Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 403, 2012 г.

**Ю. А. Неретин**

# ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

**1. Сферические представления.** Пусть $G$ – группа, $K$ – подгруппа. Пара $(G, K)$ называется *сферической*, если для любого неприводимого унитарного представления $\rho$ группы $G$ размерность пространства $K$-неподвижных векторов не превосходит 1. Единичный $K$-неподвижный вектор называется *сферическим вектором.* Напомним, что *сферическая функция* неприводимого представления $\rho$ группы $G$ задается формулой

$$\Phi(g) := \langle \rho(g)v, v\rangle,$$

где $v$ – единичный $K$-неподвижный вектор.

**2. Дубль симметрической группы.** Пусть $\Omega$ – счетное множество. Перестановка $\Omega$ называется *финитной*, если она фиксирует все элементы множества $\Omega$, кроме конечного числа. Через $S(\Omega)$ мы обозначаем группу финитных перестановок счетного множества $\Omega$. Мы также используем альтернативное обозначение $S_\infty$ для таких групп.

Пусть $G = S_\infty \times S_\infty$ – произведение двух копий $S_\infty$, пусть $K \simeq S_\infty$ – диагональная подгруппа. Согласно [5], пара $(G, K)$ – сферическая.

**3. Формула Тома.** Пусть $G$, $K$ – те же, что и в предыдущем пункте. Представления группы $G$, сферические относительно $K$, параметризуются наборами положительных чисел

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots, \quad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \dots, \quad \sum \alpha_i + \sum \beta_j \leqslant 1;$$

конечные и пустые наборы допускаются. Сферические функции задаются формулой

$$\Phi_{\alpha,\beta}(\sigma,\tau) = \prod_{k=2} \left( \sum_i \alpha_i^k + (-1)^{k-1} \sum_j \beta_j^k \right)^{\text{число циклов } \sigma\tau^{-1} \text{ длины } k} \tag{1}$$

(фактически произведение конечно); Тома (1964) формулировал это утверждение на другом языке (см. [6, 5]).

---

*Ключевые слова*: бесконечномерная группа, пространство Фока, схема Араки, сферические представления, сферические функции.

Работа поддержана грантом FWF, P22122.

Явные конструкции представлений Тома были получены Вершиком и Керовым (см. [7]; другая версия была предложена Вершиком [8]). Ольшанский [5] предложил прозрачную конструкцию (также являющуюся модификацией конструкции из [7]), но она не покрывает всех возможных значений параметров; мы добавляем к этой конструкции недостающий элемент.

**4. Конструкция Ольшанского.** Пусть

$$\sum \alpha_i + \sum \beta_j = 1. \tag{2}$$

Рассмотрим гильбертово пространство $H = H_{\overline{0}} \oplus H_{\overline{1}}$. Фиксируем ортонормальный базис $e_i$ в $H_{\overline{0}}$ и $f_j$ в $H_{\overline{1}}$. Рассмотрим единичный вектор $\xi \in H \otimes H$, заданный формулой

$$\xi := \sum_i \alpha_i^{1/2} e_i \otimes e_i + \sum_j \beta_j^{1/2} f_j \otimes f_j.$$

Рассмотрим бесконечное супертензорное произведение[1]

$$\mathcal{H} := (H \otimes H, \xi) \otimes (H \otimes H, \xi) \otimes (H \otimes H, \xi) \otimes \dots \tag{3}$$

(напомним, что в определении бесконечного тензорного произведения требуются отмеченные векторы). Подгруппа $S_\infty \times e \subset G$ действует на $\mathcal{H}$ перестановками первых множителей из скобок $(H \otimes H, \xi)$, а группа $e \times S_\infty$ – перестановками вторых множителей. Диагональная подгруппа $K$ действует перестановками полных скобок $(H \otimes H, \xi)$, вектор $\xi^{\otimes\infty}$ является $K$-сферическим.

Однако условие (2) существенно[2]; та же трудность возникает для других сферических пар, рассматривавшихся Ольшанским [5] и в более общей ситуации, обсуждавшейся в [3, 4].

**5. Произведение сферических функций.** Рассмотрим два неприводимых сферических представления группы $G$, соответствующих

[1]Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$-градуированное пространство $V = V_{\overline{0}} \oplus V_{\overline{1}}$. Тогда $V \otimes V$ – это обычное тензорное произведение, но оператор перестановки множителей иной: если $v$, $w$ – однородные элементы, то $v \otimes w \to (-1)^\varepsilon w \otimes v$, где $\varepsilon = 1$, если $v$, $w \in V_{\overline{1}}$, и $\varepsilon = 0$, если хотя бы один из векторов $v$, $w$ содержится в $V_{\overline{0}}$. На $n$-кратном произведении $V \otimes \dots \otimes V$ мы получаем действие симметрической группы $S_n$; действительно, любая перестановка разлагается в произведение транспозиций, а действие транспозиций только что было описано.

[2]Иначе длина вектора $\xi$ меньше 1 и произведение (3) не является корректно определенным.

параметрам $\alpha$, $\beta$ и $\alpha'$, $\beta'$. Легко показать, что их тензорное произведение содержит лишь один $K$-неподвижный вектор[3], а сферическая функция является произведением сферических функций, она имеет вид (1) с параметрами

$$\widetilde{\alpha} = \{\alpha_i \alpha'_k\},\ \{\beta_j \beta'_l\}, \quad \widetilde{\beta} = \{\alpha_i \beta'_l\},\ \{\beta_j \alpha'_k\}.$$

Следовательно, *для построения всех сферических представлений достаточно построить представление*[4], *соответствующее одноэлементному множеству* $\alpha$ *и пустому набору* $\beta$; сферическая функция этого представления равна

$$\Psi(\sigma, \tau) = \alpha^{\text{число } i, \text{ таких, что } \sigma i \neq \tau i}. \tag{4}$$

**6. Группа аффинных изометрий и схема Араки.** Подробности см., например, в [2, V.1.6–7, X.1].

Обозначим через $F_n$ гильбертово пространство голоморфных функций на $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\mathbb{C}^n} f(z) \overline{g(z)}\, e^{-\langle z, z \rangle} dz\, d\overline{z}.$$

Рассмотрим естественные вложения $J_n : F_n \to F_{n+1}$, заданные формулой

$$J_n f(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}) = f(z_1, \ldots, z_n).$$

Очевидно, $J_n$ – изометрическое вложение. Мы рассматриваем объединение цепочки

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

и его пополнение $\mathbf{F}_\infty$ (*бозонное пространство Фока*), см., например, [2, VI.1].

Рассмотрим вещественное гильбертово пространство $H$. Обозначим через $\mathrm{O}(H)$ группу ортогональных (т.е. вещественных унитарных) операторов. Рассмотрим группу $\mathrm{Isom}(H)$, порожденную $\mathrm{O}(H)$ и параллельными переносами; мы получаем полупрямое произведение $\mathrm{Isom}(H) = \mathrm{O}(H) \ltimes H$, эта группа действует на $H$ аффинными преобразованиями

$$h \mapsto Ah + v, \quad \text{где} \quad A \in \mathrm{O}(H),\ v \in H.$$

[3]Но это произведение может быть приводимым.

[4]Другая конструкция этого представления может быть найдена в [1].

Далее мы строим линейное представление $\mathrm{Exp}\,(\cdot)$ группы $\mathrm{Isom}(\ell_2)$ в пространстве Фока $\mathbf{F}_\infty$. Ортогональные преобразования действуют в пространстве Фока по формуле

$$\mathrm{Exp}\,(A)f(z) = f(zA), \quad A \in \mathrm{O}(\ell_2),$$

а параллельные переносы – по формуле

$$\mathrm{Exp}\,(v)f(z) = f(z+v)e^{-\langle z,v\rangle - \frac{1}{2}\langle v,v\rangle}, \quad v \in \ell_2.$$

Таким образом мы получаем неприводимое унитарное представление группы $\mathrm{Isom}(\ell_2)$. Функция $f(z) = 1$ является $\mathrm{O}(\ell_2)$-инвариантной, сферическая функция равна $e^{-\frac{1}{2}\langle h,h\rangle}$.

Один из обычных способов[5] (*схема Араки*) построения унитарных представлений бесконечномерных групп $G$ – вложение $G$ в группу изометрий гильбертова пространства и ограничение представления $\mathrm{Exp}(\cdot)$ на $G$.

Пусть дано унитарное представление $U$ группы $G$ в гильбертовом пространстве $H$. Пусть $\Xi : G \to H$ – функция, удовлетворяющая уравнению

$$\Xi(g_1g_2) = T(g_1)\Xi(g_2) + \Xi(g_1). \tag{5}$$

Тогда аффинные изометрические преобразования

$$\widetilde{U}(g)h = U(g)h + \Xi(g) \tag{6}$$

удовлетворяют соотношению

$$\widetilde{U}(g_1)\widetilde{U}(g_2) = \widetilde{U}(g_1g_2),$$

и мы получаем вложение $G \to \mathrm{Isom}(H)$ (что проверяется непосредственно). Для фиксированного вектора $\eta \in H$ функция

$$\Xi(g) := U(g)\eta - \eta \tag{7}$$

удовлетворяет уравнению (5). Это решение уравнения (5) неинтересно, потому что эта поправка $\Xi(\cdot)$ равносильна сдвигу начала координат.

Пусть $G$ действует линейными преобразованиями большего пространства $\widehat{H} \supset H$, и $\eta \in \widehat{H} \setminus H$. Если $U(g)\eta - \eta \in H$ для всех $g$, мы получаем нетривиальное аффинное изометрическое действие группы $G$.

[5]См. многочисленные примеры в [2, разделы VIII.6.8, IX.1.6, IX.2.5, IX.5.4, IX.1.4, IX.1.5, IX.3.12, IX.4.6, F.4].

**7. Конструкция для дубля симметрической группы.** Рассмотрим пространство $\ell_2$ с базисом $e_j$. Группа $G = S_\infty \times S_\infty$ действует в $\ell_2 \otimes \ell_2$ линейными преобразованиями

$$U(\sigma,\tau)e_i \otimes e_j = e_{\sigma i} \otimes e_{\tau j}\,.$$

Мы фиксируем $s > 0$, полагаем

$$\eta := s\sum_{j=1}^{\infty} e_j \otimes e_j$$

и определяем $\Xi(\sigma,\tau)$ по формуле (7). Заметим, что $\eta \notin \ell_2 \otimes \ell_2$, но $\Xi(\sigma,\tau) \in \ell_2 \otimes \ell_2$. Кроме того, $\Xi(\sigma,\sigma) = 0$. Мы определяем аффинное изометрическое действие группы $G = S_\infty \times S_\infty$ по формуле (6) и ограничиваем представление группы $\mathrm{Isom}(\ell_2 \otimes \ell_2)$ на $G$. Тогда функция $f = 1$ является единственным $K$-неподвижным вектором, а сферическая функция задается формулой (4) с $\alpha = e^{-s^2}$.

**8. Симметрическая группа и гипероктаэдральная подгруппа.** Рассмотрим две копии натурального ряда $\mathbb{N}$, скажем $\mathbb{N}_+$ и $\mathbb{N}_-$. Будем обозначать их элементы как $1_+$, $2_+$, $\ldots$, $1_-$, $2_-$, $\ldots$. Пусть $G_1 = S(\mathbb{N}_+ \sqcup \mathbb{N}_-) =: S_{2\infty}$. *Гипероктаэдральная группа* $K_1$ – это подгруппа в $G_1$, состоящая из перестановок, таких, что для любого $j \in \mathbb{N}$ пара $(\sigma j_+, \sigma j_-)$ имеет вид $(m_+, m_-)$ или $(m_-, m_+)$. Очевидно, $K_1$ является полупрямым произведением: $K_1 = S_\infty \ltimes \mathbb{Z}_2^\infty$.

Пара $(G_1, K_1)$ сферична, см. [5].

Теперь мы рассмотрим гильбертовы пространства $\ell_2(\mathbb{N}_\pm)$ с базисами $e_j^\pm$. Положим

$$H = \big(\ell_2(\mathbb{N}_+) \oplus \ell_2(\mathbb{N}_-)\big) \otimes \big(\ell_2(\mathbb{N}_+) \oplus \ell_2(\mathbb{N}_-)\big).$$

Группа $G_1 = S(\mathbb{N}_+ \sqcup \mathbb{N}_-)$ действует в этом пространстве естественным образом (на каждом тензорном множителе). Далее, мы определяем вектор

$$\eta := s \cdot \sum_j (e_j^+ \oplus e_j^- + e_j^- \oplus e_j^+)$$

и строим вложение $G_1 = S(\mathbb{N}_+ \sqcup \mathbb{N}_-)$ в $\mathrm{Isom}(H)$, как выше.

Это дает $K_1$-сферические представления группы $G_1$, которые не покрываются явной конструкцией [5].

**9. Еще один пример.** Рассмотрим пару $G_2 \supset K_2$, где $G_2 = G_1$ и $K_2 \subset K_1$ – группа всех перестановок $\sigma$, переводящих любую упорядоченную пару $(j_+, j_-)$ в пару вида $(m_+, m_-)$. Мы имеем

$$K_2 = S_\infty \subset S_\infty \ltimes \mathbb{Z}_2^\infty = K_1.$$

Эта пара сферична (см. [4]); заметим, что этот факт не имеет аналога для конечных симметрических групп). Далее фиксируем вещественные параметры $s$, $t$, полагаем

$$\eta = s \sum e_j^+ \otimes e_j^- + t \sum e_j^- \otimes e_j^+$$

и повторяем те же доводы.

**10. Тройные произведения.** Пусть $G_3 = S_\infty \times S_\infty \times S_\infty$, а $K_3$ – диагональ. Эта пара сферична, см. [3, 4]. Мы полагаем

$$H := \ell_2 \otimes \ell_2 \otimes \ell_2$$

и

$$\eta = s \sum_j e_j \otimes e_j \otimes e_j.$$

## Литература


1. A. V. Dudko, N. I. Nessonov, *Invariant states on the wreath product*, `arXiv:0903.4987`.
2. Yu. A. Neretin, *Categories of Symmetries and Infinite-Dimensional Groups.* Oxford Univ. Press, New York, 1996.
3. Yu. A. Neretin, *Infinite tri-symmetric group, multiplication of double cosets, and checker topological field theories.* — Int. Math. Res. Notices **2012** (2011), 501–523.
4. Yu. A. Neretin, *Infinite symmetric group and combinatorial descriptions of semigroups of double cosets*, `arXiv:1106.1161`.
5. Г. И. Ольшанский, *Унитарные представления пар, связанных с бесконечной симметрической группой.* — Алгебра и анализ **1**, вып. 4 (1989), 178–209.
6. E. Thoma, *Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe.* — Math. Z. **85** (1964), 40–61.
7. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Характеры и фактор-представления бесконечной симметрической группы.* — Докл. АН СССР **257**, вып. 5 (1981), 1037–1040.
8. A. M. Vershik, *Totally nonfree actions and the infinite symmetric group.* — Moscow Math. J. **12**, no. 1 (2012), 193–212.

Neretin Yu. A. A remark on representations of infinite symmetric groups.

We simplify the construction of the Thoma representations of the infinite symmetric group.

Институт экспериментальной
и статистической физики,
ул. Большая Черемушкинская, д. 25,
117218 Москва, Россия;
University of Vienna,
Vienna, Austria;
Московский государственный университет,
Москва, Россия
*E-mail*: neretin@mccme.ru

Поступило 8 июня 2012 г.