Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 403, 2012 г.

А. М. Бородин, А. И. Буфетов

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПЛАНШЕРЕЛЕВСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ

§1. Введение

Асимптотический анализ мер на разбиениях, возникающих из теории представлений, является хорошо известным и распространенным объектом для исследований. Он важен для самой теории представлений (см. работу [4] и ссылки в ней) и тесно взаимосвязан с теорией случайных матриц, системами взаимодействующих частиц, перечислительной комбинаторикой и другими областями, для которых он часто предоставляет ключевые технические средства (см., например, [9, 13]).

Обычно такие меры возникают следующим образом. Пусть у нас есть группа с хорошо известным набором неприводимых представлений, которые могут быть параметризованы разбиениями или схожими объектами. Тогда разложение какого-либо естественного приводимого представления этой группы на неприводимые компоненты дает разложение общей размерности представления на размерности изотипических компонент; отношение соответствующей размерности к размерности всего пространства и будет весом меры. Данная процедура корректно определена не только для конечномерных представлений, но и для бесконечномерных с конечным следом; вес (параметра) изотипической компоненты определяется в этом случае как след проектора на нее, при условии, что след нормализован так, что его значение на тождественном операторе равно единице.

Ключевые слова: бесконечномерная унитарная группа, планшерелевское представление, сигнатура.

А. М. Бородин был поддержан грантом NSF DMS-1056390. А. И. Буфетов был поддержан стипендией фонда Саймонса–НМУ, фондом Мебиуса для молодых ученых и грантом РФФИ–CNRS 10-01-93114.

Альтернативный подход к подобным мерам состоит в определении средних по этим мерам на подходящих наборах функций на множестве параметров неприводимых представлений. Эти средние возникают как следы операторов во всем пространстве представления, являющихся скалярными в каждой изотипической компоненте. В свою очередь, эти операторы являются образами центральных элементов групповой алгебры в случае, если группа конечна, и универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли в случае, если рассматривается группа Ли. Эти центральные элементы образуют коммутативную подалгебру, которая отображается в алгебру функций на параметрах, т.е. на разбиениях или схожих объектах. Значение функции, соответствующей центральному элементу, на параметре представления равняется (скалярному) значению этого элемента на этом неприводимом представлении.

С точки зрения теории вероятностей данный подход выглядит полностью удовлетворительным. Однако с точки зрения теории представлений неясно, почему мы можем рассматривать лишь коммутативные подалгебры, в то время как основной интерес теории представлений заключается в некоммутативных эффектах.

Цель данной работы – продвинуться дальше этого коммутативного ограничения.

Более подробно, для некоторого представления бесконечномерной унитарной группы с конечным следом, описанного ниже, мы рассматриваем семейство коммутативных подалгебр универсальной обертывающей алгебры, таких, что элементы различных подалгебр, вообще говоря, не коммутируют. Далее, мы рассматриваем предельный режим, для которого известно (см. [3]), что меры, отвечающие каждой из подалгебр, аппроксимируются двумерными гауссовскими свободными полями (GFF – Gaussian Free Field). Мы изучаем “совместное распределение” этих GFF, чтобы это ни могло значить.

Для любого элемента универсальной обертывающей алгебры можно определить его “среднее” как след его образа в представлении. Поэтому при заданном представлении можно определить “средние” для произвольных произведений элементов из наших подалгебр, несмотря на то, что они не коммутируют.

Наш основной результат заключается в том, что для некоторых *планшерелевских* представлений эти “средние” сходятся к настоящим

средним соответствующих наблюдаемых гауссовского процесса, состоящего из семейства коррелированных GFF. Поэтому изначальное отсутствие коммутативности исчезает, но предельные гауссовские свободные поля, возникающие из различных подалгебр, не становятся независимыми.

Этот же предельный объект (набор коррелированных гауссовских свободных полей) был ранее получен как универсальный глобальный предел для флуктуаций собственных значений различных подматриц вигнеровской эрмитовой случайной матрицы, см. [2]. Можно предполагать, что этот процесс возникнет и для других, не планшерелевских фактор-представлений бесконечномерной унитарной группы при соответствующих предельных режимах.

Данная статья является анонсом, доказательства будут приведены в последующей публикации.

Благодарности

Авторы благодарны Г. И. Ольшанскому за многочисленные полезные обсуждения.

§2. Характеры унитарных групп

Пусть I – произвольное конечное множество натуральных чисел. Пусть $U(I) = (u_{ij})_{i,j\in I}$ – группа унитарных матриц, составленных из элементов, индексы которых лежат в множестве I. Будем обозначать множество $\{1, 2, \dots, N\}$ символом $\overline{1, N}$. Определим цепочку вложенных групп

$$U(\{1\}) \subset U(\{1,2\}) \subset \dots U(\overline{1,N}) \subset U(\overline{1,N+1}) \subset \dots,$$

в которой вложение $U(\overline{1,k}) \subset U(\overline{1,k+1})$ определяется равенствами $u_{i,k+1} = u_{k+1,i} = 0$, $1 \le i \le k$, $u_{k+1,k+1} = 1$. *Бесконечномерной унитарной группой* называется объединение этой цепочки групп

$$U(\infty) = \bigcup_{N=1}^{\infty} U(\overline{1,N}).$$

Сигнатурой (также называемой *старшим весом*) длины N называется множество из N невозрастающих целых чисел $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_N$. Пусть $\mathbb{GT}_N$ – множество всех таких сигнатур. Будем говорить, что сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\mu \in \mathbb{GT}_{N-1}$ *перемежаются*, и писать $\mu \prec \lambda$, если выполнено условие $\lambda_i \ge \mu_i \ge \lambda_{i+1}$ для всех $1 \le i \le N-1$. Определим

также множество $\mathbb{GT}_0$, которое состоит из одного элемента, обозначаемого символом $\varnothing$. Будем считать, что $\varnothing \prec \lambda$ для любой сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}_1$.

Графом Гельфанда–Цетлина называется граф $\mathbb{GT}$, множеством вершин которого является $\bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \mathbb{GT}_N$, а ребро проводится между двумя сигнатурами λ и μ тогда и только тогда, когда либо $\lambda \prec \mu$, либо $\mu \prec \lambda$. *Путем* между сигнатурами $\kappa \in \mathbb{GT}_K$ и $\nu \in \mathbb{GT}_N$, $K < N$, называется последовательность

$$\kappa = \lambda^{(K)} \prec \lambda^{(K+1)} \prec \cdots \prec \lambda^{(N)} = \nu, \quad \lambda^{(i)} \in \mathbb{GT}_i.$$

Пусть $\mathrm{Dim}_N(\nu)$ – число путей с началом в $\varnothing$ и концом в $\nu \in \mathbb{GT}_N$. *Бесконечным путем* называется бесконечная последовательность

$$\varnothing \prec \lambda^{(1)} \prec \lambda^{(2)} \prec \cdots \prec \lambda^{(k)} \prec \lambda^{(k+1)} \prec \ldots.$$

Обозначим символом $\mathcal{P}$ множество всех бесконечных путей и введем на этом множестве топологию, индуцированную топологией прямого произведения $\prod\limits_{N\geq 0} \mathbb{GT}_N$.

Для каждого $N = 0, 1, 2, \ldots$ пусть M_N – вероятностная мера на $\mathbb{GT}_N$. Назовем набор $\{M_N\}_{N=0}^{\infty}$ *когерентным семейством мер*, если для любого $N \geq 0$ и любой сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ выполнено равенство

$$M_N(\lambda) = \sum_{\nu:\lambda\prec\nu} M_{N+1}(\nu) \frac{\mathrm{Dim}_N(\lambda)}{\mathrm{Dim}_{N+1}(\nu)}.$$

По заданной когерентной системе мер $\{M_N\}_{N=0}^{\infty}$ определим вероятностную меру на цилиндрическом множестве пространства $\mathcal{P}$, задаваемом фиксированными первыми N сигнатурами, формулой

$$P(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(N)}) = \frac{M_N(\lambda^{(N)})}{\mathrm{Dim}_N(\lambda^{(N)})}. \tag{1}$$

Заметим, что эта вероятность зависит только от $\lambda^{(N)}$. Из свойства когерентности следует, что так определенные меры цилиндров согласованы и задают борелевскую вероятностную меру на $\mathcal{P}$.

Хорошо известно, что неприводимые (комплексные) представления группы $U(N)$ параметризуются сигнатурами длины N и что $\mathrm{Dim}_N(\lambda)$ равняется размерности неприводимого представления группы $U(N)$,

отвечающего сигнатуре λ. Пусть χ^λ – обычный характер этого представления (т.е. функция на группе, задаваемая вычислением следа оператора в представлении), нормированный на $\mathrm{Dim}_N(\lambda)$.

Характером группы $U(\infty)$ называется функция $\chi : U(\infty) \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $\chi(e) = 1$, где e – единица группы $U(\infty)$ (нормированность);

2) $\chi(ghg^{-1}) = \chi(h)$, где h, g – произвольные элементы группы $U(\infty)$ (центральность);

3) матрица $\chi(g_i g_j^{-1})_{i,j=1}^n$ эрмитова и неотрицательно определена для любых $g_1, \dots, g_n \in U(\infty)$ (положительная определенность);

4) ограничение функции χ на $U(\overline{1,N})$ является непрерывной функцией для каждого N (непрерывность).

Пусть χ – произвольный характер группы $U(\infty)$. Оказывается, что ограничение этого характера на группу $U(N)$ может быть разложено по χ^λ,

$$\chi|_{U(N)} = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} M_N(\lambda)\chi^\lambda,$$

и что коэффициенты разложения $M_N(\lambda)$ образуют когерентную систему мер на $\mathbb{GT}$. Обратно, по любой когерентной системе мер на $\mathbb{GT}$ можно таким образом построить характер группы $U(\infty)$.

Легко видеть, что множество характеров группы $U(\infty)$ выпукло. Экстремальные точки этого множества могут быть реализованы как следы фактор-представлений группы $U(\infty)$ с конечным следом или как сферические функции неприводимых сферических унитарных представлений пары Гельфанда $(U(\infty) \times U(\infty), \mathrm{diag}\, U(\infty))$, см. [12]. Классификация всех экстремальных характеров дается теоремой Эдреи–Войкулеску (см. работу [10] и ссылки в ней).

§3. Характеры и состояния на универсальной обертывающей алгебре

Пусть $\mathfrak{gl}(I) = (g_{ij})_{i,j \in I}$ – комплексифицированная алгебра Ли группы $U(I)$, пусть $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(I))$ – ее универсальная обертывающая алгебра, и пусть $Z(\mathfrak{gl}(I))$ – центр алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(I))$. Обозначим символом

$$\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty)) = \bigcup_{N \geq 1} \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\overline{1,N}))$$

универсальную обертывающую алгебру группы $U(\infty)$.

Существует канонический изоморфизм

$$D_I : \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(I)) \to \mathcal{D}(I),$$

где $\mathcal{D}(I)$ – алгебра левоинвариантных дифференциальных операторов на $U(I)$ с комплексными коэффициентами. Пусть $\{x_{ij}\}$ – матричные координаты. Для любого характера χ определим *состояние* на $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$ по формуле

$$\langle X \rangle_\chi = D_I(X)\chi(x_{ij})|_{x_{ij}=\delta_{ij}} \quad \text{для любого } X \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(I)), \tag{2}$$

причем это определение согласовано для различных возможных выборов множества I.

Будем обозначать элементы сигнатур, параметризующих неприводимые представления группы $U(I)$, символами $\lambda_1^I, \dots, \lambda_{|I|}^I$. Известно, что существует канонический изоморфизм

$$Z(\mathfrak{gl}(I)) \to \mathbb{A}(I),$$

где $\mathbb{A}(I)$ – алгебра сдвинуто-симметрических функций от переменных $\lambda_1^I, \dots, \lambda_{|I|}^I$ (см. [11]). Для любого центрального элемента значение соответствующей функции на сигнатуре равняется значению (скалярного) оператора, которым становится этот элемент в представлении, отвечающем этой сигнатуре.

Как и в разделе 2, ограничение характера χ на $U(I)$ порождает вероятностную меру на сигнатурах длины $|I|$. Оказывается, что состояние элемента из $Z(\mathfrak{gl}(I))$ равняется математическому ожиданию соответствующей ему функции из $\mathbb{A}(I)$ по возникающей вероятностной мере на сигнатурах.

Возможно вычислять состояние $\langle \cdot \rangle_\chi$ как математическое ожидание и на более широком вероятностном пространстве. Рассмотрим цепочку множеств $\dots \subset \overline{1,k} \subset \overline{1,k+1} \subset \dots$. Пусть $\mathcal{Z}$ – подалгебра в $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$, порождаемая множеством центров $Z(\mathfrak{gl}(\overline{1,k}))$, $k = 1, 2, \dots$. Каждому элементу из $Z(\mathfrak{gl}(\overline{1,k}))$ можно сопоставить функцию на множестве бесконечных путей в $\mathbb{GT}$, выбирая сигнатуру длины k из пути и применяя изоморфизм $Z(\mathfrak{gl}(\overline{1,k})) \to \mathbb{A}(\overline{1,k})$. Таким образом, алгебра $\mathcal{Z}$ естественно вкладывается в алгебру функций на $\mathcal{P}$. Обозначим вероятностную меру на пространстве $\mathcal{P}$, возникающую из когерентной системы мер, соответствующих характеру χ, символом μ_χ. Тогда состояние $\langle \cdot \rangle_\chi$ любого элемента из $\mathcal{Z}$ равняется математическому ожиданию соответствующей ему функции на вероятностном пространстве $(\mathcal{P}, \mu_\chi)$.

§4. Односторонние планшерелевские характеры

В дальнейшем нас будет интересовать *односторонний планшерелевский характер* с растущим параметром. Этот экстремальный характер определяется формулой

$$\chi(U) = \exp\left(\gamma L \sum_{i=1}^{\infty}(x_{ii} - 1)\right), \tag{3}$$

где $U = [x_{ij}]_{i,j\geq 1}$, γ – фиксированное число, а L – растущий параметр. Будем обозначать символом μ_γ вероятностную меру на множестве $\mathcal{P}$, порождаемую этим характером (см. раздел 2), а символом $\langle\,\cdot\,\rangle_\gamma$ – состояние, отвечающее этому характеру (см. раздел 3).

Ограничим функцию (3) на $U(I)$ и разложим ее по нормированным неприводимым характерам группы $U(I)$. Несложно убедиться, что возникающая при этом вероятностная мера на сигнатурах длины $|I|$ задается формулой

$$P_I^{\gamma L}(\lambda) := \begin{cases} e^{-\gamma L|I|}\dfrac{(\gamma L)^{\lambda_1+\cdots+\lambda_{|I|}}}{(\lambda_1+\cdots+\lambda_{|I|})!}\dim\lambda\,\mathrm{Dim}_{|I|}\,\lambda, \\ \qquad\qquad\qquad \text{если } \ \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{|I|} \geq 0; \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{при других } \lambda, \end{cases} \tag{4}$$

где $\dim\lambda$ – размерность неприводимого представления симметрической группы $S_{|\lambda|}$, соответствующего диаграмме Юнга λ (= число стандартных таблиц Юнга формы λ). Заметим, что эта вероятностная мера сосредоточена на неотрицательных сигнатурах, т.е. на разбиениях, или диаграммах Юнга.

Различные асимптотические свойства мер $P_{1,L}^{\gamma L}$ при $L \to \infty$ и близких к ним мер изучаются в работах [1, 3, 5, 7, 8].

§5. Случайная функция высоты и GFF

Гауссовским семейством называется множество гауссовских величин $\{\xi_a\}_{a\in\Upsilon}$, проиндексированное произвольным множеством Υ. Будем считать, что все гауссовские величины центрированы, то есть выполнено условие

$$\mathbf{E}\xi_a = 0 \ \text{ для всех } \ a \in \Upsilon.$$

Гауссовское семейство задает *ковариационную функцию* $\mathrm{Cov} : \Upsilon \times \Upsilon \to \mathbb{R}$, определяемую формулой

$$\mathrm{Cov}\,(a_1, a_2) = \mathbf{E}(\xi_{a_1}\xi_{a_2}).$$

Предположим, что некоторая функция $\widetilde{C} : \Upsilon \times \Upsilon \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующему условию: для любого $n \geq 1$ и любых $a_1, \ldots, a_n \in \Upsilon$ матрица $(\widetilde{C}(a_i, a_j))_{i,j=1}^n$ симметрична и положительно определена. Тогда (см., например, [6]) существует центрированное гауссовское семейство с ковариационной функцией $\widetilde{C}$.

Пусть $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ – верхняя комплексная полуплоскость. Пусть C_0^∞ – пространство гладких вещественных функций на $\mathbb{H}$ с компактным носителем. Определим функцию $C : C_0^\infty \times C_0^\infty \to \mathbb{R}$ по формуле

$$C(f_1, f_2) := \int\limits_{\mathbb{H}} \int\limits_{\mathbb{H}} f_1(z) f_2(w) \left(-\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z-w}{z-\overline{w}} \right| \right) \, dz \, d\overline{z} \, dw \, d\overline{w}.$$

Гауссовским свободным полем (GFF) $\mathfrak{G}$ на $\mathbb{H}$ с нулевым граничным условием называется гауссовское семейство $\{\xi_f\}_{f \in C_0^\infty}$ с ковариационной функцией C. Поле $\mathfrak{G}$ не определено как случайная функция на $\mathbb{H}$; однако определены интегралы вида $\int\limits_\gamma f(z)\mathfrak{G}(z)\,dz$, где γ – контур конечной длины в $\mathbb{H}$, а $f(z)$ – непрерывная функция на нем (см. [14]).

Определим *функцию высоты*

$$H : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathcal{P} \to \mathbb{N}$$

по формуле

$$H(x, y, \{\lambda^{(n)}\}) = \sqrt{\pi} \left| \left\{ i \in \overline{1, [y]} : \lambda_i^{(y)} - i + \tfrac{1}{2} \geq x \right\} \right|,$$

где $\lambda_i^{(y)}$ – координаты сигнатуры длины $[y]$ из бесконечного пути. Снабдив $\mathcal{P}$ вероятностной мерой μ_γ, мы получаем, что функции $H(x, y, \cdot) =: H(x, y)$ становятся случайными функциями, описывающими поведение некоторой случайной ступенчатой двумерной поверхности или случайных ромбовидных тайлингов на полуплоскости (см. [3]).

Введем функции $x(z), y(z) : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ формулами

$$x(z) = \gamma(1 - 2\Re(z)), \quad y(z) = \gamma|z|^2.$$

"Перенесем" функцию $H(x, y)$ на $\mathbb{H}$ – определим функцию

$$H^{\Omega}(z) = H(Lx(z), Ly(z)), \quad z \in \mathbb{H}.$$

Известно (см. [1,3]), что существует предельная (не случайная) функция высоты

$$\widetilde{h}(z) := \lim_{L\to\infty} \frac{\mathbf{E}H^{\Omega}(z)}{L}, \quad z \in \mathbb{H},$$

которая определяет предельную форму. Флуктуации около предельной формы изучались в [3], где было показано, что поле флуктуаций

$$\mathcal{H}(z) := H^{\Omega}(z) - \mathbf{E}H^{\Omega}(z), \quad z \in \mathbb{H}, \tag{5}$$

сходится к гауссовскому свободному полю, введенному выше.

В [3] эта сходимость была доказана для некоторого множества пробных функций. Сформулируем схожее утверждение, доказываемое в настоящей работе, использующее другое множество пробных функций.

Определим момент случайной функции высоты формулой

$$M_{y,k} := \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k (H(Lx, Ly) - \mathbf{E}H(Lx, Ly))dx.$$

Определим соответствующий ему момент гауссовского свободного поля формулой

$$\mathcal{M}_{y,k} = \int\limits_{z\in\mathbb{H}; y=\gamma|z|^2} x(z)^k \mathfrak{G}(z) \frac{dx(z)}{dz}\, dz.$$

Предложение 1. *При $L\to\infty$ набор случайных величин $\{M_{y,k}\}_{y>0,k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ сходится, в смысле сходимости конечномерных распределений, к набору $\{\mathcal{M}_{y,k}\}_{y>0,k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$.*

§6. Сходимость в смысле состояний

Пусть задано вероятностное пространство Ω и последовательность k-мерных случайных векторов $(\eta_n^1, \eta_n^2, \ldots, \eta_n^k)$ на нем, сходящаяся (в смысле сходимости моментов) к гауссовскому случайному вектору $(\eta^1, \ldots, \eta^k)$ с нулевым средним. Определим *состояние* формулой

$$\langle \xi \rangle_{\Omega} := \mathbf{E}\xi, \quad \xi \in L^1(\Omega).$$

Тогда мы можем записать эту сходимость в виде

$$\langle \eta_n^{i_1}\eta_n^{i_2}\dots\eta_n^{i_l}\rangle_\Omega \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{\sigma\in\mathcal{P}}\prod_{j=1}^{l/2}\langle \eta^{\sigma(2j-1)}\eta^{\sigma(2j)}\rangle_\Omega$$
$$\text{для любого } l\geq 1 \text{ и любых } (i_1,\dots,i_l)\in\{1,\dots,k\}^l, \quad (6)$$

где $\mathcal{PM}$ – множество инволюций множества $\{1,2,\dots,l\}$ без неподвижных точек, также известных как *совершенные паросочетания* (в частности, $\mathcal{PM}$ – пустое множество, если l нечетно). Действительно, по формуле Вика в правой части соотношения (6) стоит выражение для моментов вектора η.

Пусть дана произвольная $*$-алгебра $\mathcal{A}$ и состояние $\langle\cdot\rangle$ (линейный функционал, неотрицательный на элементах вида aa^*) на ней. Пусть $a_1,a_2,\dots,a_k\in\mathcal{A}$.

Предположим теперь, что элементы $a_1,\dots,a_k$ и состояние на $\mathcal{A}$ зависят от растущего параметра L, и пусть задана некоторая $*$-алгебра $\mathbf{A}$, порождаемая элементами $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$, и состояние ϕ на ней. Будем говорить, что последовательность $(a_1,\dots,a_k)$ сходится к $(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)$ *в смысле состояний*, если

$$\langle a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_l}\rangle \xrightarrow[L\to\infty]{} \phi(\mathbf{a}_{i_1}\dots\mathbf{a}_{i_l}), \quad (7)$$

причем это равенство выполняется для всех $l\in\mathbb{N}$ и наборов индексов $(i_1,i_2,\dots,i_l)\in\{1,2,\dots,k\}^l$.

Будем говорить, что набор $\{a_i\}_{i\in\mathfrak{J}}\subset\mathcal{A}$, проиндексированный произвольным множеством $\mathfrak{J}$ и зависящий от растущего параметра L, сходится *в смысле состояний* к набору $\{\mathbf{a}_i\}_{i\in\mathfrak{J}}\subset\mathbf{A}$, если условие (7) выполняется для любого конечного набора элементов из $\{a_i\}_{i\in\mathfrak{J}}$ и соответствующих им элементов из $\{\mathbf{a}_i\}_{i\in\mathfrak{J}}$.

В дальнейшем в качестве объемлющей алгебры $\mathcal{A}$ будет выступать алгебра $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$, а состояние $\langle\cdot\rangle_\gamma$ на ней будет задаваться формулами (2) и (3). При этом в качестве предельной алгебры $\mathbf{A}$ будет выступать коммутативная алгебра, возникающая из вероятностного пространства.

§7. Основной результат

Пусть $A = \{a_n\}_{n\geq 1}$ – произвольная последовательность попарно различных натуральных чисел. Пусть $\mathcal{P}_A$ – копия пространства путей, отвечающая этой последовательности. По последовательности A определим *функцию высоты*

$$H_A : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathcal{P}_A \to \mathbb{N}$$

формулой

$$H_A\Big(x, y, \Big\{\lambda^{\{1,2,\ldots,n\}}\Big\}\Big) = \sqrt{\pi}\,\Big|\Big\{i \in \overline{1,[y]} : \lambda_i^{\{a_1,\ldots,a_{[y]}\}} - i + \tfrac{1}{2} \geq x\Big\}\Big|,$$

где $\lambda_i^{\{a_1,\ldots,a_{[y]}\}}$ – координаты сигнатуры длины $[y]$ из бесконечного пути. Снабдив $\mathcal{P}_A$ вероятностной мерой μ_γ, мы получаем, что функции $H_A(x, y, \cdot) =: H_A(x, y)$ становятся случайными функциями на вероятностном пространстве $(\mathcal{P}_A, \mu_\gamma)$.

Пусть $\{A_i\}_{i\in\mathfrak{J}}$ – семейство последовательностей попарно различных натуральных чисел, проиндексированное произвольным множеством $\mathfrak{J}$. Введем обозначения

$$A_i = \{a_{i,n}\}_{n\geq 1}, \quad A_{i,m} = \{a_{i,1}, \ldots, a_{i,m}\}.$$

Будем считать, что числа $a_{i,j} = a_{i,j}(L)$ зависят от растущего параметра L.

Назовем семейство $\{A_i\}_{i\in\mathfrak{J}}$ *регулярным*, если для любых $i, j \in \mathfrak{J}$ и любых $x, y > 0$ существует предел

$$\alpha(i, x; j, y) = \lim_{L\to\infty} \frac{|A_{i,[xL]} \cap A_{j,[yL]}|}{L}. \tag{8}$$

Пример регулярного семейства. Пусть

$$\mathfrak{J} = \{1, 2, 3, 4\}, \quad a_{1,n} = n,\ a_{2,n} = 2n,\ a_{3,n} = 2n + 1$$

и

$$a_{4,n} = \begin{cases} n + L, & n = 1, 2, \ldots, L, \\ n - L, & n = L + 1, L + 2, \ldots, 2L, \\ n, & n \geq 2L + 1. \end{cases}$$

Возьмем множество копий $\mathbb{H}$, проиндексированных множеством $\mathfrak{J}$, и рассмотрим их объединение

$$\mathbb{H}(\mathfrak{J}) := \bigcup_{i\in\mathfrak{J}} \mathbb{H}_i.$$

Определим функцию $C : \mathbb{H}(\mathfrak{J}) \times \mathbb{H}(\mathfrak{J}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ по формуле

$$C_{ij}(z,w) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\alpha(i,|z|^2;j,|w|^2) - zw}{\alpha(i,|z|^2;j,|w|^2) - z\overline{w}} \right|, \qquad i,j \in \mathfrak{J}, \quad z \in \mathbb{H}_i, \quad w \in \mathbb{H}_j.$$

Предложение 2. *Для любого регулярного семейства последовательностей на $\mathbb{H}(\mathfrak{J})$ существует обобщенный гауссов процесс с ковариационным ядром $C_{ij}(z,w)$. Более подробно, для любого конечного семейства функций $f_m(z) \in C_0^\infty(\mathbb{H}_{i_m})$ и $i_1,\dots,i_M \in \mathfrak{J}$ матрица ковариаций*

$$\operatorname{cov}(f_k, f_l) = \int\limits_{\mathbb{H}} \int\limits_{\mathbb{H}} f_k(z) f_l(w) C_{i_k i_l}(z,w)\, dz\, d\overline{z}\, dw\, d\overline{w} \tag{9}$$

положительно определена.

Доказательство. См. [2, предложение 1]. □

Обозначим полученный гауссов процесс символом $\mathfrak{G}_{\{A_i\}_{i\in\mathfrak{J}}}$. Его ограничение на одну полуплоскость $\mathbb{H}_i$ является гауссовским свободным полем, введенным выше, поскольку

$$C_{ii}(z,w) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z-w}{z-\overline{w}} \right|, \qquad z,w \in \mathbb{H}_i, \quad i \in \mathfrak{J}.$$

Как и ранее, "перенесем" функцию $H_A(x,y)$ на $\mathbb{H}$ – определим функцию

$$H_A^\Omega(z) = H_A(Lx(z), Ly(z)), \quad z \in \mathbb{H}.$$

Как уже упоминалось, флуктуации

$$\mathcal{H}_i(z) := H_{A_i}^\Omega(z) - \mathbf{E} H_{A_i}^\Omega(z), \quad i \in \mathfrak{J}, \ z \in \mathbb{H}_i, \tag{10}$$

при фиксированном i сходятся к гауссовскому свободному полю.

Основная цель данной работы заключается в изучении *совместных* флуктуаций (10) для различных i. Мы будем понимать совместные

флуктуации величин $\mathcal{H}_i$ следующим образом. Определим момент случайной функции высоты формулой

$$M_{i,y,k} := \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \left(H_{A_i}(Lx, Ly) - \mathbf{E}H_{A_i}(Lx, Ly)\right)dx. \tag{11}$$

Оказывается, что функция $M_{i,y,k}$ принадлежит алгебре $\mathbb{A}(A_{i,[Ly]})$ и, значит, этой функции отвечает некоторый элемент из $Z(\mathfrak{gl}(A_{i,[Ly]}))$. Обозначим этот элемент также символом $M_{i,y,k}$. Отметим, что элементы $M_{i,y,k}$ при всех возможных значениях i, y, k лежат в одной объемлющей алгебре $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$ с определенным на ней состоянием $\langle\,\cdot\,\rangle_\gamma$. Поэтому мы можем говорить о сходимости этих элементов в смысле состояний (см. раздел 6). Нас интересует их предельное распределение при $L \to \infty$.

Мы доказываем, что совокупность $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in\mathfrak{J}}$ сходится к обобщенному гауссовскому процессу $\mathfrak{G}_{\{A_i\}_{i\in\mathfrak{J}}}$. Определим соответствующие моменты процесса $\mathfrak{G}_{\{A_i\}_{i\in\mathfrak{J}}}$ формулой

$$\mathcal{M}_{i,y,k} = \int\limits_{z\in\mathbb{H};y=\gamma|z|^2} x(z)^k \mathfrak{G}_{A_i}(z)\frac{dx(z)}{dz}\,dz.$$

Теорема 1. *При $L \to \infty$ моменты $\{M_{i,y,k}\}_{i\in\mathfrak{J},y>0,k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ сходятся в смысле состояний к моментам $\{\mathcal{M}_{i,y,k}\}_{i\in\mathfrak{J},y>0,k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$.*

Таким образом, в пределе при $L \to \infty$ некоммутативность исчезает (предельная алгебра $\mathbf{A}$ оказывается коммутативной), однако случайные поля $\mathcal{H}_i$ для различных индексов i не становятся независимыми.

Пусть $u = Lx$. По определению функции высоты

$$\frac{d}{du}H_{A_i}(u, [Ly]) = -\sqrt{\pi}\sum_{s=1}^{[Ly]}\delta\left(u - \left(\lambda_s^{A_{i,[Ly]}} - s + \frac{1}{2}\right)\right).$$

Определим *сдвинутые степенные суммы*

$$p_{k,I} = \sum_{i=1}^{|I|}\left(\left(\lambda_i^I - i + \frac{1}{2}\right)^k - \left(-i + \frac{1}{2}\right)^k\right), \qquad I \subset \mathbb{N}.$$

Оказывается, что функции $p_{k,I}$ дежат в $\mathbb{A}(I)$ и поэтому им соответствуют некоторые элементы из $Z(\mathfrak{gl}(I))$. Эти элементы также будем обозначать символом $p_{k,I}$.

Интегрирование по частям равенства (11) показывает, что $M_{i,y,k}$ можно записать в виде

$$\frac{L^{-(k+1)}\sqrt{\pi}}{k+1}\left(\sum_{s=1}^{[Ly]}\left(\lambda_s^{A_{i,[Ly]}}-s+\frac{1}{2}\right)^{k+1}-\mathbf{E}\sum_{s=1}^{[Ly]}\left(\lambda_s^{A_{i,[Ly]}}-s+\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)$$
$$=\frac{L^{-(k+1)}\sqrt{\pi}}{k+1}(p_{k+1,I}-\mathbf{E}p_{k+1,I}).$$

Поэтому теорема 1 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 2. *Пусть $k_1,\dots,k_m\geq 1$ и $I_1,\dots,I_m$ – конечные подмножества в $\mathbb{N}$, зависящие от параметра L так, что существуют пределы*

$$\eta_r=\lim_{L\to\infty}\frac{|I_r|}{L}>0,$$
$$c_{rs}=\lim_{L\to\infty}\frac{|I_r\cap I_s|}{L}.$$

Тогда при $L\to\infty$ набор

$$\left(L^{-k_r}\left(p_{k_r,I_r}-\mathbf{E}p_{k_r,I_r}\right)\right)_{r=1}^m$$

из элементов $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$ сходится, в смысле сходимости состояний (см. (7)), к гауссовскому вектору $(\xi_1,\dots,\xi_m)$ с нулевым средним и ковариацией

$$\mathbf{E}\xi_r\xi_s=\frac{k_rk_s}{\pi}\oint\limits_{\substack{|z|^2=\frac{\eta_r}{\gamma};\\ \Im(z)>0}}\oint\limits_{\substack{|w|^2=\frac{\eta_s}{\gamma};\\ \Im(w)>0}}(x(z))^{k_r-1}(x(w))^{k_s-1}$$
$$\times\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{c_{rs}/\gamma-zw}{c_{rs}/\gamma-z\overline{w}}\right|\frac{d(x(z))}{dz}\frac{d(x(w))}{dw}\,dz\,dw.$$

Литература

1. P. Biane, *Approximate factorization and concentration for characters of symmetric groups.* — Internat. Math. Res. Notices (2001), no. 4, 179–192.
2. A. Borodin, *CLT for spectra of submatrices of Wigner random matrices*, `arXiv:1010.0898`.
3. A. Borodin, P. L. Ferrari, *Anisotropic growth of random surfaces in 2+1 dimensions*, `arXiv:0804.3035`.
4. A. Borodin, G. Olshanski, *Representation theory and random point processes.* — In: European Congress of Mathematics, Eur. Math. Soc., Zürich (2005), pp. 73–94; `arXiv:math/0409333`.
5. A. Borodin, G. Olshanski, *Asymptotics of Plancherel-type random partitions.* — J. Algebra **313** (2007), no. 1, 40–60; `arXiv:math/0610240`.
6. P. Cartier, *Introduction à l'étude des mouvements browniens à plusieurs paramètres.* — Lect. Notes Math. **191** (1971), 58–75.
7. P. L. Méliot, *Kerov's central limit theorem for Schur–Weyl measures of parameter* 1/2, `arXiv:1009.4034`.
8. S. Mkrtchyan, *Entropy of Schur–Weyl measures*, `arXiv:1107.1541`.
9. A. Okounkov, *The uses of random partitions.* — In: XIVth International Congress on Mathematical Physics, World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2005), pp. 379–403; `arXiv:math-ph/0309015`.
10. A. Okounkov, G. Olshanski, *Asymptotics of Jack polynomials as the number of variables goes to infinity.* — Internat. Math. Res. Notices (1998), no. 13, 641–682; `arXiv:q-alg/9709011`.
11. A. Okounkov, G. Olshanski, *Shifted Schur functions.* — Algebra Analiz **9** (1997), no. 2, 73–146; `arXiv:q-alg/9605042`.
12. G. Olshanski, *Unitary representations of infinite-dimensional pairs* (G, K) *and the formalism of R. Howe.* — In: Representations of Lie Groups and Related Topics (A. M. Vershik and D. P. Zhelobenko, eds.), Gordon and Breach, New York (1990), pp. 269–463.
13. G. Olshanski, *Random permutations and related topics.* Chap. 25 of The Oxford Handbook of Random Matrix Theory (G. Akemann, J. Baik, P. Di Francesco, eds.), Oxford Univ. Press, Oxford (2011); `arXiv:1104.1266`.
14. S. Sheffield, *Gaussian free fields for mathematicians.* — Probab. Theory Related Fields **139** (2007), 521–541; `arXiv:math/0312099`.

Borodin A. M., Bufetov A. I. A central limit theorem for Plancherel representations of the infinite-dimensional unitary group.

We study the asymptotics of traces of (noncommutative) monomials formed by the images of certain elements of the universal enveloping algebra of the infinite-dimensional unitary group in its Plancherel representations. We prove that they converge to (commutative) moments of a Gaussian process which can be viewed as a collection of simply yet nontrivially correlated two-dimensional Gaussian free fields. The limiting process

has previously arisen via the global scaling limit of spectra for submatrices of Wigner Hermitian random matrices. This note is an announcement, proofs will appear elsewhere.

Поступило 31 мая 2012 г.

Massachusetts Institute of Technology,
Department of Mathematics,
77 Massachusetts Avenue,
Cambridge, MA 02139-4307, USA;
Институт проблем передачи информации,
Москва, Россия

E-mail: borodin@math.mit.edu

Институт проблем передачи информации,
Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1,
ГСП-4, 127994 Москва, Россия;
Независимый московский университет,
Москва, Россия

E-mail: a_bufetov@mail.ru