Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 403, 2012 г.

Н. И. Нессонов

О РЕАЛИЗАЦИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

§1. Введение

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ – множество натуральных чисел и $\mathbb{X} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$ группу конечных подстановок множества $\mathbb{X}$. Для $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$ положим $\mathfrak{S}_{\mathbb{A}} = \{s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X}} : s(k) = k$ для всех $k \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{A}\}$. Далее нам потребуются еще две важные подгруппы:

- $\mathfrak{D} = \{s \in \mathfrak{S}_{-\mathbb{N}} \cdot \mathfrak{S}_{\mathbb{N}} : s(-k) = -s(k)$ для всех $k \in \mathbb{X}\}$ (диагональное вложение группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ в $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$, которое часто обозначается через $\operatorname{diag} \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$);
- $\mathfrak{H} = \{s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X}} : s(-k) = -s(k)$ для всех $k \in \mathbb{X}\}$.

Ниже, если это не вызывает недоразумений, мы отождествляем $\mathfrak{S}_{-\mathbb{N}} \cdot \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ с группой $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, которую часто называют дублем бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$.

Понятно, что $\mathfrak{H}$ порождена подгруппой $\mathfrak{D}$ и всеми транспозициями $(-k\ k) \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$. Между $\mathfrak{H}$ и полупрямым произведением группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ на группу $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ легко устанавливается естественный изоморфизм.

Сферическим представлением пары (G, K), где K – подгруппа группы G, в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ принято называть унитарное неприводимое представление Π группы G, такое, что векторы, неподвижные относительно $\Pi(K)$, образуют одномерное подпространство $\mathcal{H}_K$ (при этом единичный вектор из $\mathcal{H}_K$ называется K-сферическим вектором).

Фактор-представления конечного типа параметризуются двумя наборами $\alpha = \{\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots\}$, $\beta = \{\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots\}$ положительных чисел (параметров Тома) со свойством

$$\sum \alpha_i + \sum \beta_i \leq 1$$

(см. [6]).

Ключевые слова: бесконечная симметрическая группа, сферическое представление, фактор-представление, параметры Тома.

Между сферическими представлениями пары

$$(\mathfrak{S}_{-\mathbb{N}} \cdot \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}, \mathfrak{D}) \backsimeq (\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}, \operatorname{diag} \mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$$

существует взаимно однозначное соответствие [5].

Первые реализации сферических представлений пары

$$(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}, \operatorname{diag} \mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$$

были найдены А. М. Вершиком и С. В. Керовым в [1] на основе группоидного подхода. Г. И. Ольшанский в [5] построил явные реализации класса допустимых представлений пары $(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}, \operatorname{diag} \mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$, содержащего сферические.

Однако в указанных работах не был охвачен случай, когда $\sum \alpha_i + \sum \beta_i < 1$. В [2] были предложены явные реализации уже всех фактор-представлений конечного типа группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Но вопрос об их продолжении на группу $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ остался без внимания. Все указанные недостатки в сферическом случае были устранены совсем недавно Ю. А. Неретиным в [3].

Появление данной заметки связано с вопросом А. М. Вершика о возможности явного построения неприводимого представления Π группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$, которое при сужении на подгруппу $\mathfrak{S}_{-\mathbb{N}} \cdot \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ приводит к произвольному наперед заданному сферическому представлению π пары $(\mathfrak{S}_{-\mathbb{N}} \cdot \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}, \mathfrak{D})$. Замечу, что в случае, когда $\sum \alpha_i + \sum \beta_i = 1$, существование представления Π прямо вытекает из конструкции, рассмотренной в [1]. Предлагаемую здесь конструкцию можно рассматривать как обобщение реализаций из [5].

§2. Две конструкции представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$, приводящие к представлениям дубля с единственным параметром Тома

2.1. Первая конструкция. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ выберем ортонормированный базис $\{e_i\}_{i \in \mathbb{X}}$. Зададим естественное унитарное представление $\mathcal{N}$ группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$ в $\mathcal{H}$ следующим образом:

$$\mathcal{N}(s) e_i = e_{s(i)}, \quad s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X}}, \quad i \in \mathbb{X}. \tag{1}$$

Обозначим через $\mathcal{H}_i$, где $i \in \mathbb{X}$, i-ю копию пространства $\mathcal{H}$. В $\mathcal{H}_i$ зафиксируем вектор

$$\Omega_i = x e_{-i} + y e_i, \quad \text{где} \quad x, y \in \mathbb{C} \quad \text{и} \quad x\overline{x} + y\overline{y} = 1. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathcal{H}^{\otimes\mathbb{X}}$ гильбертово пространство, порожденное векторами вида $\cdots\otimes h_{-2}\otimes h_{-1}\otimes h_1\otimes h_2\otimes\cdots$, $h_k\in\mathcal{H}_k$, такими, что $h_k=\Omega_k$ для всех k при достаточно большом $|k|$, с естественным скалярным произведением. Положим $\Omega=\cdots\otimes\Omega_{-2}\otimes\Omega_{-1}\otimes\Omega_1\otimes\Omega_2\otimes\cdots$. Пространство $\mathcal{H}^{\otimes\mathbb{X}}$ принято называть бесконечным тензорным произведением со стабилизирующим вектором Ω. Из определения пространства $\mathcal{H}^{\otimes\mathbb{X}}$ вытекает, что при каждом $s\in\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$ отображение $\cdots\otimes h_{-2}\otimes h_{-1}\otimes h_1\otimes h_2\otimes\cdots\mapsto\cdots\otimes\mathcal{N}(s)h_{-2}\otimes\mathcal{N}(s)h_{-1}\otimes\mathcal{N}(s)h_1\otimes\mathcal{N}(s)h_2\otimes\cdots$ расширяется по линейности и непрерывности до унитарного оператора $\mathcal{N}^{\otimes\mathbb{X}}(s)$.

Обозначим через $\mathcal{P}$ представление группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$, задаваемое в $\mathcal{H}^{\otimes\mathbb{X}}$ перестановками тензорных множителей.

Так как $\mathcal{P}(s)$ и $\mathcal{N}^{\otimes\mathbb{X}}(t)$ коммутируют при всех $s,t\in\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$, операторы $\Pi(s)=\mathcal{N}^{\otimes\mathbb{X}}(s)\cdot\mathcal{P}(s)$ определяют представление группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$.

Следующее утверждение легко проверяется.

Предложение 1. *Представление* Π*, действующее в циклической оболочке вектора* Ω*, есть сферическое представление пары* $(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}},\mathfrak{H})$*. Вектор* Ω *является* $\mathfrak{H}$*-сферическим. Если* c *– цикл длины* n *из подгруппы* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$*, то* $(\Pi(c)\Omega,\Omega)=|y|^{4n}$*.*

2.2. Вторая конструкция. Зафиксируем α из интервала $[0,1]$. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ выберем ортонормированный базис $\{e,e_i\}_{i\in\mathbb{X}}$. Операторы представления $\mathcal{N}$ группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ действуют так:

$$\mathcal{N}(s)e=e,\quad \mathcal{N}(s)e_i=e_{s(i)},\quad s\in\mathfrak{S}_{\mathbb{X}},\quad i\in\mathbb{X}. \tag{3}$$

По схеме, изложенной в секции 2.1, определим гильбертово пространство $\mathcal{H}^{\otimes\mathbb{X}}$, соответствующее стабилизации Ω, в которой $\Omega_i=\sqrt{\alpha}\ e+\sqrt{1-\alpha}\ e_{-i}\in\mathcal{H}_i$. Аналогично, примем $\Pi(s)=\mathcal{P}(s)\cdot\mathcal{N}^{\otimes\mathbb{X}}(s)$, $s\in\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$.

Предложение 2. *Сужение представления* Π *на циклическую оболочку вектора* Ω *неприводимо. Вектор* Ω *является* $\mathfrak{H}$*-сферическим для* Π*, и* $(\Pi(c)\Omega,\Omega)=\alpha^{2n}$ *для цикла* $c\in\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$ *длины* n*.*

§3. Общий случай

В этом разделе мы строим сферические представления группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$, которые при сужении на подгруппы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ и $\mathfrak{S}_{-\mathbb{N}}$ приводят к фактор-представлениям конечного типа с любыми наперед заданными параметрами Тома.

3.1. Конструкция представления. Пусть гильбертово пространство $\mathcal{H}$ является прямой суммой взаимно ортогональных подпространств ${}^0\mathcal{H}$ и ${}^1\mathcal{H}$. Удобно рассматривать $\mathcal{H}$ как суперпространство, в котором ${}^0\mathcal{H}$ (соответственно, ${}^1\mathcal{H}$) есть четное (нечетное) подпространство. В свою очередь,

$$ {}^0\mathcal{H} = {}^0\mathcal{H}^+ \oplus {}^0\mathcal{H}^{\mathrm{reg}}, \text{ где } \dim {}^0\mathcal{H}^{\mathrm{reg}} = \infty. \tag{4} $$

Зафиксируем в $\mathcal{H}$ такой ортонормированный базис $\mathcal{B}$, что

$$ \mathcal{B} = \left\{ {}^0e_i^+ \right\}_{i=1}^{\dim {}^0\mathcal{H}^+} \cup \left\{ {}^0e_i^{\mathrm{reg}} \right\}_{i\in\mathbb{X}} \cup \left\{ {}^1e_i \right\}_{i=1}^{\dim {}^1\mathcal{H}}, \tag{5} $$

где ${}^0\mathcal{B}^+ = \left\{ {}^0e_i^+ \right\}_{i=1}^{\dim {}^0\mathcal{H}^+}$, ${}^0\mathcal{B}^{\mathrm{reg}} = \left\{ {}^0e_i^{\mathrm{reg}} \right\}_{i\in\mathbb{X}}$ и ${}^1\mathcal{B} = \left\{ {}^1e_i \right\}_{i=1}^{\dim {}^1\mathcal{H}}$ – базисы в ${}^0\mathcal{H}^+$, ${}^0\mathcal{H}^{\mathrm{reg}}$ и ${}^1\mathcal{H}$ соответственно.

Определим в $\mathcal{H}$ представление $\mathcal{N}$ группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$ следующим образом:

$$ \mathcal{N}(s)f = \begin{cases} {}^0e_{s(i)}^{\mathrm{reg}}, & \text{если } f = {}^0e_i^{\mathrm{reg}}, \\ f, & \text{если } f \in {}^0\mathcal{B}^+ \cup {}^1\mathcal{B}. \end{cases} \tag{6} $$

Обозначим через T оператор суперперестановки в пространстве $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$:

$$ T\, f\otimes g = (-1)^{p(f)\cdot p(g)}\, g\otimes f, \tag{7} $$

где

$$ p(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \in {}^0\mathcal{H}, \\ 1, & \text{если } f \in {}^1\mathcal{H}. \end{cases} $$

Пусть $\mathcal{H}_i$ – i-я копия пространства $\mathcal{H}$, $i\in\mathbb{X}$. В $\mathcal{H}_{-i}\otimes\mathcal{H}_i$ рассмотрим вектор

$$ \Upsilon = \sum_{e,\, f\in {}^0\mathcal{B}^+\cup {}^1\mathcal{B}} a_{ef}\; e\otimes f, \quad \text{где} \quad a_{ef}\in\mathbb{C} \text{ и } \|\Upsilon\| \le 1. \tag{8} $$

Положим

$$ \Omega_i = \sqrt{1-\|\Upsilon\|^2}\, \left({}^0e_i^{\mathrm{reg}} \otimes {}^0e_{-i}^{\mathrm{reg}} \right) + \Upsilon, \quad \text{где} \quad {}^0e_i^{\mathrm{reg}} \in \mathcal{H}_{-i} \text{ и } {}^0e_{-i}^{\mathrm{reg}} \in \mathcal{H}_i. \tag{9} $$

Пусть $(\mathcal{H}_{-i}\otimes\mathcal{H}_i)^{\otimes\mathbb{N}}$ есть бесконечное тензорное произведение пространств $\mathcal{H}_{-i}\otimes\mathcal{H}_i$, $i\in\mathbb{N}$, определяемое стабилизирующим вектором $\Omega = \Omega_1\otimes\Omega_2\otimes\cdots$.

Определим представление $\mathcal{P}$ группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$, задавая его на стандартных образующих[1] по формуле (7). Так же, как и в секции 2.1, построим $\mathcal{N}^{\otimes\mathbb{X}}$ и представление Π группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$.

Назовем носителем элемента $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$ множество

$$\operatorname{supp} s = \{k \in \mathbb{X} : s(k) \neq k\}.$$

Прямым следствием из определения представления является следующее утверждение.

Предложение 3. *Если* $\operatorname{supp} s_1 \cap \operatorname{supp} s_2 = \varnothing$, *то*

$$(\Pi(s_1 s_2)\Omega, \Omega) = (\Pi(s_1)\Omega, \Omega)(\Pi(s_2)\Omega, \Omega).$$

Это свойство принято называть мультипликативностью.

Следующее утверждение можно доказать, не предполагая неподвижность вектора Ω относительно операторов из $\Pi(\mathfrak{D})$.

Теорема 4. *Представление* Π *неприводимо в циклической оболочке вектора* Ω.

3.2. Условия $\mathfrak{D}$-сферичности и $\mathfrak{H}$-сферичности. Легко видеть, что представление Π будет $\mathfrak{D}$-сферическим, если имеет место хотя бы одно из следующих условий: $\Upsilon = 0$, ${}^0\mathcal{H}^+ = 0$, ${}^1\mathcal{H} = 0$.

Следующее утверждение проверяется прямым вычислением.

Предложение 5. *Вектор* Ω *тогда и только тогда является* $\mathfrak{D}$-*сферическим, когда* $a_{ef} = 0$, *если* $e \in {}^0\mathcal{B}^+$, *а* $f \in {}^1\mathcal{B}$, *или наоборот. Дополнив это свойство соотношением* $a_{ef} = (-1)^{p(e)p(f)} a_{fe}$, *мы получим необходимые и достаточные условия* $\mathfrak{H}$-*сферичности.*

3.3. Параметры Тома для сужения представления Π на подгруппу $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. В этом разделе мы предполагаем, что вектор Ω является $\mathfrak{D}$-сферическим.

Для подгруппы $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$ будем обозначать через $[\Pi(\mathfrak{K})\Omega]$ подпространство, порожденное векторами $\Pi(\mathfrak{K})\Omega$. Из предложения 3 вытекает следующий результат.

Предложение 6. *Сужение представления* Π *на подгруппу* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, *действующее в подпространстве* $[\Pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})\Omega]$, *является фактор-представлением конечного типа. Аналогично для* $\mathfrak{S}_{-\mathbb{N}}$.

[1] Имеются ввиду транспозиции $\ldots, (-2\ \ -1), (-1\ 1), (1\ 2), \ldots$.

Указанные представления подгрупп $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ и $\mathfrak{S}_{-\mathbb{N}}$ будут обозначаться через Π^+ и Π^- соответственно.

Для вычисления параметров Тома фактор-представлений Π^+ и Π^- воспользуемся важным результатом А. Ю. Окунькова, который показал в [4], что наборы α и β восстанавливаются просто по спектру асимптотического оператора

$$\mathcal{O}_i^+ = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \Pi^+\left((i\ n)\right), \tag{10}$$

где предел существует в слабой операторной топологии. А именно, набор α совпадает с положительным спектром оператора $\mathcal{O}_i^+$. Причем число повторений точки спектра в наборе равно её кратности. Аналогично, $-\beta$ является отрицательным спектром оператора $\mathcal{O}_i^+$.

Замечу, что существование предела в (10) можно доказать и без условия $\mathfrak{D}$-сферичности вектора Ω.

В нашей реализации для операторов $\mathcal{O}_i^{\pm}$ нетрудно указать явные формулы. Для этого в $\mathcal{H}$ рассмотрим вспомогательные операторы $\mathcal{O}^+$ и $\mathcal{O}^-$, действующие следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^+\xi = &\sum_{f,\,f'\in {}^0\mathcal{B}^+}\ \sum_{e\in {}^0\mathcal{B}^+\cup {}^1\mathcal{B}} \overline{a_{ef}}\, a_{ef'}\ (\xi, f)\ f' \\
&- \sum_{f,\,f'\in {}^1\mathcal{B}}\ \sum_{e\in {}^0\mathcal{B}^+\cup {}^1\mathcal{B}} \overline{a_{ef}}\, a_{ef'}\ (\xi, f)\ f', \\
\mathcal{O}^-\xi = &\sum_{e,\,e'\in {}^0\mathcal{B}^+}\ \sum_{f\in {}^0\mathcal{B}^+\cup {}^1\mathcal{B}} \overline{a_{ef}}\, a_{e'f}\ (\xi, e)\ e' \\
&- \sum_{e,\,e'\in {}^1\mathcal{B}}\ \sum_{f\in {}^0\mathcal{B}^+\cup {}^1\mathcal{B}} \overline{a_{ef}}\, a_{e'f}\ (\xi, e)\ e'.
\end{aligned} \tag{11}$$

С помощью стандартного аппарата из курса линейной алгебры можно показать, что операторы $\mathcal{O}^+$ и $\mathcal{O}^-$ унитарно эквивалентны.

Замечание 1. Если выполняются условия $\mathfrak{H}$-сферичности из предложения 5, то $\mathcal{O}^+ = \mathcal{O}^-$.

По оператору A, действующему в $\mathcal{H}$, определим в $(\mathcal{H}_{-i}\otimes\mathcal{H}_i)^{\otimes\mathbb{N}}$ оператор A_i следующим образом:

$$A_i\ (\cdots\otimes\xi_{i-1}\otimes\xi_i\otimes\xi_{i+1}\otimes\cdots) = \cdots\otimes\xi_{i-1}\otimes A\xi_i\otimes\xi_{i+1}\otimes\cdots,$$

где $\xi_i\in\mathcal{H}_i$.

Теорема 7. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\mathcal{O}_i^- = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \Pi\left((i\ -n)\right),$$
$$\mathcal{O}_i^+ = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \Pi\left((i\ n)\right).$$

Замечание 2. Легко убедиться, что все возможные наборы α и β можно реализовать, ограничившись рассмотрением таких векторов Υ из (8), для которых $a_{ef} = 0$ при $e \neq f$.

3.4. Заключительные замечания. Приведенные здесь реализации покрывают все сферические представления пары $(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}, \mathfrak{H})$, для которых уже известна полная классификация [4, 5].

Гипотетически построенными представлениями исчерпываются все сферические представления пары $(\mathfrak{S}_\infty, \mathfrak{D})$, которые, по-видимому, параметризуются парой унитарно эквивалентных операторов (см. (11)).

Литература

1. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Характеры и фактор представления бесконечной симметрической группы.* – ДАН СССР **257**, вып. 5 (1981), 1037–1040.
2. A. V. Dudko, N. I. Nessonov, *A description of characters on the infinite wreath product.* — Methods Funct. Anal. Topology **13**, no. 4 (2007), 301–317.
3. Yu. A. Neretin, *A remark on representations of infinite symmetric groups*, `arXiv:1204.4198`.
4. A. Yu. Okounkov, *The Thoma theorem and representation of the infinite bisymmetric group.* — Funct. Anal. Appl. **28**, no. 2 (1994), 100–107.
5. Г. И. Ольшанский, *Унитарные представления (G, K)-пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$.* – Алгебра и анализ **1**, вып. 4 (1989), 178–210.
6. E. Thoma, *Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen symmetrischen Gruppe.* — Math. Z. **85**, no. 1 (1964), 40–61.

Nessonov N. I. On realizations of representations of the infinite symmetric group.

Denote by $\mathbb{N}$ the set of positive integers $\{1, 2, \ldots\}$. Let $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$ stand for the group of all finite permutations of the set $\mathbb{X} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}$. Consider the subgroups

$$\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} = \{s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X}} : s(-k) = -k \ \text{ for all } \ k \in \mathbb{N}\}$$

and

$$\mathfrak{D} = \{s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X}} : -s(k) = s(-k) \ \text{ and } \ s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}\}.$$

Given a spherical representation π of the pair $(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \cdot \mathfrak{S}_{-\mathbb{N}}, \mathfrak{D})$, we construct a spherical representation Π of the pair $(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}, \mathfrak{D})$ such that the restriction of Π to the group $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \cdot \mathfrak{S}_{-\mathbb{N}}$ coincides with π.

Физико-технический институт
низких температур им. Б. И. Веркина,
НАН Украины, пр. Ленина, д. 47,
61103 Харьков, Украина

E-mail: nessonov@ilt.kharkov.ua

Поступило 17 октября 2012 г.