : \lambda\prec\mu\cup\{0\},\ \mu\prec\nu\} = \sum_{\mu\prec\nu}\sum_{\lambda\prec\mu\cup\{0\}}\mathfrak{M}'_{pq}(\lambda).$$

Значит,

$$\mathfrak{M}'_{pq}(\lambda) = \mathrm{const}\cdot\mathrm{Dim}(\lambda_{\min},\lambda), \quad (19)$$

где $\mathrm{Dim}(\lambda_{\min},\lambda)$ обозначает количество путей из $\lambda_{\min}$ в λ. Очевидно, что

$$\mathrm{Dim}(\lambda_{\min},\lambda) = \mathrm{Dim}_{2(N-p)}\,\lambda^{(1)}\,\mathrm{Dim}_{Sp(N-p)}\,\lambda^{(2)}. \quad (20)$$

Утверждение леммы непосредственно вытекает из равенств (18), (19) и (20). □

В дальнейшем нам понадобятся три технические леммы, доказательство которых будет дано ниже.

Лемма 4.4. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $E > 0$, что*

$$\sum_{\lambda\in\Gamma_N(p;q):\ a_1>EN} \mathfrak{M}_{pq}(\lambda) \le \varepsilon$$

для всех достаточно больших N.

Лемма 4.5. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что*

$$\sum_{\lambda\in\Gamma_N(p;q):\ a_p+b_q\le\delta N} \mathfrak{M}_{pq}(\lambda) \le \varepsilon$$

для всех достаточно больших N.

Лемма 4.6. *Функция*

$$G_{pq} = C(p,q)\frac{V^2(\{\alpha_i\})V^2(\{\beta_k\})\prod\limits_{1\le i<j\le p}(2+\alpha_i+\alpha_j)\prod\limits_{1\le k\le l\le q}(2-\beta_k-\beta_l)^2}{\prod\limits_{i=1}^{p}\prod\limits_{k=1}^{q}(\alpha_i+\beta_k)(2+\alpha_i-\beta_k)\prod\limits_{i=1}^{p}(2+\alpha_i)^{2q+p+1}}$$

на $\Omega(p;q)$ интегрируема относительно меры Лебега $d\omega$.

Пусть $\widehat{\mathfrak{M}}_{pq}^{(N)} = \imath_N(\mathfrak{M}_{pq}^{(N)})$ – образ меры $\mathfrak{M}_{pq}^{(N)}$ при отображении $\imath_N$. Из лемм 4.4, 4.5 и 4.6 и равенства

$$\mathfrak{M}_{pq}^{(N)}(\lambda) = C(p,q)N^{-(p+q)}$$

$$\times\frac{V^2(\{\alpha_i\})V^2(\{\beta_k\})\prod\limits_{1\le i<j\le p}(2+\alpha_i+\alpha_j)\prod\limits_{1\le k\le l\le q}(2-\beta_k-\beta_l)^2(1+O(\frac{1}{N}))}{\prod\limits_{i=1}^{p}\prod\limits_{k=1}^{q}(\alpha_i+\beta_k)(2+\alpha_i-\beta_k)\prod\limits_{i=1}^{p}(2+\alpha_i)^{2q+p+1}}$$

следует такой результат.

Лемма 4.7. *Меры $\widehat{\mathfrak{M}}_{pq}^{(N)}$ на $\Omega(p;q)$ слабо сходятся к вероятностной мере $\mathfrak{M}_{pq}^{(\infty)}$, которая абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и имеет плотность G_{pq}.*

Лемма 4.8. *Пусть $A \in \mathcal{A}_{pq}^{+}$ и $A \ne 0$. Тогда*

$$\frac{(Av_{pq}, v_{pq})}{(v_{pq}, v_{pq})} > 0.$$

Доказательство. Полностью аналогично доказательству леммы 7.5.4 из [6]. □

Из этой леммы следует теорема 4.1. Действительно, пусть v_{pq} не является циклическим вектором. Тогда линейная оболочка векторов $T_{pq}(g)$, $g \in G$, не является всем пространством H_{pq}. Тогда проектор P_{pq} на ортогональное дополнение к этой линейной оболочке лежит в $\mathcal{A}_{pq}^{+}$ и не равен 0, но $(P_{pq}v_{pq}, v_{pq}) = 0$, что противоречит лемме 4.8. Теорема доказана.

§5. Доказательство лемм 4.4, 4.5 и 4.6

Доказательство леммы 4.4. Обозначим через $\widetilde{\lambda}$ сигнатуру, получаемую из λ отбрасыванием первой строки. Легко видеть, что

$$\mathfrak{M}_{pq}(\lambda) = L \cdot \mathfrak{M}_{(p-1)q}(\widetilde{\lambda}),$$

где

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{C(p,q)\prod\limits_{i=2}^{p}(a_1^+ - a_i^+ + i - 1)(2N + 2q + 1 - i + a_1 + a_i)}{C(p-1,q)(a_1 + 2N - 2p)^{\uparrow(p+2q+1)}\prod\limits_{i=2}^{p}(a_i + 2N - 2p - i + 1)} \\ & \times \frac{(2N - 3p + 1)^{\uparrow(4q-p+2)}}{\prod\limits_{k=1}^{q}(a_1 + b_k + p + q - k)(2N + q - p + a_1 - b_k + k)} \\ & \leq \frac{E^{-(4q-2p+2)}N}{a_1^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Gamma_N(p,q):a_1 > EN} \mathfrak{M}_{pq}(\lambda) & \leq \sum_{a_1 > EN} \frac{E^{-(4q-2p+2)}N}{a_1^2} \sum_{\widetilde{\lambda} \in \Gamma_{N-1}(p-1,q)} \mathfrak{M}_{(p-1)q}(\widetilde{\lambda}) \\ & \leq \frac{E^{-(4q-2p+2)}N}{EN} \sum_{\widetilde{\lambda} \in \Gamma_{N-1}(p,q)} \mathfrak{M}_{(p-1)q}(\lambda) \leq E^{-(4q-2p+3)}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что

$$\sum_{\widetilde{\lambda} \in \Gamma_{N-1}(p-1,q} \mathfrak{M}_{(p-1)q}(\widetilde{\lambda}) = 1,$$

так как $q - (p-1) = z + 1 \geq 0$. □

Для доказательства леммы 4.5 нам понадобится обобщение тождества Коши

$$\det\left[\frac{1}{x_i+y_j}\right]_{i,j=1}^{m}=\frac{V(x)V(y)}{\prod_{i,j}(x_i+y_j)}$$

на случай, когда количество переменных x_i и y_j может быть различным.

Пусть $x=(x_1,\dots,x_p)$, $y=(y_1,\dots,y_q)$ и $q\geq p$. Обозначим символом $y=y'\sqcup y''$ произвольное разбиение множества переменных $y=(y_1,\dots,y_q)$ на два непересекающихся подмножества, содержащие $q-p$ и p переменных соответственно:

$$y'=(y'_1,\dots,y'_{q-p})=(y_{i_1},\dots,y_{i_{q-p}}),$$
$$y''=(y''_1,\dots,y''_p)=(y_{j_1},\dots,y_{j_p}),$$

где

$$i_1<\dots<i_{q-p},\ \ j_1<\dots<j_p,\ \ \{i_1,\dots,i_{q-p}\}\cup\{j_1<\dots<j_p\}=\{1,\dots q\}.$$

Лемма 5.1 ([6, Lemma 7.6.1]). *Имеет место равенство*

$$\frac{V(x_1,\dots,x_p)V(y_1,\dots,y_q)}{\prod(x_i+y_j)}$$
$$=\sum_{y=y'\sqcup y''}\operatorname{sgn}(y',y'')V(y'_1,\dots,y'_{q-p})\det\left[\frac{1}{x_i+y''_j}\right]_{i,j=1}^{p},\quad(21)$$

где знак $\operatorname{sgn}(y',y'')$ *полагается равным* ±1 *в зависимости от четности перестановки* $(i_1,\dots,i_{q-p},j_1,\dots,j_p)$ *чисел* $1,\dots,q$.

Доказательство леммы 4.5. Выберем такое E, что сумма в лемме 4.4 меньше или равна $\varepsilon/2$. Покажем, что существует такое δ, что сумма по тем λ, для которых $a_p+b_q\leq\delta N$ и $a_1<EN$, меньше $\varepsilon/2$, откуда и будет следовать утверждение леммы. Обозначим множество таких сигнатур λ через $\Delta(E,\delta)$. Для $\lambda\in\Delta(E,\delta)$ имеем

$$\mathfrak{M}_{pq}(\lambda)\leq\frac{CN^{3q(q-1)/2}(EN)^{p(p-1)}N^{2q}N^{(3p+1)p/2}V(\{a_i-i\}V(\{b_k-k\}))}{N^{p(2q+p+1)}N^{pq+(q-p)(2q-2p+1)}\prod\limits_{i=1}^{p}\prod\limits_{k=1}^{q}(a_i+b_k+p-i+q-k+1)}$$

$$\leq\frac{CN^{pq-\frac{p^2}{2}-\frac{q^2}{2}-\frac{p}{2}-\frac{q}{2}}V(\{a_i-i\}V(\{b_k-k\}))}{\prod\limits_{i=1}^{p}\prod\limits_{k=1}^{q}(a_i+b_k+p-i+q-k+1)}$$

$$= C \sum_{y=y'\sqcup y''} \operatorname{sgn}(y',y'')V(y'_1,\dots,y'_{q-p}) \det\left[\frac{1}{x_i+y''_j}\right]_{i,j=1}^{p} N^{pq-\frac{p^2}{2}-\frac{q^2}{2}-\frac{p}{2}-\frac{q}{2}}$$

$$\le C \sum_{y=y'\sqcup y''} \det\left[\frac{1}{x_i+y''_j}\right]_{i,j=1}^{p} N^{-q},$$

где последнее равенство следует из леммы 5.1 и

$$x_i = a_i + p - i, \quad 1 \le i \le p; \quad y_k = b_k + q - k, \quad 1 \le k \le q.$$

Раскрывая определитель, получаем, что достаточно доказать следующую оценку:

$$N^{-q} \sum_{x,y} \frac{1}{(x_1+y''_{\sigma_1}+1)\dots(x_p+y''_{\sigma_p}+1)} = O(\delta),$$

где разбиение переменных $y' \sqcup y'' = y$ и перестановка σ множества $\{1,\dots,p\}$ фиксированы, а сумма берется по неотрицательным целым числам, удовлетворяющим условиям

$$x_1 + y_q \le \delta N, \quad EN \ge x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_p, \quad N \ge y_1 \ge y_2 \ge \dots \ge y_q.$$

Есть три случая:

(1) y'' содержит y_q, и $y''_{\sigma(p)} = y_q$;
(2) y'' содержит y_q, но $y''_{\sigma(p)} \ne y_q$;
(3) y'' не содержит y_q.

Случай (3) сводится к случаю (1), поскольку замена $y''_{\sigma(p)}$ на y_q, где $y_q < y''_{\sigma(p)}$, только увеличивает сумму.

Случай (2) тоже может быть сведен к случаю (1). Действительно, поскольку y'' содержит y_q^+, существует такое $i < p$, что $y''_{\sigma(i)} = y_p$. Так как для любых $A_1 > A_2 > 0$, $B_1 > B_2 > 0$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{(A_1+B_2)(A_2+B_1)} < \frac{1}{(A_1+B_1)(A_2+B_2)},$$

отсюда следует, что если поменять местами $y''_{\sigma(i)}$ и $y''_{\sigma(p)}$, то сумма только увеличится.

В случае (1) перейдем к сумме по всем неотрицательным целым числам, удовлетворяющим условиям

$$EN > x_i, \quad N > y_k, \quad x_1^+ + y_q^+ \le \delta N;$$

от этого сумма может только увеличиться. Положим $t_i = x_i + y''_{\sigma(i)}$, тогда $t_p = x_p + y_q \le \delta N$. Так как для каждого t_i есть ровно $t_i + 1$ способов разбить его в сумму целых неотрицательных слагаемых, сумма ограничена количеством векторов $(y'_1, \dots, y'_{q-X+Y-p}, t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{Z}^q_+$, таких, что

$$t_p \le \delta N, \quad t_i \le (E+1)N, \quad y'_j \le N.$$

Но количество таких векторов имеет порядок $O(\delta)N^{q-X+Y}$, откуда мы получаем требуемую оценку. □

Доказательство леммы 4.6. Докажем утверждение индукцией по p. При $p = 0$ утверждение очевидно. Пусть $p \ge 1$. Разобьем интеграл в сумму интегралов по $\alpha_1 \ge 1$ и $\alpha_1 < 1$. Докажем сначала, что первый их этих интегралов сходится. Заметим, что $G_{pq} = H_{pq} G_{(p-1)q}$, где

$$H_{pq} = \frac{\prod\limits_{i=2}^{p} (\alpha_1 - \alpha_i)^2 (2 + \alpha_1 + \alpha_i)}{\prod\limits_{k=1}^{q} (\alpha_1 + \beta_k)(2 + \alpha_1 - \beta_k)(2 + \alpha_1)^{2q+p+1} \prod\limits_{i=2}^{p} (2 + \alpha_i)} \le \frac{C}{\alpha_1^2}.$$

Значит,

$$\int\limits_{\alpha_1 > 1} G_{pq} d\omega \le \int\limits_{\alpha_1 \ge 1} \frac{C}{{\alpha_1}^2} d\alpha_1 \int G_{(p-1)q}.$$

Первый из интегралов в правой части очевидно сходится, а второй сходится по предположению индукции.

Докажем теперь, что интеграл

$$\int\limits_{\alpha_1 < 1} G_{pq} d\omega$$

сходится. Совершая операции, аналогичные проделанным в лемме 4.5, получаем, что достаточно доказать сходимость интеграла

$$\int \frac{d\omega}{(\alpha_1^+ + \beta_1^+) \dots (\alpha_p^+ + \beta_p^+)},$$

которая следует из интегрируемости функции $\frac{1}{x+y}$ по квадрату $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. □

Автор выражает благодарность Г. И. Ольшанскому за постановку задачи и Л. А. Петрову за помощь в проверке некоторых формул.

Литература

1. A. Borodin, G. Olshanski, *Random partitions and the Gamma-kernel.* — Adv. Math. **194** (2005), no. 1, 141–202.
2. V. Gorin, *Disjointness of representations arising in harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group.* — Funct. Anal. Appl. **44** (2010), no. 2, 92–105.
3. Yu. A. Neretin, *Hua-type integrals over unitary groups and over projective limits of unitary groups.* — Duke Math. J. **114** (2002), 239–266.
4. A. Okounkov, G. Olshanski, *Limits of BC-type orthogonal polynomials as the number of variables goes to infinity.* — In: Jack, Hall–Littlewood, and Macdonald polynomials, Amer. Math. Soc. Cont. Math. Ser. **417** (2006), pp. 281–318.
5. G. Olshanski, *The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group.* — J. Funct. Anal. **205** (2003), 464–524.
6. S. Kerov, G. Olshanski, A. Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group.* — Invent. Math. **158** (2004), 551–642.
7. Г. Ольшанский, А. Осиненко, *Многомерные многочлены Якоби и интеграл Сельберга.* — Функц. анал. и прил. (в печати).
8. А. Осиненко, *Гармонический анализ на бесконечномерной унитарной группе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **390** (2011), 237–285.

Osinenko A. Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary-symplectic group.

The goal of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary-symplectic group is to decompose a certain family of unitary representations of this group that replace the nonexisting regular representation and depend on a complex parameter. The aim of the present paper is to describe the decomposition for an integer parameter.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
ГСП-1, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия

E-mail: antoniosi@mail.ru

Поступило 5 сентября 2012 г.