Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 403, 2012 г.

А. М. Вершик

О КЛАССИФИКАЦИИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Введение

Первый параграф работы посвящен постановке вопроса и введению основных понятий. Основная часть статьи – второй параграф, где мы вводим систему совместных распределний (СР) и доказываем основную лемму о базисах, порожденных чистой функцией. Основываясь на этом, мы определяем нормальную форму измеримой функции двух (или большего числа) аргументов и вводим так называемое каноническое изображение функций. Это не вполне явная, но интересная модель функций, которая отчасти напоминает случайный процесс с множеством мер в качестве параметрического множества. С этим, по-видимому, новым понятием, которое определяется во втором параграфе, связан ряд интересных вопросов, предположительно открывающих новый метод изучения измеримых функций многих аргументов. Третий параграф, написанный конспективно, связывает предыдущий анализ с матричным распределением (мерой на матрицах, или случайной матрицей) – другим инвариантом функций, который можно назвать рандомизацией. Более точно можно сказать, что это метод *классификации функций через рандомизацию*; он обобщает идею Громова, развитую автором, о классификации метрик на пространствах с мерой. Построение измеримой функции с данным матричным инвариантом, анонсированное в [1], проводится с помощью эргодического метода, систем совместных распределений и канонического изображения, рассмотренных в §2. Автор предполагает развить эти темы в другой публикации.

Ключевые слова: классификация функций, матричное распределение, каноническая форма, совместные распределения.

Работа поддержана грантами РФФИ 11-01-12092-офи-м и 11-01-00677-а.

1.1. Постановка вопроса. Напомним, что классификация измеримых функций одной переменной, заданных на некотором пространстве Лебега (X, μ) с непрерывной мерой, со значениями в стандартном борелевском пространстве A относительно группы всех измеримых преобразований аргумента, сохраняющих меру, почти очевидна. А именно, измеримая, почти всюду взаимно однозначная функция $f : X \to A$ эквивалентна тождественной функции на пространстве A, снабженном мерой $f_*\mu$, где $f_*\mu$ – распределение функции (т.е. образ меры μ при отображении f). Это и есть нормальная ("тавтологическая") форма произвольной измеримой взаимно однозначной функции одной переменной. Нетрудно написать нормальную форму для произвольной (не взаимно однозначной) функции. Это сделано в [2] (см. также [1]) с помощью теории условных мер. Для этого надо рассмотреть разбиение пространства (X, μ) на линии уровня функции f и считать (X, μ) расслоением над A. Если приписать (почти) каждому по мере $f_*\mu$ значению $a \in A$ функции метрический тип условной меры на множестве уровня этого значения $f^{-1}(a)$, то (X, μ) становится расслоением, определяемым только в терминах A и семейства этих условных мер; обозначим его $\overline{A}$. Тогда нормальная форма измеримой функции одной переменной общего вида есть проекция $F : (\overline{A}, \overline{\mu}) \to (A, f_*\mu)$.

В этой работе мы изучаем аналогичную задачу классификации функций нескольких переменных, которая гораздо сложнее. Статья примыкает к работе [1], но здесь мы предлагаем набросок нового метода исследования измеримых функций, который связывается с имевшимся подходом. Метод состоит в рассмотрении системы совместных распределений сечений функций нескольких переменных как инварианта относительно естественной эквивалентности.

Рассмотрим произведение двух пространств с непрерывной мерой $(X \times Y, \mu \times \nu)$ и измеримую функцию f на этом произведении со значениями в стандартном борелевском пространстве A. Пусть задана измеримая функция f на пространстве $(X \times Y, \mu \times \nu)$. Мы будем рассматривать только непрерывные меры μ, ν; что касается пространства A значений функции, то это любое стандартное борелевское пространство (конечное, счетное или континуальное; последний случай наиболее интересен). Можно, не умаляя общности, считать, что область значений A – это отрезок $[0, 1]$; ничего кроме борелевской структуры на нем использоваться не будет.

Определение 1. *Две функции f и f', заданные на пространствах $(X \times Y, \mu \times \nu)$ и $(X' \times Y', \mu' \times \nu')$ соответственно, со значениями в стандартном борелевском пространстве A назовем эквивалентными, если существуют такие измеримые обратимые преобразования $T : X \to X'$, $S : Y \to Y'$, сохраняющие меры ($T\mu = \mu'$, $S\nu = \nu'$), что*

$$f'(Tx, Sy) = f(x, y),$$

или, эквивалентным образом,

$$f'(x', y') = f(T^{-1}x', S^{-1}y').$$

Возможны многочисленные частные случаи и обобщения, которые исследуются в точности тем же методом. Выше группа, относительно которой ставилась задача классификации, была произведением групп автоморфизмов с инвариантной мерой каждой компоненты:

$$\mathrm{Aut}(X, \mu) \times \mathrm{Aut}(Y, \nu).$$

Мы упомянем лишь две другие возможности.

Определение 2. *Пусть (в тех же обозначениях) сомножители совпадают как пространства с мерой: $X = Y$ и $X' = Y'$. В этом случае можно рассматривать изоморфизм функций относительно автоморфизмов вида $T \times T$; такую классификацию мы будем называть диагональной классификацией измеримых функций:*

$$f'(Tx, Sy) = f(x, y),$$

или, эквивалентным образом,

$$f'(x', y') = f(T^{-1}x', S^{-1}y').$$

Таким образом, здесь рассматривается диагональное действие группы $\mathrm{Aut}(X, \mu)$.

Диагональная классификация естественна, например, в случае функций, симметричных относительно перестановки аргументов. В частности, сюда относится важный вопрос о классификации метрик как измеримых функций на метрическом пространстве с мерой; эта задача подробно рассмотрена и решена в [3, 4].

Вторая задача классификации функций двух переменных связана с группой косых произведений, или с “косой” эквивалентностью. Она ставится так.

Определение 3. *Предположим для простоты, что две функции $f(\cdot,\cdot)$ и $f'(\cdot,\cdot)$ заданы на одном и том же пространстве $(X\times Y,\mu\times\nu)$; будем говорить, что они косоэквивалентны относительно первого аргумента, если существует изоморфизм G пространства на себя вида "косое произведение" $G=(T,\{S_x\}_{x\in X})$, действующий по формуле $G(x,y)=(Tx,S_xy)$, где $T:X\to X$ – автоморфизм пространства (X,μ), а $\{S_x\}$ – измеримое по $x\in X$ семейство автоморфизмов пространства (Y,ν), такой, что*

$$f'(Tx,S_xy)=f(x,y),$$

или, эквивалентным образом,

$$f'(x',y')=f(T^{-1}x',S_x^{-1}y');\quad x=T^{-1}x'.$$

Нетрудно понять, что задача о косой эквивалентности сводится к первой задаче с на единицу меньшим числом аргументов и заменой пространства значений A на пространство вероятностных мер на A (т.е на пространство $\mathrm{meas}(A)$ или, точнее, $\mathrm{Meas}(A)$ – см. далее). Поэтому принципиально новых эффектов здесь нет.

Аналогичным образом можно поставить задачи о классификации функций большего числа переменных; можно также налагать дополнительные ограничения на значения функций (симметрии, неравенства и т.д.) и, что особенно важно, варьировать группы автоморфизмов, относительно которых рассматривается эквивалентность. Сложность классификации существенно зависит от сложности соответствующей группы как подгруппы группы всех автоморфизмов. В данной работе в основном мы рассматриваем первую эквивалентность – относительно прямого произведения групп автоморфизмов переменных.

В работе [1] было дано решение задач о прямой и диагональной эквивалентности в терминах так называемых матричных распределений, т.е. S_∞-инвариантных мер на пространстве матриц расстояний. Мы формулируем этот результат далее и даем его новое доказательство, вытекающее из основной теоремы данной работы о системе совместных распределений как полном инварианте.

1.2. Основные понятия.

Определение 4. *Назовем функцию двух переменных $f(\cdot,\cdot)$, заданную на пространстве $(X\times Y,\mu\times\nu)$, чистой, если разбиение ξ_1 (соответственно ξ_2) пространства (X,μ) (соответственно (Y,ν)) на классы точек $x\in X$ (соответственно $y\in Y$), для которых $f(x,\cdot)=f(x',\cdot)$*

ν-mod 0 *(соответственно* $f(\cdot, y) = f(y', \cdot)$ μ-mod 0*), является разбиением на отдельные точки* mod 0.

Чистота функции двух переменных есть аналог взаимной однозначности функции одной переменной. Общий случай классификации легко сводится к случаю чистой функции с помощью факторизации пространства $(X \times Y, \mu \times \nu)$ по разбиению $\xi_1 \vee \xi_2$ (см. [1]). Групповой смысл понятия чистоты функции таков.

Предложение 1. *Чистота измеримой функции двух переменных равносильна тому, что ее стабилизатор относительно действия групп* $\mathrm{Aut}_Q(X, \mu) \times \mathrm{Id}$ *и* $\mathrm{Id} \times \mathrm{Aut}_Q(Y, \nu)$ *тривиален (т.е. состоит из единичного элемента группы); здесь* $\mathrm{Aut}_Q(X, \mu)$ *или* $\mathrm{Aut}_Q(Y, \nu)$ *– группа преобразований соответствующего пространства* (X, μ) *или* (Y, ν) *с квазиинвариантной мерой, естественно действующая в пространстве измеримых функций (заменой аргумента).*

Более сильное условие (которое труднее сформулировать в терминах сечений) таково.

Определение 5. *Функция называется вполне чистой, если ее стабилизатор относительно действия группы* $\mathrm{Aut}_Q(X, \mu) \times \mathrm{Aut}_Q(Y, \nu)$ *тривиален.*

Как мы увидим, полная чистота означает, что у функции нет симметрий вида прямых произведений подстановок аргументов. По этому образцу можно сформулировать аналогичные условия чистоты и для действия других групп.

Для диагональной классификации чистота функции f означает, что её стабилизатор относительно диагонального действия группы $\mathrm{Aut}_Q(X, \mu)$ тривиален. Заметим, что по теореме, доказанной в [5], стабилизатор относительно диагонального действия любой функции, чистой в смысле предыдущего определения, есть компактная в слабой топологии подгруппа группы $\mathrm{Aut}_Q(X, \mu)$. Нетрудно сформулировать понятие чистоты и его групповой смысл для косой эквивалентности.

§2. Инварианты эквивалентности

2.1. Построение системы согласованных распределений. Далее мы будем говорить только об основном понятии эквивалентности, оставляя читателю несложные переформулировки для других эквивалентностей.

Мы определим систему данных, которая, как мы увидим, полностью характеризует чистую измеримую функцию нескольких переменных с точностью до описанной выше эквивалентности. Фактически речь идет о *системе совместных распределений*, задание которой напоминает колмогоровское задание случайного процесса; но особенность его в том, что параметрическое множество ("время") является пространством с мерой, со всеми вытекающими последствиями. Тем не менее можно сформулировать аналог теоремы Колмогорова о существовании меры на "траекториях" и для такого "псевдопроцесса", причем, поскольку параметрическое меножество есть пространство Лебега, соответствующий процесс сепарабелен, несмотря на континуальность базы. Мы не используем это понятие в дальнейшем и поэтому здесь почти не останавливаемся на подробностях, но считаем его важным. Один из вопросов состоит в том, когда такое задание определяет функцию нескольких аргументов.

Подготовим необходимые пространства. Напомним, что на произведении

$$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ сомножителей}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

рассматривается борелевская структура произведения пространств (порожденная произведениями борелевских множеств на сомножителях) и через $\mathrm{meas}(A^n)$ мы обозначаем симплекс всех борелевских вероятностных мер на борелевском пространстве A^n, $n = 1, 2 \ldots$.

Определим борелевские гомоморфизмы V_X^n и V_Y^n пространств X^n и Y^n, $n = 1, 2 \ldots$, в пространство $\mathrm{meas}(A^n)$ следующим образом. Для $n = 1$ полагаем $V_X(x) \equiv \alpha_x^f \in \mathrm{meas}(A)$ (соответственно $V_Y(y) = \alpha_y^f \in \mathrm{meas}(A)$), где $\alpha_x^f(\alpha_y^f)$ есть распределение сечения $f(x, \cdot)$ как функции одной переменной $y \in Y$ по мере ν (соответственно сечения $f(\cdot, y)$ как функции от переменной $x \in X$ по мере μ). Борелевость отображения легко следует из измеримости функции.

Рассмотрим произвольное $n > 1$ и почти любому по мере $\mu^n \equiv \underbrace{\mu \times \cdots \times \mu}_{n \text{ сомножителей}}$ набору точек $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ (соответственно $(y_1, \ldots y_n) \in Y^n$) сопоставим меру $\alpha_{x_1,\ldots,x_n}^{f,1}$ на A^n, являющуюся совместным распределением набора сечений $\{f(x_1, \cdot), f(x_2, \cdot), \ldots, f(x_n, \cdot)\}$ как вектор-функции на (Y, ν) со значениями в A^n;

точно так же определим распределения $\alpha^{f,2}_{y_1,\dots,y_n}$. Обозначим эти наборы $\Lambda^f_X = \{\alpha^f_{x_1,\dots,x_n}; \{x_i\} \in X^n,\ n = 1, 2 \dots\}$ (соответственно $\Lambda^f_Y(f)$ для вторых аргументов); очевидно, что они когерентны (согласованы) в естественном смысле по проекциям (проекция меры $\alpha^f_{x_1,\dots,x_n}$ на A^n вдоль координаты i совпадает с мерой $\alpha^f_{x_1,\dots,\widehat{x}_i,\dots,x_n}$ на A^{n-1}). Каждый из двух наборов Λ, рассматриваемый как набор мер на A^n, $n = 1, 2, \dots$, назовем *системой совместных распределений* (СР) сечений соответствующего аргумента, а оба вместе – системой совместных распределений (СР) сечений. В аналоге этого определения для случая более двух аргументов уместно рассматривать сечения коразмерности один (а не одномерные сечения).

Замечание 1. Определение совместного распределения сечений наборов очевидным образом корректно по отношению к $\bmod 0$, т.е. набор зависит лишь от класса функций, совпадающих $\bmod 0$.

Замечание 2. Из определения очевидно, что система СР инвариантна относительно введенной эквивалентности; точнее, если две функции (заданные на разных пространствах $(X \times Y, \mu_1 \times \mu_2)$ и $(X' \times Y', \mu'_1 \times \mu'_2)$) эквивалентны и эта эквивалентность осуществляется преобразованием $T \times S : X \times Y \to X' \times Y'$, сохраняющим меру, то это же преобразование переводит систему СР первой функции в систему СР второй функции.

Зафиксируем борелевское множество B в A^n и образуем следующие измеримые подмножества в X и Y:

$$C^X_B = \{x \mid \exists (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y^n\ : (f(x, y_1), f(x, y_2), \dots, f(x, y_n)) \in B\},$$

$$C^Y_B = \{y \mid \exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n : (f(x_1, y), f(x_2, y), \dots, f(x_n, y)) \in B\}.$$

Лемма 1 (Базисность)**.** *Пусть f – чистая функция двух переменных. Совокупность множеств $\{C^X_B\}$, где B пробегает счетный базис борелевских подмножеств в A^n, а n меняется от единицы до бесконечности, образует счетный базис сигма-алгебры измеримых множеств в (X, μ); аналогичное утверждение верно о совокупности подмножеств $\{C^Y_B\}$ в (Y, ν).*

Доказательство. Надо доказать, что сигма-алгебра множеств, натянутая на множества $\{C^X_B\}$, разделяет точки $\bmod\ 0$ в пространстве (X, μ). Но это равносильно следующему утверждению. Рассмотрим такое отношение эквивалентности: $x \sim x' \Leftrightarrow f(x, y_i) = f(x', y_i)$,

$i = 1, \dots, n$, для почти всех наборов $y_1, \dots, y_n \in Y$ по мере ν^n и всех $n = 1, 2, \dots$. В силу эргодической теоремы (точнее, усиленного закона больших чисел, т.е. теоремы Бореля для независимых случайных величин) это означает, что $f(x, \cdot) = f(x', \cdot)$ почти всюду; но последнее соотношение определяет, в силу чистоты функции f, разбиение пространства (X, μ) на отдельные точки mod 0. Следовательно, совокупность множеств $\{C_B^X\}$ порождает полную сигма-алгебру измеримых множеств mod 0 в пространстве (X, μ), и произведение $\{C_B^X\} \times \{C_{B'}^Y\}$ порождает полную сигма-алгебру измеримых множеств в пространстве $(X \times Y, \mu \times \nu)$. По построению меры множеств C_B^X и C_B^Y определяются с помощью совместных распределений сечений функции; следовательно, этими данными измеримая функция f однозначно определяет меру, и, в свою очередь, она сама однозначно определяется совокупностью распределений сечений. Другими словами, если заданы две измеримые чистые функции f, f' на пространстве $(X \times Y, \mu \times \nu)$, у которых совместные распределения сечений совпадают, то и функции совпадают mod 0. □

2.2. Полнота системы инвариантов. Следующая теорема утверждает, что система CP является полной системой инвариантов чистой функции двух переменных.

Теорема 1 (Единственность)**.** *Чистая функция однозначно определяется* mod 0 *своими совместными распределениями сечений в следующем смысле. Предположим, что у двух чистых функций f и f', заданных на пространствах $(X \times Y, \mu \times \nu)$ и $(X' \times Y', \mu' \times \nu')$ соответственно, системы* CP *совпадают, т.е.*

$$\mu(C_B^X(f)) = \mu'(C_B^{X'}(f'),\ \nu(C_B^Y(f)) = \nu'(C_B^{Y'}(f'))$$

для всех базисных борелевских множеств $B \subset A^n$ и всех $n = 1, 2, \dots$. Тогда функции f и f' эквивалентны.

В частности, если две функции заданы на одном и том же пространстве и их системы совместных распределений совпадают, то функции равны mod 0.

Доказательство. Как отмечено в конце предыдущего доказательства, поскольку по лемме системы CP каждой из чистых функций f и f' образуют базисы в сигма-алгебрах измеримых множеств соответствующих пространств, соответствие между множествами $C_B^X(f)$

и $C_B^{X'}(f')$ определяет изоморфизм пространств (X,μ) и (X',μ'), переводящий меру μ в меру μ'. Аналогичное утверждение имеет место для пространств (Y,ν) и (Y',ν'), и произведение этих изоморфизмов есть изоморфизм пространств $(X\times Y,\mu\times\nu)$ и $(X'\times Y',\mu'\times\nu')$, осуществляющий эквивалентность функций f и f'. □

Замечание 3. Написать явную формулу для значений функции f через совместные распределения ее сечений, по-видимому, в общем случае довольно сложно. Для иллюстрации приведем конкретный пример такой задачи. Пусть задано метрическое пространство с мерой; найти расстояние между двумя данными точками (т.е. восстановить метрику), если известны все совместные распределения расстояний до любого заданного конечного числа точек.

2.3. О системах совместных распределений и псевдопроцессах. На самом деле можно точно описать, в какой степени система СР по одной переменной определяет вторую систему совместных распределений, а именно, по системе СР одной переменной функция восстанавливается с точностью до одного преобразования.

Теорема 2. *Две измеримые функции f_1 и f_2, заданные на пространстве $(X\times Y,\mu\times\nu)$, имеющие одну и ту же систему* СР *по одной (например, по первой) переменной, связаны следующим соотношением:*

$$f_2(x,y)=f_1(x,Ty),$$

где $T:Y\to Y$ – сохраняющее меру обратимое преобразование пространства (Y,ν).

Доказательство. Рассмотрим пределы системы совместных распределений только по аргументу x. При фиксированных $x_1,x_2,\dots,x_n$ это мера $\alpha_{x_1,\dots,x_n}$ на A^n, т.е. на конечных упорядоченных наборах точек из A. Но при $n\to\infty$ мы получаем предельную меру, которая сосредоточена уже на мерах на A (вообще говоря, непрерывных). Чтобы убедиться в этом, достаточно рассматривать $\alpha_{x_1,\dots,x_n}$ как меры на эмпирических распределениях в точках x_i, $i=1,\dots,n$, и тогда их пределами станут распределения на A. Но совокупность этих распределений задает распределение функций $\{f(\cdot,y)\}$; более точно, это есть мера на множестве распределений функций от x со значениями в A; недостает лишь только соответствия между точками $y\in Y$ и этими распределениями. Любые два таких соответствия переводятся друг в

друга преобразованием, сохраняющим меру. Таким образом, система СР по первому аргументу x определила функцию f двух переменных с точностью до преобразования второго аргумента, т.е. преобразования пространства (Y, ν), сохраняющего меру. $\square$

Фактически, систему СР можно рассматривать в рамках следующего общего определения, не связанного с какой-либо функцией.

Определение 6. *Рассмотрим стандартное пространство с непрерывной мерой (X, μ) и стандартное борелевское пространство A. Обозначим $(X, \mu)^n = (X^n \times \mu^n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Случайным псевдопроцессом назовем согласованную (когерентную) систему измеримых отображений (точнее, классов отображений* $\mathrm{mod}\, 0$*):*

$$V_n : (X, \mu)^n \to A^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \alpha_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \in \mathrm{meas}(A^n),$$

где $\mathrm{meas}(\cdot)$ *– симплекс вероятностных мер на соответствующем борелевском пространстве; когерентность означает, что*

$$E_{x_i} \alpha^n(x_1, \ldots, x_n) = \alpha^{n-1}(x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_n), \quad n > 1.$$

В частности, выше по измеримой функции двух переменных мы определили такой случайный псевдопроцесс (по каждой переменной). Аналогично тому, как согласованная система совместных распределений определяет по Колмогорову некоторую меру на пространстве траекторий, точно так же здесь мы определили псевдопроцесс как меру, но не на множестве траекторий, а, по-видимому, на измеримых функциях от точек параметрического множества со значениями в A. Не исключено, что это понятие уже встречалось ранее как процесс на параметрическом множестве, являющемся пространством Лебега. Отметим, что, несмотря на континуальность параметрического множества, сепарабельность сигма-алгебры, на которой естественно задан соответствующий закон, имеет место в силу измеримости отображений V_n. Вопрос о свойствах определяемого объекта и о том, какие псевдопроцессы определяют функции двух переменных, а какие – полиморфизмы или более общие объекты, мы рассмотрим в другом месте.

2.4. Описание модели. Опишем нормальную форму относительно рассматриваемой эквивалентности, которую мы назовем *каноническим изображением чистой измеримой функции двух переменных со значениями в борелевском пространстве A.*

Сначала построим пространство-произведение, на котором будет определена нормальная форма. Этим пространством будет квадрат (произведение на себя) следующего пространства $\mathrm{Meas}(A)$, к определению которого мы переходим.

Рассмотрим симплекс $\mathrm{meas}(A)$ всех борелевских вероятностных мер на борелевском пространстве A, снабженный слабой топологией, определяемой по счетному базису сигма-алгебры борелевских множеств.

Пространство $\mathrm{Meas}(A)$ есть прямое (топологическое) произведение симплекса $\mathrm{meas}(A)$ на компакт $S = [0,1] \bigcup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ – объединение отрезка и счетного множества точек. Удобно считать это произведение $\mathrm{Meas}(A)$ тривиальным расслоением над $\mathrm{meas}(A)$ со слоем S и обозначить через π естественную проекцию $\mathrm{Meas}(A) \to \mathrm{meas}(A)$. Пространство $\mathrm{Meas}(A)$ есть компакт в естественной топологии; его можно интерпретировать как пространство борелевских вероятностных мер на A с кратностями, или *пространство маркированных мер*, а слои – как множество возможных марок.

Опишем теперь класс мер, который мы будем рассматривать на этом пространстве.

Определение 7. *Борелевскую вероятностную меру на* $\mathrm{Meas}(A)$ *назовем подходящей, если она имеет следующий вид: ее проекция на* $\mathrm{meas}(A)$ *есть произвольная борелевская вероятностная мера на симплексе* $\mathrm{meas}(A)$ *(т.е. "мера на мерах"), а условные меры на слоях S превращают их в пространства Лебега общего вида, т.е. являются непрерывными лебеговыми мерами на отрезках, причем меры атомов монотонно не возрастают по n.*

Заметим, что подходящая мера определяется единственным образом, если задана ее проекция на $\mathrm{meas}(A)$ и типы условных мер на слоях. Важно отметить, что подходящая мера допускает группу автоморфизмов, сохраняющих меру в слоях; эта группа, в зависимости от подходящей меры, может быть единичной в том или ином слое или во всех слоях – так будет, если данное распределение встречается как распределение сечения один раз. Эту группу назовем послойной группой

подходящей меры; если подходящая мера имеет слои с непрерывной компонентой, то послойная группа нетривиальна.

Определение 8. *Измеримая функция F, заданная на пространстве* $\mathrm{Meas}(A) \times \mathrm{Meas}(A)$, *снабженном произведением подходящих мер* $\mu \times \nu$, *и принимающая значения в борелевском пространстве A, удовлетворяет условию тавтологичности (или называется тавтологической), если распределения сечений функции $y \mapsto F(x,y)$ (соответственно $x \mapsto F(x,y)$) для почти всех точек $x \in \mathrm{Meas}(A)$ (соответственно $y \in \mathrm{Meas}(A)$), как функции на* $\mathrm{Meas}(A)$ *от другого аргумента, равны мерам $\pi(x) \in \mathrm{meas}(A)$ (соответственно $\pi(y) \in \mathrm{meas}(A)$) на A.*

2.5. Каноническое изображение функций. Используя системы CP, мы укажем некоторую процедуру, позволяющую последовательно уточнять изображение функции, которое сходится к каноническому изображению.

Теорема 3. *Для всякой чистой измеримой функции f на произвольном произведении двух пространств Лебега с непрерывной мерой со значениями в борелевском пространстве A существует единственные подходящие меры μ_f и ν_f на* $\mathrm{Meas}(A)$ *и единственная измеримая, чистая, тавтологическая функция, обозначаемая* $\mathrm{Can}\,(f)$, *на пространстве* $(\mathrm{Meas}(A) \times \mathrm{Meas}(A), \mu_f \times \nu_f)$, *такая, что функция f эквивалентна функции* $\mathrm{Can}\, f$. *Эту функцию будем называть каноническим изображением функции f. Меры μ_f и ν_f являются инвариантами класса эквивалентных функций.*

Таким образом, тавтологические функции доставляют нормальную форму чистых функций; в частности, теорема утверждает, что эквивалентные чистые функции имеют одно, с точностью до изоморфизма слоев (см. далее), каноническое изображение, а неэквивалентные функции – различные. Сразу заметим, что еще одно построение этой модели функции будет проведено в последнем параграфе. Оно основано на другом подходе к инвариантам эквивалентности и отличается от построения в доказательстве данной теоремы тем, что пространство Meas и маркировка появляются там автоматически; точнее, произвол связанный с автоморфизмом слоев, заменяется произволом в выборе исходной матрицы, по которой строится модель функции.

Доказательство. Пусть измеримая чистая функция f со значениями в борелевском пространстве A задана на пространстве $(X \times Y, \mu \times \nu)$. Будем обозначать через $f^1|_x(y) = f(x,y)$ (соответственно $f^2|_y(x) = f(x,y)$) ограничение функции при фиксации первого (второго) аргумента; если g – функция на некотором пространстве с мерой γ, то $\mathrm{dist}(g) = g_*\gamma$ – образ меры на пространстве значений, или распределение функции g.

Расмотрим два отображения $L_f^1 : X \to \mathrm{meas}(A)$ и $L_f^2 : Y \to \mathrm{meas}(A)$, определяемые условием $L_1(x) = \mathrm{dist}(f^1|_x)$, $L_2(y) = \mathrm{dist}(f^2|_y)$, т.е. образ точки x (соответственно y) есть распределение ограничения $f^1\big|_x$ (соответственно $f^2|_y$) как мера на A (т.е. элемент пространства $\mathrm{meas}(A)$).

Оба отображения факторизуют пространства (X,μ), (Y,ν) по разбиению на классы точек, для которых распределения над точками совпадают. Эти разбиения инвариантны в том смысле, что любая эквивалентность переводит их в себя.

Но, очевидно, из определения пространства Meas следует, что можно (уже неинвариантным образом) поднять отображения L_1, L_2 до изоморфизмов пространств $\overline{L}_1 : X \to \mathrm{Meas}(A)$, $\overline{L}_2 : Y \to \mathrm{Meas}(A)$, т.е. $\overline{L}_f^1$ и $\overline{L}_f^2$ суть изоморфизмы mod 0, что означает, что образы различных точек x, x' (соответственно y, y') с одинаковыми распределениями $\mathrm{dist}\left(f^1\big|_x\right) = \mathrm{dist}\left(f^1\big|_{x'}\right)$ (соответственно $\mathrm{dist}\left(f^2\big|_y\right) = \mathrm{dist}\left(f^2\big|_{y'}\right)$) в Meas будут уже различны mod 0.

Это условие очевидным образом выполнимо, так как $\mathrm{Meas}(A)$ расслаивается над $\mathrm{meas}(A)$ со слоями, которые можно превратить в произвольное пространство Лебега, но изоморфизм определен только с точностью до послойных автоморфзимов. Мера $\mu \times \nu$ переносится на $\mathrm{Meas}(A) \times \mathrm{Meas}(A)$, причем её проекция на $\mathrm{meas}(A)$ есть инвариант эквивалентности.

Зафиксируем какой-нибудь выбор изоморфизмов и обозначим $(L_f^1)_*\mu = \mu_f$ и $(L_f^2)_*\nu = \nu_f$. Тем самым построен изоморфизм

$$L_f^1 \times L_f^2 : (X \times Y, \mu \times \nu) \to (\mathrm{Meas}(A) \times \mathrm{Meas}(A), \mu_f \times \nu_f).$$

Рассмотрим теперь классы точек на X и на Y с одинаковыми распределениями $\mathrm{dist}(f^1|_x) = \mathrm{dist}(f^1|_{x'})$ (соответственно $\mathrm{dist}(f^2|_y) = \mathrm{dist}(f^2|_{y'})$) mod 0. С каждым таким классом C можно поступить так. Разобьем его квадрат $C \times C$ на классы, внутри каждого из которых совместное распределение, отвечающее координатам c_1 и c_2, одинаково.

Таким образом, можно уточнить наши изоморфизмы на классах, потребовав, чтобы классы сохранялись при отображении. Затем сделаем то же самое с тройными совместными распределениями, и т.д. *Из теоремы* 1 *о полноте системы CP следует, что (для чистой функкции) произведение всех таких разбиений сходится к разбиению на точки.* Поэтому этот процесс приведет к построению однозначных изоморфизмов $\overline{L}_1 : X \to \mathrm{Meas}(A)$ и $\overline{L}_2 : Y \to \mathrm{Meas}(A)$, которые перенесут на образ меры μ, ν и функцию f. Обозначим эти образы через μ_f, ν_f. Мы получили, таким образом, инвариантно определенное пространство с мерой $(\mathrm{Meas}(A) \times \mathrm{Meas}(A), \mu_f \times \nu_f)$ и функцию на нем, обозначаемую $\mathrm{Can}\,(f)$ и называемую каноническим изображением функции f. Функция $\mathrm{Can}\,(f)$ тавтологична, это следует из первого шага построения. Единственность вытекает из той же теоремы о полноте.

Если мы применим нашу конструкцию к пространствам $X = Y = \mathrm{Meas}(A)$ и подходящим мерам μ и ν на $\mathrm{Meas}(A)$, а в качесте F возьмем произвольную чистую тавтологическую функцию на $(\mathrm{Meas}(A) \times \mathrm{Meas}(A), \mu \times \nu)$, то отображения L^1_f и L^2_f, как легко проверить, можно считать тождественными. Поэтому *всякая чистая тавтологическая функция на пространстве* $(\mathrm{Meas}(A) \times \mathrm{Meas}(A), \mu \times \nu)$, *где* μ *и* ν *– подходящие меры, есть каноническое изображение (себя самой).* $\square$

Таким образом, класс тавтологических функций на пространстве $\mathrm{Meas}(A) \times \mathrm{Meas}(A)$ с некоторыми подходящими мерами μ, ν есть класс всех возможных нормальных форм чистых функций двух переменных: любая чистая функция эквивалентна в точности одной из функций этого класса.

Сделаем несколько комментариев по поводу канонического изображения.

1. Итоговое пространство $(\mathrm{Meas}(A) \times \mathrm{Meas}(A), \mu_f \times \nu_f)$ и функция f действительно каноничны, так как их построения не используют неинвариантных относительно эквивалентности объектов. Собственно, каноничность изображения следует непосредственно из чистоты функции, поскольку стабилизатор в каждом сомножителе тривиален и поэтому модель определена единственным образом.

2. Рассмотрим простейший частный случай. Предположим, что функция суперчистая, т.е. распределения сечений $f(x, \cdot)$ (соответственно $f(\cdot, y)$) для почти всех точек $x \in X$ ($y \in Y$) различны. Тогда изоморфизм между пространством (X, μ) (соответственно (Y, μ))

и пространством $\mathrm{meas}(A)$, переводящий точку x (соответственно y) в меру на A, являющуюся распределением функции $f(x,\cdot)$ (соответственно $f(\cdot,y)$), и есть нужный изоморфизм. В этом случае базис строится только по одномерным распределениям. Общий случай становится яснее, если сказать, что многомерные распределения нужны для определения изоморфизма только лишь потому, что они позволяют расщепить распределения, имеющие кратность в системе СР. Однако после построения изоморфизма нужно дать явное описание функции в терминах канонического изображения, и во всех случаях, включая описанный простейший, это делается с помощью системы СР. Интересно расклассифицировать измеримые функции по тому, каков минимальный запас совместных распределений, необходимых для их восстановления.

3. Пространство $\mathrm{meas}(A)\times\mathrm{meas}(A)$ есть топологическое пространство (произведение симплексов), как указывалось выше. Но и пространство $\mathrm{Meas}(A)\times\mathrm{Meas}(A)$ также есть компакт, поскольку $\mathrm{Meas}=\mathrm{meas}\times S$. Можно определить формально другую топологию, используя совместные двумерные, а не только "одномерные" распределения. Для этого достаточно воспользоваться лишь двумерными распределениями и считать окрестностью данной точки те точки, для которых совместное двумерное распределение, отвечающее этим двум точкам, сосредоточено около диагонали в том или ином смысле.

4. Если область значений изучаемых функций A снабжена топологией, то можно определить понятие *измеримой непрерывности* функции, точнее ее канонического изображения. Следует считать непрерывными такие функции, которые имеют близкие значения в двух точках, если близки их двумерные распределения.

Пример. Рассмотрим метрику d на борелевском пространстве A и определим метрику на $\mathrm{Meas}(A)\equiv X$, полагая $d_r(x,y)=E_{\alpha_{x_1,x_2}}r(u,v)$, где $u,v\in A$, а математическое ожидание берется относительно совместного распределения α_{x_1,x_2}. Аналогично определим метрику на $Y=\mathrm{Meas}$, а затем на $X\times Y$ (как сумму метрик на координатах). Назовем функцию *измеримо непрерывной*, если она непрерывна в этой метрике. Кратко это можно выразить так: если средние значения функций одной переменной при фиксации второго аргумента близки, то и значения функций в данной точке близки.

Предположительно, допустимая метрика как функция двух переменных на пространстве с мерой измеримо непрерывна.

Гипотеза 1. *Симметричная измеримо непрерывная функция двух переменных на пространстве $(X \times X, \mu \times \mu)$ имеет корректно определенное ограничение на диагональ. Более общо, для любого измеримого разбиения корректно определено ограничение измеримо непрерывной функции двух переменных на почти каждый элемент разбиения.*

§3. Связь со случайными матрицами: классификация через рандомизацию

3.1. Теорема о восстановлении. Напомним основные определения и результаты работы [1]. Пусть, как и ранее, f – чистая функция двух переменных (x, y), определенная на пространстве $X \times Y$ с продакт-мерой $\mu \times \nu$, со значениями в борелевском пространстве A. Образуем бесконечное произведение $(X^\infty \times Y^\infty, \mu^\infty \times \nu^\infty)$ с бернуллиевскими мерами и определим отображение

$$F_f : (X^\infty \times Y^\infty) \to M_\infty(A),$$

где $M_\infty(A)$ – пространство бесконечных матриц со значениями в A, по формуле

$$F(\{x_i\}_1^\infty, \{y_j\}_1^\infty) = \{f(x_i, y_j)\}_{i,j=1}^\infty.$$

Отображение F определено корректно по отношению к mod 0 и переводит меру $\mu^\infty \times \nu^\infty$ в некоторую меру D_f, которая названа *матричным распределением функции f*. Очевидно, что мера D_f есть борелевская вероятностная мера на $M_\infty(A)$, инвариантная относительно группы всех подстановок строк и столбцов матрицы и эргодичная относительно действия этой группы. Это следует из тех же хорошо известных фактов о мере Бернулли.

Теорема 4 ([1]). *Мера D_f есть полный инвариант функции f относительно эквивалентности; иначе говоря, две чистые функции f и f' эквивалентны тогда и только тогда, когда меры D_f и $D_{f'}$ совпадают.*

Заметим еще, что отображение F эквивариантно относительно квадрата симметрической группы $S_\mathbb{N} \times S_\mathbb{N}$; в пространстве $M_\infty(A)$ группа действует подстановками строк и столбцов. При этом имеет место следующее простое утверждение.

Предложение 2. *Отображение F есть изоморфзим тогда и только тогда, когда функция вполне чистая (см. определение в §1), т.е. ее стабилизатор в произведении групп* $\mathrm{Aut}_Q(X,\mu)\times\mathrm{Aut}_Q(Y,\nu)$ *тривиален.*

В этом случае отображение F осуществляет изоморфизм (бернуллиевских) действий квадрата симметрической группы в этих пространствах. В случае чистой функции ядро отображения F состоит из орбит группы симметрий функции и, как отмечалось (см. [5]), группа симметрий компактна, поэтому разбиение на орбиты измеримо. Добавим, что факторизация пространства $(X\times Y,\mu\times\nu)$ по разбиению на орбиты возможна, но структура прямого произведения в факторе теряется. Любопытно, что хотя для не вполне чистых, но чистых функций F_f не есть изоморфизм пространств $(X^\infty\times Y^\infty,\mu^\infty\times\nu^\infty)$ и $(M_\infty(A),D_f)$, тем не менее, как видно из доказательства теоремы о восстановлении и леммы о базисности, базис самого пространства $(X\times Y,\mu\times\nu)$ восстанавливается по базису образа $(M_\infty(A),D_f)$.

Построение, приводимое ниже, дает, в частности, еще одно доказательство теоремы о восстановлении; оно использует теорему 1 и проясняет идеи, высказанные в [1].

С очевидными изменениями формулируется такая же теорема о диагональной эквивалентности. В этом случае надо брать одну последовательность $\{x_i\}_1^\infty$ независимых случайных величин, распределенных на $X=Y$ по мере $\mu=\nu$. В том случае, когда (X,μ) есть метрическое пространство с мерой, а функция f есть метрика как измеримая функция на $(X\times X,\mu\times\mu)$ (чистота ее очевидна), это есть теорема о том, что соответствующая мера на пространстве метрик на натуральном ряде есть полный инвариант метрической тройки – метрического пространства с мерой. Это было доказано в [3] в несколько другой формулировке, а позже в [4] более простым (эргодическим) способом в указанном виде.

Мы имеем, таким образом, два типа полных инвариантов эквивалентности произвольных чистых функций двух аргументов и, тем самым, два способа классификации измеримых функций. Один дается *матричным распределением функции*, и этот способ можно назвать *классификацией посредством рандомизации*, поскольку инвариант есть рандомизированная сетка значений функции. Хотя определение его весьма просто, сам по себе он не дает модели функции, т.е. не

дает способа построения функции по данному инварианту – случайной матрице. Именно такое построение мы и проведем ниже. Второй способ, рассмотренный в этой статье, более громоздок; это классификация с помощью системы совместных распределений, и она приводит к описанию нормальной формы – канонического изображения, которое и есть модель функции.

В следующем пункте мы соединим оба способа, а именно покажем, как по матричному распределению построить каноническое изображение, т.е. дать явное построение функции с заданным инвариантом. Суть построения – в *эргодическом методе* [7], точнее в систематическом использовании эргодической теоремы для действия симметрической группы, а более конкретно – в последовательном построении эмпирических распределений. Еще один вариант построения реализации измеримой функций по ее матричному распределению был рассмотрен в неопубликованной рукописи [6]. В терминах нижеследующей конструкции он использует лишь первое усреднение и поэтому также менее громоздок, но система совместных распределений при этом игнорируется.

3.2. Построение функции по матричному распределению. Пусть задана борелевская вероятностная мера D на множестве бесконечных матриц $M_{\mathbb{N}}(A)$, являющаяся матричным распределением некоторой измеримой функции со значениями в борелевском пространстве A и заданная на некотором пространстве $(X \times Y, \mu \times \nu)$; мы никак не будем испольовать это пространство. Нижеследующее построение использует лишь то, что мера D инвариантна и эргодична относительно действия группы $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$ – квадрата симметрической группы – подстановками строк и столбцов. Построение будет проводиться следующим образом, который и составляет эргодический метод. Мы выберем “типичную” относительно меры D (т.е. почти любую по этой мере) матрицу и будем строить некоторое пространство, меру на нем и нужную функцию.

Лишь после этого мы воспользуемся тем, что мера D есть матричное распределение некоторой (вполне чистой) функции, и дадим прямое описание тех мер D (названных в [1] простыми), которые могут быть матричными распределениями. В этом случае мы увидим, что для построенной функции мера D и есть ее матричное распределение (и поэтому она эквивалентна исходной). Тем самым будет построено

каноническое изображение функции с заданным матричным распределением, и связь с содержанием предыдущего параграфа состоит в том, что мы строим систему совместных распределений конструируемой функции. Разобьем построение на этапы.

1. Обозначим матрицу через $R = \{r_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$. В силу инвариантности меры D относительно подстановок столбцов мы можем применить эргодическую теорему к действию группы $S_{\mathbb{N}}$, рассматривая "эмпирическое распределение строк":

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \sum_{g\in S_n} \chi_B(\{r_{i,g^{-1}(1)}\}) \equiv m_R(B).$$

Здесь B – некоторое цилиндрическое множество в A^{∞}, а χ_B – его характеристическая функция; формула подсчитывает, как часто при подстановках первый столбец попадает в множество B. Таким образом, мы получили вероятностную меру m_R на пространстве $A^{\mathbb{N}}$; она, разумеется, зависит от матрицы R.

2. Используя инвариантность меры D относительно группы подстановок строк, найдем "эмпирическое распределение мер". Подробнее, мы поднимаем подстановочное действие группы $S_{\mathbb{N}}$ на строках с пространства $A^{\mathbb{N}}$ на симплекс мер на нем – $\mathrm{meas}(A^{\mathbb{N}})$; рассмотрим орбиту построенной меры m_R на $A^{\mathbb{N}}$ относительно этого действия и будем искать эмпирическое распределение мер по этой орбите. Для этого нужно рассмотреть какой-нибудь базис в совокупности борелевских множеств на симплексе мер. Пусть $\mathcal{B}$ – некоторое борелевское множество в пространстве мер. Тогда эмпирическая мера этого множества (мер на $A^{\mathbb{N}}$) будет выражаться формулой

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \sum_{g\in S_n} \chi_{\mathcal{B}}(g(m_R)) \equiv M_R(B).$$

В этой формуле действие элемента $g \in S_n$ применяется к мере m_R. Этот предел существует по тем же причинам для D-почти всех матриц R; это двойной предел, если исходить из матрицы R, и его существование следует из ивариантности меры D относительно второй (строчной) компоненты группы $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$. Мы построили меру на $\mathrm{meas}(A^{\mathbb{N}})$ (т.е. меру на мерах в $A^{\mathbb{N}}$), индуцированную мерой m_R и косвенно матрицей R. Обозначим ее через M_R.

3. Теперь проделаем то же самое в другом порядке. Сначала построим по той же матрице R эмпирическую меру m^R на столбцах матрицы (используя инвариантность относительно подстановок строк); это снова мера на A^∞.

4. Затем, так же, как и в п. 2, усредним меру m^R по столбцам и получим снова меру на $\mathrm{meas}(A^{\mathbb{N}})$, т.е. "меру на мерах" M^R, аналогичную M_R.

5. Следующее важное утверждение состоит в том, что каждая из мер M_R и M^R, которые заданы изначально как меры на $\mathrm{meas}(A^\infty)$, индуцируют по паре мер на $\mathrm{Meas}\, A^n$ при каждом $n = 1, 2, \dots$, а именно, конечномерные по отношению к $\mathrm{meas}(A^\infty)$ эмпирические распределения на мерах на A^n; мы обозначим их μ_R^n и ν_R^n. При $n = 1$ они играют роль в точности такую же, как меры μ_f и ν_f на $\mathrm{Meas}\, A$, которые мы ввели в §2 при определении канонического изображения функции. С помощью этих мер мы получаем систему совместных распределений будущей функции и, следовательно, саму функцию. В этом и состоит переход к каноничскому изображению. Мы оставляем пояснения о том, какие системы совместных распределений определяют измеримую функцию. В предыдущем параграфе мы шли в противоположном направлении и строили систему совместных распределений по данной функции. Можно показать, что и здесь меры M_R и M^R определяют функцию, но ниже этот факт не используется, поскольку наличие функции уже гарантировано и вопрос состоит в том, как ее реализовать. Обозначим эту функцию на $\mathrm{Meas}\, A \times \mathrm{Meas}\, A$ через f_R; она и есть цель нашего построения. Пока что мы использовали только инвариантность меры D относительно квадрата симметрической группы.

Сформулируем основные утверждения об этой функции и о всем построении. Определим сначала класс мер на пространстве матриц, выделяющихся условием, называемым простотой меры D.

Определение 9. *Инвариантная эргодическая относительно квадрата симметрической группы мера D на пространстве матриц $M_{\mathbb{N}}(A)$ называется простой, если описанная выше процедура, сопоставляющая матрице $R \in (M_{\mathbb{N}}(A), D)$ пару мер*

$$(m_R, m^R) \in \mathrm{Meas}(A^\infty) \times \mathrm{Meas}(A^\infty),$$

является изоморфизмом пространств с мерой

$$(M_{\mathbb{N}}(A), D) \to (\mathrm{Meas}(A^\infty) \times \mathrm{Meas}(A^\infty), M_R \times M^R).$$

Различие между чистыми и вполне чистыми функциями в контексте матричных распределений заметил У. Хабоек в 2005 г.; оно не отмечено в исходной работе [1], что привело к неверному утверждению в ней о том, что матричные распределения чистых функций суть простые меры, которое было исправлено в [6]. Это различие вынуждает наряду с простыми мерами определить *полупростые меры* как матричные распределения чистых функций. Прямое описание полупростых мер в тех же терминах, в каких описаны простые меры, вряд ли возможно, и причина этого в том, что факторизация по компактной подруппе симметрий функции нарушает структуру прямого произведения, поэтому описанная процедура приводит к функциям на более сложном объекте, поскольку аргументы функции перестают быть независимыми. Но случай простых мер и, соответственно, вполне чистых функций исчерпывается следующим образом.

Теорема 5. 1. *Если мера D эргодична, то меры M_R и M^R на* $\mathrm{meas}(A^\infty)$ *и, следовательно, меры μ_R, ν_R и функция f_R, построенная выше, совпадают для почти всех по мере D матриц R. Если мера $D = D_f$ есть матричное распределение некоторой вполне чистой функции f, то построенная функция f_R эквивалентна f и ее матричное распределение совпадает с мерой D. Таким образом, каноническое изображение функции f_R и есть реализация функции с заданным матричным распределением.*

2. *Класс простых мер совпадает с классом матричных распределений D_f вполне чистых измеримых функций f.*

Доказательство. Первое утверждение п. 1 непосредственно следует из эргодичности действия группы $S_\mathbb{N} \times S_\mathbb{N}$. Остальная часть п. 1 сводится к более подробному комментированию приведенного построения, которое и является доказательством. Сравнение его с построением канонического изображения показывает, что искомая функция построена с помощью системы совместных распределений, о чем уже упоминалось.

Переходим к утверждению п. 2. Пусть задана вполне чистая функция и выбрана типичная реализация последовательности независимых случайных величин $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$. Рассмотрим матрицу $R = \{f(x_i, y_j)\}$ и проследим за ходом процедуры, описанной в п. 3.2. Первый шаг (нахождение меры m_R) равносилен вычислению совместных распределений счетного числа функций $f(x_1, \cdot), f(x_2, \cdot), \ldots$ как

функций второго аргумента. Мера m_R на A^∞ и есть совместное распределение этих функций. Второй шаг – вычисление эмпирической меры по $\{x_i\}_i$ – определяет меру M_R (меру на мерах), но эта мера есть не что иное, как мера на распределениях функций $f(\cdot, y)$; более точно, это образ меры на (Y, ν) при отображении $y \mapsto \mathrm{dist}_x[f(\cdot, y)]$, где dist_x означает распределение функции от x при фиксированном y. Вторая серия операций с заменой ролей строк и столбцов комментируется точно так же. Наконец, отображение F_f в случае вполне чистой функции есть, как было отмечено, изоморфизм, поэтому изоморфизмом является и отображение пространства матриц, снабженных мерой D_f, в пространство эмпирических мер в определении простой меры.

Противоположное утверждение с очевидностью вытекает из конструкции. А именно, рассмотрим какую-либо простую меру D на $M_{\mathbb{N}}(A)$; в силу изоморфизма пространств в определении простоты мы не теряем информации при построении функции $f_R = f$, и полученная функция является вполне чистой, так как отображение F_{f_R} также есть изоморфизм. Убедиться в том, что матричное распределение этой функции есть мера D, можно, опять-таки, просмотрев то, как строилась функция f_R по системе совместных распределений: фактически, конечномерные ограничения мер M_R и M^R дают аппроксимацию матричного распределения конечномерными распределениями. $\square$

Нетрудно видеть, что описанное построение есть точное повторение процедуры, которая описывала построение канонического изображения функции, и даже в несколько более формализованном виде, так как появление пространства Meas (учет кратностей распределений) здесь происходит автоматически. Таким образом, по матрице R мы построили систему совместных распределений, что по теореме о базисе позволяет восстановить функцию и, следовательно, матричное распределение.

Литература

1. А. М. Вершик, *Классификация измеримых функций нескольких аргументов и инвариантно распределенные случайные матрицы.* — Функц. анал. и прил. **36**, вып. 2 (2002), 12–27.
2. В. А. Рохлин, *Метрическая классификация измеримых функций.* — Успехи мат. наук **12**, вып. 2(74) (1957), 169–174.
3. M. Gromov, *Metric Structure for Riemannian and non-Riemannian Spaces.* Birkhäuser, 2001.

4. А. Вершик, *Случайные метрические пространства и универсальность.* — Успехи мат. наук **59**, вып. 2 (2004), 65–104.
5. A. Vershik, U. Haboeck, *Compactness of the congruence group of measurable fuctions in several variables.* — Zap. Nauchn. Semin. POMI **334** (2005), 57–67.
6. A. Vershik, U. Haboeck, *Canonical model of the measurable function of two variables with given matrix distributions.* Manuscript, Vienna, 2005.
7. А. Вершик, *Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечномерных групп.* — Докл. Акад. наук **218**, вып. 4 (1974), 749–752.

Vershik A. M. On classification of measurable functions of several variables.

We define a normal form (called the canonical image) of an arbitrary measurable function of several variables with respect to a natural group of transformations, describe a new complete system of its invariants (the system of joint distributions), and relate these notions to matrix distributions, i.e., another invariant of measurable functions, which was found earlier and is a random matrix.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Поступило 10 октября 2012 г.