Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 401, 2012 г.

К. А. Сухов

О НЕПРЕРЫВНЫХ СЛЕДАХ δ-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§1. Введение

Напомним, что функция называется δ-субгармонической, если она представляется в виде разности двух субгармонических. Рассмотрим множество δ-субгармонических функций на плоскости, носитель которых компактен. Будем обозначать это множество символом δ-s.h.c. (буква "c" обозначает, что носитель компактен). На первый взгляд не совсем понятно, какими могут быть следы таких функций на отрезке. Оказывается, что даже не все непрерывные функции можно продолжить в плоскость как δ-субгармонические с компактным носителем.

§2. Представление функции

Для начала построим представление специального вида для функций из δ-s.h.c.

Пусть у нас есть функция $u(x)$ из множества δ-s.h.c. и её носитель лежит строго внутри круга радиуса R с центром в нуле. Эта функция раскладывается в разность двух субгармонических функций: $u(x) = u_+(x) - u_-(x)$. Напомним теорему Рисса (см. [1, теорема 3.9]), а точнее, приведем её частный случай для плоскости.

Теорема. *Пусть $u(x)$ – субгармоническая функция в области $D \subset \mathbb{R}^2$, не равная тождественно $-\infty$. Тогда в D существует единственная борелевская мера μ такая, что для любого компактного подмножества $E \subset D$ справедлива формула*

$$u(x) = \int\limits_E \log|x-\xi|\,d\mu(\xi) + h(x),$$

где $h(x)$ – гармоническая функция во внутренности E.

Ключевые слова: δ-субгармонические функции, следы функции на отрезке, представление Рисса.

Применим эту теорему для круга B_r с тем же центром и радиуса $r > R$. Пусть $\mu_\pm$ – меры, порождающие функции $u_\pm$, то есть разность

$$u_\pm(x) - \int \log|x-\xi|\, d\mu_\pm(\xi)$$

является гармонической функцией на любом компактном подмножестве круга B_r. Так как функция u вне B_R равна тождественно нулю, то в силу единственности в теореме Рисса меры μ_+ и μ_- на любом множестве, не пересекающемся с B_R, совпадают. Рассмотрим следующую разность при $r > R$:

$$u(x) - \left(\int\limits_{B_r} \log|x-\xi|\, d\mu_+(\xi) - \int\limits_{B_r} \log|x-\xi|\, d\mu_-(\xi)\right)$$
$$= u(x) - \left(\int\limits_{B_R} \log|x-\xi|\, d\mu_+(\xi) - \int\limits_{B_R} \log|x-\xi|\, d\mu_-(\xi)\right) = \omega(x),$$

она является гармонической функцией в круге произвольного радиуса r, а значит и на всей плоскости.

Далее под функциями u_+ и u_- будем понимать следующие:

$$u_+(x) = \int\limits_{B_R} \log|x-\xi|\, d\mu_+(\xi) + \omega(x), \quad u_-(x) = \int\limits_{B_R} \log|x-\xi|\, d\mu_-(\xi).$$

Отметим, что их разность по-прежнему равна $u(x)$, а тогда они совпадают вне круга B_R. Поэтому у обеих функций есть общая гармоническая мажоранта $v_r(x)$ в круге B_r.

Теперь по теореме 3.14 в [1] функцию u можно представить в следующем виде в круге B_r:

$$u(x) = \int\limits_{B_R} \log\left|\frac{r(x-\xi)}{r^2 - \overline{x}\xi}\right| d\mu_+(\xi) - \int\limits_{B_R} \log\left|\frac{r(x-\xi)}{r^2 - \overline{x}\xi}\right| d\mu_-(\xi).$$

Пусть $R < x = r/2 < r$, тогда

$$\begin{aligned}0 = u(x) &= \int\limits_{B_R} \log\left|\frac{r(x-\xi)}{r^2-\overline{x}\xi}\right| \, d\mu_+(\xi) - \int\limits_{B_R} \log\left|\frac{r(x-\xi)}{r^2-\overline{x}\xi}\right| \, d\mu_-(\xi) \\ &= \int\limits_{B_R} \log\left|\frac{r(r-2\xi)}{2r^2-r\xi}\right| \, d\mu_+(\xi) \\ &- \int\limits_{B_R} \log\left|\frac{r(r-2\xi)}{2r^2-r\xi}\right| \, d\mu_-(\xi) \underset{r\to\infty}{\rightarrow} \mu_+(B_R) - \mu_-(B_R),\end{aligned}$$

откуда полные меры на круге радиуса R равны. Обозначим $\nu(\xi) = \mu_+(\xi) - \mu_-(\xi)$, тогда

$$\begin{aligned}u(x) &= \int\limits_{B_R} \log\left|\frac{r(x-\xi)}{r^2-\overline{x}\xi}\right| d\nu(\xi) \\ &= \int\limits_{B_R} \log|x-\xi| d\nu(\xi) - \int\limits_{B_R} \log\left|\frac{r^2-\overline{x}\xi}{r}\right| d\nu(\xi) \\ &= \int\limits_{B_R} \log|x-\xi| d\nu(\xi) - \int\limits_{B_R} \log\left|\frac{r^2-\overline{x}\xi}{r^2}\right| d\nu(\xi) \\ &= \int\limits_{B_R} \log|x-\xi| d\nu(\xi) - \int\limits_{B_R} \log\left|1-\frac{\overline{x}\xi}{r^2}\right| d\nu(\xi) \underset{r\to\infty}{\rightarrow} \int\limits_{B_R} \log|x-\xi| d\nu(\xi),\end{aligned}$$

откуда

$$u(x) = \int\limits_{B_R} \log|x-\xi| \, d\mu_+(\xi) - \int\limits_{B_R} \log|x-\xi| \, d\mu_-(\xi).$$

Далее именно эти два интеграла и будем считать функциями u_+ и u_-.

Таким образом, мы получили разложение функции и две меры, с которыми далее будет удобнее работать.

Построим теперь заявленную в самом начале непрерывную функцию.

Утверждение. *Существует непрерывная на $[-1, 1]$ функция, не продолжимая до δ-субгармонической функции с компактным носителем.*

Доказательство. Нам потребуется следующая техническая лемма. Для удобства её доказательство приведем ниже.

Лемма. *Существует константа C, зависящая только от R и такая, что если $|\xi| < R$, то*

$$\left| \int_{-1}^{1} \log|x-\xi| \cos \pi n x \, dx \right| \leqslant \frac{C}{n}.$$

Теперь перейдем к доказательству утверждения.

Рассмотрим функцию

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos 2^n \pi x}{2^n},$$

её непрерывность на отрезке $[-1,1]$ очевидна. Предположим, что она продолжима до δ-субгармонической функции $u(x)$ с компактным носителем, лежащим строго в B_R. Функция $u(x)$ представляется в виде $u_+(x) - u_-(x)$, где $u_\pm$ были определены выше.

Тогда, с одной стороны,

$$\int_{-1}^{1} h(x) \cos 2^n \pi x \, dx = \int_{-1}^{1} \frac{n}{2^n} \cos^2 2^n \pi x \, dx = \frac{n}{2^n}.$$

С другой стороны, из леммы, в силу конечности внутреннего интеграла и оценки для него, имеем:

$$\int_{-1}^{1} h(x) \cos 2^n \pi x \, dx = \int_{B_R} d\nu(\xi) \int_{-1}^{1} \log|x-\xi| \cos 2^n \pi x \, dx$$

$$\leqslant \int_{B_R} d|\nu|(\xi) \left| \int_{-1}^{1} \log|x-\xi| \cos 2^n \pi x \, dx \right| \leqslant \frac{C}{2^n} |\nu|(B_R),$$

откуда $|\nu|(B_R) \geqslant \frac{n}{C}$ – противоречие. □

§3. Доказательство леммы

Перейдем к доказательству леммы.

Пусть $\xi = a + bi$. Положим $A(\xi, n) = \int_{-1}^{1} \log|x-\xi| \cos \pi n x \, dx$.

1) Пусть $n < m$ – целые числа и число a не лежит на отрезке $[n, m]$, тогда

$$\left|\int\limits_{n}^{m} \frac{\sin \pi x}{x-a}\, dx\right| \leqslant \pi.$$

2) Пусть $|a| > 1$, $b = 0$, тогда, интегрируя по частям, получаем

$$|A(\xi, n)| = \frac{1}{\pi n}\left|\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin \pi n x}{x-a}\, dx\right| = \left|\frac{1}{n}\int\limits_{-n}^{n} \frac{\sin \pi x}{\pi(x-na)}\, dx\right| \leqslant \frac{1}{n}.$$

3) Пусть $b = 0$, $|a| \leqslant 1$. Имеем:

$$\begin{aligned}
n \cdot A(\xi, n) = n \int\limits_{-1}^{1} \log|x-a| \cos \pi n x\, dx \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \log|nx - na| \cos \pi n x\, dnx = \int\limits_{-n}^{n} \log|x-na| \cos \pi x\, dx \\
&= \int\limits_{-n}^{\lceil na\rceil - 1} \log|x-na| \cos \pi x\, dx + \int\limits_{\lceil na\rceil - 1}^{\lceil na\rceil + 1} \log|x-na| \cos \pi x\, dx \\
&+ \int\limits_{\lceil na\rceil + 1}^{n} \log|x-na| \cos \pi x\, dx.
\end{aligned}$$

Здесь и далее $\lceil x\rceil$ обозначает верхнюю целую часть числа x.

Первый и третий интегралы ограничены единицей, разберёмся со вторым:

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{\lceil na\rceil - 1}^{\lceil na\rceil + 1} \log|x-na| \cos \pi x\, dx\right| &= \left|\int\limits_{\lceil na\rceil - 1}^{\lceil na\rceil + 1} \log\left|\frac{x-na}{2}\right| \cos \pi x\, dx\right| \\
&\leqslant \left|\int\limits_{\lceil na\rceil - 1}^{\lceil na\rceil + 1} \log\left|\frac{x-na}{2}\right|\, dx\right| \leqslant 2\left|\int\limits_{-1}^{1} \log|x|\, dx\right| = 4;
\end{aligned}$$

таким образом, в этом случае $A(\xi, n) \leqslant \frac{6}{n}$.

4) Пусть $b \neq 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $b > 0$. Тогда

$$A(\xi, n) = \int\limits_{-1}^{1} \log|x - \xi| \cos \pi n x \, dx = \frac{1}{2n} \int\limits_{-n}^{n} \log((x - na)^2 + n^2 b^2) \cos \pi x \, dx.$$

Таким образом, достаточно доказать, что интеграл

$$\int\limits_{-n}^{n} \log((x - na)^2 + n^2 b^2) \cos \pi x \, dx$$

ограничен для любых n, a и положительных b, далее в силу произвольности выбора переменных переобозначим na буквой a и nb буквой b. Справедливо равенство:

$$\int\limits_{-n}^{n} \log((x - a)^2 + b^2) \cos \pi x \, dx = 2 \int\limits_{-n}^{n} \frac{(x - a) \sin \pi x}{(x - a)^2 + b^2} \, dx.$$

Случай 1. Если $a^2 + b^2 \leqslant (n - 1)^2$, то применим теорему о вычетах к стандартному верхнему полукруговому контуру γ_n радиуса n, получаем:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-n}^{n} \frac{(x - a) \sin \pi x}{(x - a)^2 + b^2} \, dx \\ &\quad = \operatorname{Im} \left(\int\limits_{\gamma_n} \frac{(x - a) e^{i\pi x}}{(x - a)^2 + b^2} \, dx - \int\limits_{|x| = n, \ \mathrm{Re}\, x > 0} \frac{(x - a) e^{i\pi x}}{(x - a)^2 + b^2} \, dx \right) \\ &\quad\quad = \operatorname{Im} \left(2\pi i \frac{b i e^{i\pi(a + bi)}}{2bi} - \int\limits_{|x| = n, \ \mathrm{Re}\, x > 0} \frac{(x - a) e^{i\pi x}}{(x - a)^2 + b^2} \, dx \right). \end{aligned} \tag{1}$$

Так как $b > 0$, то первая часть формулы (1) не превосходит π. Второй интеграл оценивается так:

$$\left| \int\limits_{|x|=n,\ \mathrm{Re}x>0} \frac{(x-a)e^{i\pi x}}{(x-a)^2+b^2}\,dx \right| \leqslant \max_{\theta\in[0,\pi]} \left| \frac{(ne^{i\theta}-a)}{(ne^{i\theta}-a)^2+b^2} \right|$$
$$\leqslant \max_{\theta\in[0,\pi]} \frac{1}{|ne^{i\theta}-a-bi|} \leqslant 1;$$

здесь мы применили лемму Жордана в следующем виде.

Лемма Жордана. *Для любой комплекснозначной функции $f(z)$, непрерывной на верхней дуге радиуса R, верна следующая оценка при $a > 0$:*

$$\left| \int\limits_{|x|=R,\, \mathrm{Re}x>0} e^{iaz} f(z)\,dz \right| \leqslant \frac{\pi}{a} \max_{\theta\in[0,\pi]} |f(\mathrm{Re}^{i\theta})|.$$

Таким образом, получаем в первом случае константу $\pi + 1$.

Случай 2. Если $a^2+b^2 \geqslant (n+1)^2$, то оценки аналогичны, за исключением интеграла по контуру, – он равен 0.

Случай 3. Осталось разобраться со случаем, когда $|\sqrt{a^2+b^2}-n| \leqslant 1$, то есть особая точка близка к границе контура. Для этого мы докажем, что интегралы

$$\int\limits_{-n}^{n} \frac{(x-a)\sin\pi x}{(x-a)^2+b^2}\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{-n-2}^{n+2} \frac{(x-a)\sin\pi x}{(x-a)^2+b^2}\,dx$$

отличаются не более чем на константу, не зависящую от параметров n, a, b. Тогда, если $|\sqrt{a^2+b^2}-n| \leqslant 1$, то для $n+2$ будет иметь место случай 1.

Докажем, что интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{(x-a)\sin\pi x}{(x-a)^2+b^2}dx$ ограничен, а этого достаточно для оценки двух нужных интегралов.

Не умаляя общности будем считать, что $a \geqslant 0$. Если при этом $a > 1$, тогда

$$\left|\int\limits_{-1}^{1} \frac{(x-a)\sin\pi x}{(x-a)^2+b^2}\,dx\right| \leqslant \int\limits_{-1}^{1} \frac{|x-a|\cdot|\sin\pi(x-[a])|}{(x-a)^2+b^2}dx \leqslant \int\limits_{-1}^{1} \frac{|x-a|\cdot\pi|x-[a]|}{(x-a)^2+b^2}dx \leqslant \pi\cdot\int\limits_{-1}^{1} \frac{(x-a)^2}{(x-a)^2+b^2}dx \leqslant 2\pi.$$

Если же $0 \leqslant a \leqslant 1$, тогда:

$$\begin{aligned}\int\limits_{-1}^{1} \frac{(x-a)\sin\pi x}{(x-a)^2+b^2}\,dx &= \int\limits_{-1}^{1+2a} \frac{(x-a)\sin\pi x}{(x-a)^2+b^2}\,dx - \int\limits_{1}^{1+2a} \frac{(x-a)\sin\pi x}{(x-a)^2+b^2}\,dx \\ &= \int\limits_{a-(a+1)}^{a+(a+1)} \frac{(x-a)\sin\pi x}{(x-a)^2+b^2}\,dx + \int\limits_{1}^{1+2a} \frac{(x-a)\sin\pi(x-1)}{(x-a)^2+b^2}\,dx \\ &= \int\limits_{-(a+1)}^{(a+1)} \frac{x\sin(\pi x+\pi a)}{x^2+b^2}\,dx + \int\limits_{1}^{1+2a} \frac{(x-a)\sin\pi(x-1)}{(x-a)^2+b^2}\,dx \\ &= \cos\pi a \int\limits_{-(a+1)}^{(a+1)} \frac{x\sin\pi x}{x^2+b^2}\,dx + \sin\pi a \int\limits_{-(a+1)}^{(a+1)} \frac{x\cos\pi x}{x^2+b^2}\,dx \\ &\qquad + \int\limits_{1}^{1+2a} \frac{(x-a)\sin\pi(x-1)}{(x-a)^2+b^2}\,dx \\ &= \cos\pi a \int\limits_{-(a+1)}^{(a+1)} \frac{x\sin\pi x}{x^2+b^2}\,dx + \int\limits_{1}^{1+2a} \frac{(x-a)\sin\pi(x-1)}{(x-a)^2+b^2}\,dx.\end{aligned}$$

Последнее равенство верно, так как интегрируем нечётную функцию по симметричному промежутку.

Используя неравенство $|\sin\pi(x-1)| \leqslant \pi|x-1| \leqslant \pi|x-a|$ на отрезке $[1, 1+2a]$ и неравенство $|\sin\pi x| \leqslant \pi|x|$, имеем:

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{(x-a)\sin\pi x}{(x-a)^2+b^2}\,dx\right| \leqslant \left|\cos\pi a \int_{-(a+1)}^{(a+1)} \frac{x\sin\pi x}{x^2+b^2}\,dx\right| + \left|\int_{1}^{1+2a} \frac{(x-a)\sin\pi(x-1)}{(x-a)^2+b^2}\,dx\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{-(a+1)}^{(a+1)} \frac{\pi x^2}{x^2+b^2}\,dx\right| + \left|\int_{1}^{1+2a} \frac{\pi(x-a)^2}{(x-a)^2+b^2}\,dx\right| \leqslant \pi 2(a+1) + \pi(2a) \leqslant 6\pi,$$

что завершает доказательство.

Литература

1. У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции.* Мир, М., 1980.

Sukhov K. A. Continuous traces of δ-subharmonic functions.

We consider the set of δ-subharmonic functions with compact support in the plane. It is proved that the set of their traces on a segment does not include all continuous functions.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kirill_suhov@mail.ru

Поступило 28 июня 2012 г.