Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 403, 2012 г.

А. А. Лодкин, И. Е. Манаев, А. Р. Минабутдинов

РЕАЛИЗАЦИЯ АВТОМОРФИЗМА ПАСКАЛЯ В ГРАФЕ КОНКАТЕНАЦИЙ И ФУНКЦИЯ $s_2(n)$

§1. Введение

Мы рассматриваем схему, в которую вкладывается целый класс динамических систем подстановочного типа. Например, автоморфизмы Морса и Паскаля. Как известно, первый из них связан со стационарным адическим сдвигом на марковском компакте, а второй – с нестационарным. В нашей объединенной схеме стационарным сдвигам отвечают конкатенационные системы с периодическими начальными условиями. Авторы выражают благодарность А. М. Вершику за внимание к работе.

§2. Граф конкатенаций: построение и примеры

Пусть дан конечный алфавит $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_n\}$. Обозначим через $\mathcal{A}^*$ множество слов в алфавите $\mathcal{A}$, включая пустое слово $\{\varnothing\}$.

Рассмотрим граф

$$\begin{tikzcd}
\cdots & O_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & O_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & O_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \cdots & & O_{p-2} \arrow[dl] \arrow[dr] & & O_{p-1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & O_p \arrow[dl] \arrow[dr] & \cdots \\
\cdots & & O_0O_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & O_1O_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \cdots & \cdots & & O_{p-2}O_{p-1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & O_{p-1}O_p \arrow[dl] \arrow[dr] & & \cdots \\
& \cdots & & O_0O_1O_1O_2 & & \cdots & & & \cdots & & O_{p-2}O_{p-1}O_{p-1}O_p & & \cdots &
\end{tikzcd}$$

В каждой вершине графа находится слово, которое получено конкатенацией пары слов, стоящих в двух вершинах предыдущего уровня и соединенных с данной ребром; конкатенацию слова O и пустого слова $\varnothing$ положим равной O. Будем называть слова, стоящие в вершинах графа, *опорными словами*. Множество слов, стоящих в вершинах $(\dots, O_{-p}, \dots, O_{-1}, O_0, O_1, \dots, O_p, \dots)$ первого уровня, задается произвольно.

Ключевые слова: граф конкатенаций, адический автоморфизм, автоморфизм Паскаля, автоморфизм Морса, функция “сумма разрядов”, дискретный спектр.

Работа первого автора поддержана грантом РФФИ 11-01-00677-а.

Работа второго и третьего автора поддержана стипендией им. В. А. Рохлина.

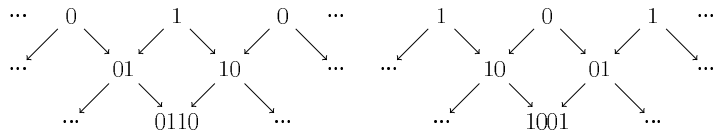
Очевидно, что в вершине $O_{i_1\ldots i_{2^n}} = O_{i_1}\ldots O_{i_{2^n}}$ $(n+1)$-го уровня стоит слово, составленное из 2^n слов, стоящих в вершинах первого уровня. Последовательность $\{i_1,\ldots,i_{2^n}\}$ равна $\{s_2(k)+p\}_{k=0}^{2^n-1}$, где p – константа, которую мы будем называть номером вершины в строке, а $s_2(n)$ – число единиц в двоичной записи целого числа n. Например, вершина $O_{s_2(0)\ldots s_2(2^n-1)}$ имеет нулевой номер.

Приведем два важных примера.

Пример 1. Зададим слова в вершинах

$$(\ldots, O_{-p}, \ldots, O_{-1}, O_0, O_1, \ldots, O_p, \ldots)$$

первого уровня периодической последовательностью из нулей и единиц, как показано на графе:

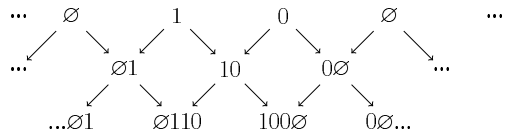


Несложно видеть, что в вершинах графа стоят начальные отрезки последовательности Туэ–Морса $\{s_2(k) \mod 2\}_{k=0}^{2^n-1}$, а также ее инверсии $\{s_2(k)+1 \mod 2\}_{k=0}^{2^n-1}$.

Пример 2. Зададим слова в вершинах

$$(\ldots, O_{-p}, \ldots, O_{-1}, O_0, O_1, \ldots, O_p, \ldots)$$

первого уровня следующим "финитным" образом: $O_0 = 1$, $O_1 = 0$, $O_i = \varnothing$, $i \neq 1, 0$, как показано на графе



Несложно видеть, что в вершинах графа стоят опорные слова $O[n,k]$ реализации автоморфизма Паскаля как левого сдвига, что соответствует адической конструкции А. М. Вершика [1]. Подробно о реализации автоморфизма Паскаля см. [2, 8].

Определение 1. *Обозначим через L множество всех слов, стоящих в вершинах графа конкатенаций, и их конечных подслов. Пусть*

$X \subset \prod_{-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ *– пространство всех таких двусторонних последовательностей, что все их (конечные) подслова лежат в* L. *На* X *определена топология, задаваемая цилиндрами, и левосторонний сдвиг* $\widetilde{T}$. *Тогда тройку* $(X, \mu, \widetilde{T})$, *где* μ *– инвариантная эргодическая мера, назовем конкатенационной системой.*

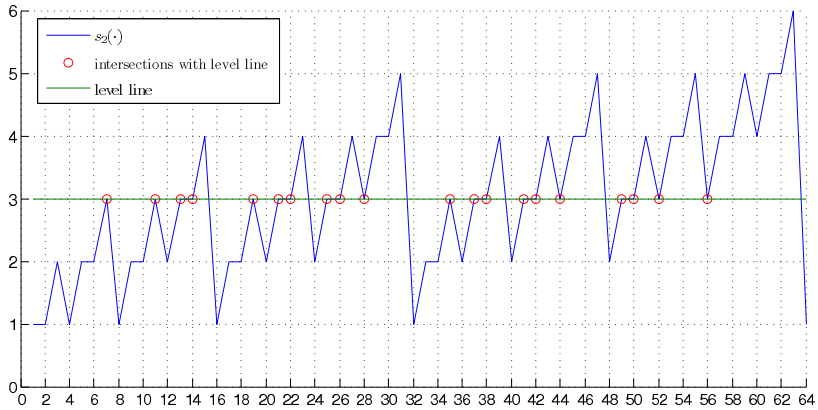


Рис. 1. Опорное слово $O[6,3]$ как подмножество одной линии уровня $s_2(\cdot) = 3$.

Вернемся к примеру 1.

Утверждение 1. *Пусть* n, k *фиксированы,* $O[n,k]$ *– опорное слово в реализации автоморфизма Паскаля как левого сдвига. Тогда существует биекция между отрезком линии уровня* $N[n,k]$ *(где* $N[n,k] = \{i \mid 0 \leqslant i \leqslant 2^n - 1, s_2(i) = k\}$*) функции* $s_2(n)$ *и* $O[n,k]$, *а именно:*

$$\{i \bmod 2\}_{i \in N[n,k]} = O[n,k].$$

Рисунок 1 иллюстрирует это утверждение на примере $O[6,3] = [11101101001101001000]$.

Доказательство. Рассмотрим вершину $O_{i_1 \ldots i_{2^n}} = O_{i_1} \ldots O_{i_{2^n}}$. Так как $\{i_1, \ldots, i_{2^n}\}$ равно $\{s_2(k) + p\}_{k=0}^{2^n-1}$ при $p \leqslant 1$ и $O_i = \varnothing$, $i \neq 0, 1$, непустыми будут только слова с индексами $s_2(k) + p = 0$ или $s_2(k) + p = 1$. Поэтому опорное слово кодируется парой линий уровня

функции $s_2(n)$, см. рис. 2. Остается воспользоваться очевидной формулой $s_2(2n+1)-s_2(n)=1$. $\square$

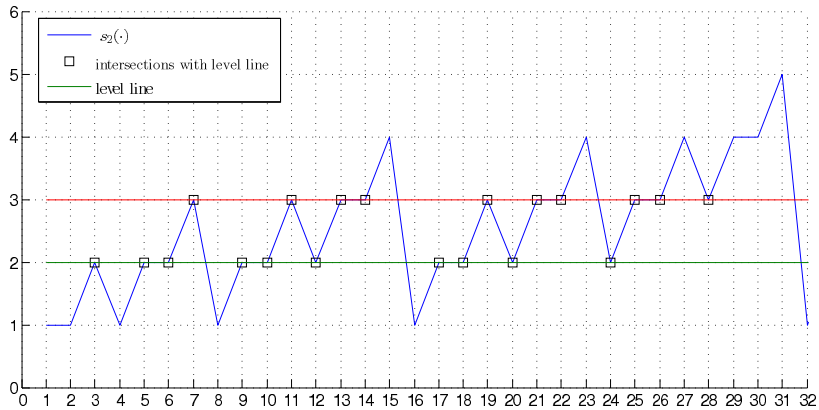


Рис. 2. Опорное слово $O[6,3]$ как подмножество пары линий уровня $s_2(\cdot)=2$, $s_2(\cdot)=3$.

Замечание 1. Альтернативное доказательство утверждения 1 можно получить, если заметить, что автоморфизм Паскаля P может быть определен следующим образом.

Пусть дана последовательность $\alpha=(\alpha_0\dots\alpha_n)\in\{0,1\}^n$. Рассмотрим $a\in\mathbb{N}$, такое, что $a=\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i\cdot 2^i$. Определим преобразование $\widehat{T}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ формулой

$$\widehat{T}(a)=\min_{x>a}\{x : s_2(x)=s_2(a)\}.$$

Тогда на цилиндрах в пространстве $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_2$ автоморфизм P определяется формулой

$$P(\alpha_0\dots\alpha_n*)=(\beta_0\dots\beta_n*),\quad \text{где}\quad \sum_{i=0}^{n}\beta_i\cdot 2^i=\widehat{T}(a).$$

Для доказательства остается заметить, что опорная последовательность $O[n,k]$ равна $\{\alpha_0(\widehat{T}^j(x)) \mid 0 \leqslant j \leqslant \binom{n}{k}-1\}$, где $\alpha_0(y)=\alpha_0$ для $y=\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i\cdot 2^i$, а $x=\min\{z : s_2(z)=k\}$.

§3. Основная теорема

Напомним теорему, принадлежащую А. М. Вершику, П. Б. Затицкому, Ф. В. Петрову и С. Ферензи [6, 7].

Теорема 1. *Пусть T – сохраняющий меру эргодический автоморфизм пространства Лебега–Рохлина (X,μ), d – метрика Хэмминга. Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Автоморфизм T имеет дискретный спектр.*
2. *Для допустимой полуметрики $\rho \in L^1(X^2)$ и любого $\epsilon>0$ масштабирующая последовательность ограничена.*
3. *Для любого образующего разбиения α и любых $\epsilon>0, n\in\mathbb{N}$ существует константа $K>0$, такая, что почти все пространство разбивается на конечное число шаров*

$$B_i:\ \mu\Bigg(X\setminus\bigcup_{i=1}^{K}B_i(x^i)\Bigg)\leqslant\epsilon,$$

где

$$B_i(x^i)=\big\{y\in X \mid d((\alpha_0(x^i)\dots\alpha_n(x^i)),((\alpha_0(y)\dots\alpha_n(y)))\leqslant\epsilon\big\}.$$

Теорема 2. *Пусть (X,μ,T) – конкатенационная система. Спектр автоморфизма T дискретен тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon>0$ найдутся $N_1,N\in\mathbb{N}$ и опорные слова $\{O_i=(a_1^i\dots a_{N_1}^i)\}_{i\in\mathcal{M}}$, такие, что $\mu\big(\bigcup\limits_{i\in\mathcal{M}}O_i\big)\geqslant 1-\epsilon$, которые удовлетворяют следующим условиям: для каждого $i\in\mathcal{M}$ найдутся такой период p и множество $A_N\subset\{1,\dots,N\}$, $\#A_N\geqslant N(1-\epsilon)$, что для любых $l\in A_N$ и любой последовательности $w_l=(a_la_{l+p}a_{l+2p}\dots)\subset O_i$ реализуется одна из двух возможностей*[1]*:*

1. $d(1^{|w_l|},w_l)\leqslant\epsilon$;
2. $d(0^{|w_l|},w_l)\leqslant\epsilon$.

Доказательство. Следующая комбинаторная лемма использовалась в доказательстве критерия дискретности спектра в [7].

[1] Через $|O|$ обозначена длина слова O.

Лемма 1. *Пусть* $\widehat{O}_N = \{(\alpha_1^i \dots \alpha_N^i)\}_{i=1}^{\infty}$ *– множество слов длины* N *(при достаточно большом* N*) в алфавите* $\{0,1\}$ *и* $\widehat{O}_N = \bigsqcup_{l=1}^{K} B_l(\overline{\alpha}^l)$, *где* $B_l(\overline{\alpha}^l) = \{\alpha \in \widehat{O}_N : d(\alpha, \overline{\alpha}^l) < \epsilon\}$. *Тогда найдется такое множество* $A_N \subset \{1, \dots, N\}$, $\#A_N \geqslant N(1-\epsilon)$, *что для всех* $j \in A_N$, *для всех* $l \in \{1, \dots, K\}$ *и почти всех*[2] $\alpha \in B_l(\overline{\alpha}^l)$ *выполнено равенство* $\alpha_j = \overline{\alpha}_j^l$.

Так как мощность множества $\{(\overline{\alpha}_i^1 \dots \overline{\alpha}_i^K)\}_{i=1}^{N}$ не превосходит 2^K, существует множество $C_N \subset A_N$, $\#C_N \leqslant 2^K$, такое, что для всех $n \in A_N$ найдется $f(n) \in C_N$, удовлетворяющее условию $\overline{\alpha}_n^l = \overline{\alpha}_{f(n)}^l$ для всех $1 \leqslant l \leqslant K$.

Согласно теореме ван дер Вардена, для опорного слова O найдется период p, такой, что последовательность $(a_l a_{l+p} a_{l+2p} \dots)$ состоит из единиц. Рассмотрим $N_2 = pNN_1$, где N удовлетворяет лемме 1, и применим лемму к O_{N_2}. Тогда у последовательности

$$(a_{f(l)} a_{f(l)+pN} a_{f(l)+2pN} \dots)$$

почти все члены равны.

Для доказательства обратного утверждения достаточно разделить опорное слово на подряд идущие подслова длины N_2. □

Замечание 2. Так как число единиц в последовательности $s_2(n)$, аргументы которой образуют арифметическую прогрессию с шагом p на отрезке натуральных чисел от 0 до n, имеет порядок $\frac{n}{2p}$ (теорема 4 в [5]), по теореме 2 автоморфизм Морса имеет недискретный спектр.

Сформулируем утверждение, которое на текущий момент проверено для некоторых опорных слов численно.

Утверждение 2. *Пусть фиксировано* $c \in (0, 1/2)$ *и* $O[n, cn]$ *– опорное слово*[3] *автоморфизма Паскаля. Через* $\mathcal{W}_n^{(p,l)}$ *обозначим подпоследовательность* $N[n, cn] = \{i \mid 0 \leqslant i \leqslant 2^n - 1, s_2(i) = cn\}$ *вида* $\{a_{l+pj}\}_{j \geqslant 1}$ *максимальной длины. Тогда не найдется такого натурального* p, *что для почти всех* $l \in \mathbb{N}$ *доля нечетных чисел в* $\mathcal{W}_n^{(p,l)}$ *при* $n \to \infty$ *стремится к нулю или к единице.*

Справедливость утверждения 2 влекла бы недискретность спектра автоморфизма.

---

[2]То есть доля таких α составляет $(1-\epsilon)$ от мощности множества $B_l(\overline{\alpha}^l)$.

[3]Строго говоря, здесь cn следует заменить ближайшим к нему целым числом.

Приведем результаты вычислений для четырех опорных слов: $O[14,7]$, $O[16,8]$, $O[18,9]$ и $O[20,10]$.

ϵ	$O[14,7]$	$O[16,8]$	$O[18,9]$	$O[20,10]$
$\epsilon = 0.1$	0,00179	0,00154	0,00151	0,00146
$\epsilon = 0.01$	0,00026	0,00014	0,00013	0,00012

Например, для $O[14,7]$ доля пар (p,l), таких, что

$$\frac{\text{мощность нечетных чисел в } \mathcal{W}_n^{(p,l)}}{\text{мощность четных чисел в } \mathcal{W}_n^{(p,l)}} > 1 - 0.1,$$

составляет $0,00179$.

Литература

1. А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.* — ДАН СССР **259**, вып. 3 (1981), 526–529.
2. X. Mela, K. Petersen, *Dynamical properties of the Pascal adic transformation.* — Ergodic Theory Dynam. Systems **25** (2005), 227–256.
3. P. Flajolet, P. Grabner, *Mellin transforms and asymptotics: digital sums.* — Theoret. Comput. Sci. **123** (1994), 291–314.
4. M. Drmota, M. Skalba, *Sign-changes of the Thue–Morse fractal function and Dirichlet L-series.* — Manuscripta Math. **86** (1995), 519–541.
5. M. Drmota, M. Skalba, *Rarified sums of the Thue–Morse sequence.* — Trans. Amer. Math. Soc. **352** (1999), 609–642.
6. A. Vershik, F. Petrov, P. Zatitskiy, *Geometry and dynamics of admissible metrics in measure spaces*, `arXiv:1205.1174v2` (2012).
7. S. Ferenczi, *Measure-theoretic complexity of ergodic systems.* — Israel Math. J. **100** (1997), 180–207.
8. А. А. Лодкин, И. Е. Манаев, А. Р. Минабутдинов, *Асимптотика масштабированной энтропии автоморфизма Паскаля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **378** (2010), 58–72.
9. A. M. Vershik, *Orbit theory, locally finite permutations and Morse arithmetic.* — In: Dynamical Numbers: Interplay Between Dynamical Systems and Number Theory, Contemp. Math. **532** (2010), pp. 115–136.

Lodkin A. A., Manaev I. E., Minabutdinov A. R. A realization of the Pascal automorphism in the concatenation graph, and the function $s_2(n)$.

A class of concatenation dynamical systems is introduced. Various automorphisms, including the Morse and Pascal automorphisms, can be regarded as automorphisms of this class. In this realization, a natural number-theoretic interpretation of the problem whether the spectrum of an automorphism is discrete arises. In particular, the known character of the asymptotic behavior of the function $s_2(n)$ allows one to immediately see the nondiscreteness of the spectrum of the Morse automorphism and to give a new formulation of the discreteness problem in the case of the Pascal automorphism.

С.-Петербургский государственный
университет, математико-механический
факультет, Университетский пр., д. 28,
Старый Петергоф,
198504 С.-Петербург, Россия

E-mail: lodkin@al1065.spb.edu
manaev.i.e.@gmail.com
aminabutdinov@gmail.com

Поступило 15 октября 2012 г.