Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 401, 2012 г.

А. С. Роткевич

ИНТЕГРАЛ КОШИ–ЛЕРЕ–ФАНТАППЬЕ В ЛИНЕЙНО ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

§1. Введение

Эта работа посвящена изучению регулярности интеграла Коши–Лере–Фантаппье на строго линейно выпуклых областях. Основные идеи почерпнуты из работы Ханссона [7], рассматривавшего аналогичную задачу для комплексных эллипсоидов.

В анализе голоморфных функций одной комплексной переменной среди основных инструментов и предметов изучения следует упомянуть формулу Коши. В многомерном случае нет столь универсальной и удобной формулы, восстанавливающей функцию по её граничным значениям. Возможно использовать проектор Сёге S, определяемый как ортогональный проектор пространства $L^2(\partial\Omega)$ на замкнутое подпространство $H^2(\Omega)$, порождённое граничными значениями голоморфных функций. Недостаток такого подхода заключается в том, что за исключением небольшого числа специальных областей оператор S выписать в явном виде не удаётся.

Зачастую удобнее рассматривать операторы, порождённые формулами Коши–Лере–Фантаппье. Преимущество этих операторов состоит в относительно явной формуле для ядра, часто легко выписываемого по функции, задающей область. Точнее, верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть Ω – ограниченная область с C^2-гладкой границей и задано C^1-гладкое отображение $\eta : \partial\Omega \times \Omega \to \mathbb{C}^n$ такое, что $\langle \eta(\xi, z),\ \xi - z\rangle \neq 0,\ \xi \in \partial\Omega,\ z \in \Omega$, тогда оператор K, задаваемый формулой*

$$Kf(z) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{f(\xi)\eta \wedge (\bar{\partial}_\xi \eta)^{n-1}}{\langle \eta, \xi - z\rangle^n}, \quad z \in \Omega, \tag{1}$$

Ключевые слова: формула Коши–Лере–Фантаппье, сингулярные интегралы, пространства Харди, BMO, интегральные представления, линейная выпуклость.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.

восстанавливает голоморфные функции по их значениям на границе.

Здесь и, где необходимо, далее мы будем отождествлять вектор $\eta \in \mathbb{C}^n$ и дифференциальную $(1,\ 0)$-форму $\tilde{\eta} = \eta_1 \partial\xi_1 + \ldots + \eta_n \partial\xi_n$, кроме того $\langle w,\ z\rangle = w_1 z_1 + \ldots + w_n z_n$.

В связи с этим утверждением возникает задача выбора удачной реализации данной формулы для наиболее широкого типа областей. В случае строго линейно выпуклой области с определяющей функцией ρ можно положить $\eta(\xi, z) = \partial\rho(\xi)$.

Наша задача состоит в изучении данной реализации оператора K, точнее, его ограниченности в пространствах L^p и BMO. Аналогичному вопросу посвящено немало работ. Так, для строго псевдовыпуклых областей (но, естественно, при другой реализации ядра) ограниченность оператора K в пространстве L^2 доказана в работе [8]. Оценки на ядро Сёге и ограниченность оператора S изучались в [14] для выпуклых областей конечного типа, в [15] для псевдовыпуклых областей конечного типа в $\mathbb{C}^2$, в [12] для псевдовыпуклых областей с одним вырожденным собственным числом. Все эти результаты отталкиваются от пространств, построенных по обычной евклидовой поверхностной мере на $\partial\Omega$, однако в нашей задаче оказывается удобным использовать меру dS, порождённую формой $dS = \partial\rho(\xi) \wedge (\bar{\partial}\partial\rho(\xi))^{n-1}$. Здесь эта мера вводится для удобства рассмотрений, поскольку тогда мера dS эквивалентна поверхностной мере $d\sigma$. Насколько мне известно, впервые изучать ограниченность операторов K в пространствах, построенных относительно меры dS, предложил Ханссон в [7].

Определим на $\partial\Omega \times \partial\Omega$ функцию

$$d(\xi, z) = |\,\langle \partial\rho(\xi),\ \xi - z\rangle\,| + |\,\langle \partial\rho(z),\ z - \xi\rangle\,|.$$

§2 посвящён описанию геометрии границы строго линейно выпуклой области, в частности, доказательству того, что d является квазиметрикой, а мера dS удовлетворяет условию удвоения относительно неё, точнее, объём шара радиуса r по квазиметрике d сравним с r^n. Кроме того, окажется, что оператор K можно рассматривать как сингулярный интегральный оператор со стандартным ядром.

Пространства L^p и H^p будем определять относительно меры dS. Функция f, аналитическая в области Ω, лежит в пространстве $H^p(\Omega)$

в том и только том случае, если

$$\|f\|^p_{H^p(\Omega)} = \sup_{r\to 0-} \int\limits_{\partial\Omega_{-r}} f(\xi)dS_{-r}(\xi) < \infty,$$

где $\Omega_r = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < r\}$, а мера dS_{-r} порождена формой dS.

Основной результат заключается в следующем.

Теорема 2. *Оператор K осуществляет непрерывное отображение пространства $L^2(\partial\Omega)$ на пространство $H^2(\Omega)$.*

Согласно стандартной теории операторов Кальдерона–Зигмунда, этот результат распространяется на пространства L^p, $p > 1$.

Следствие 1. *Оператор K осуществляет непрерывное отображение пространства $L^p(\partial\Omega)$ на пространство $H^p(\Omega)$.*

Функцию Kf можно доопределить на границе пределами по нормальным направлениям, тогда оператор K ограничен как оператор на $L^2(\partial\Omega)$, можно рассмотреть сопряжённый к нему. Кроме того, определив пространство BMO по квазиметрике d и мере dS на $\partial\Omega$, мы установим ограниченность оператора K на этом пространстве.

Теорема 3. *Операторы K, K^* ограничены как отображения пространства* $\mathrm{BMO}(\partial\Omega)$ *в пространство* $\mathrm{BMO}(\partial\Omega)$.

Замечание 1. Об обозначениях. Далее запись $f \asymp g$ будет обозначать, что существует постоянная $c > 0$, не зависящая от аргументов величин f и g, такая, что $c^{-1}f \leqslant g \leqslant cf$. Аналогично, $f \lesssim g$, если существует постоянная $c > 0$ такая, что $f \leqslant cg$.

§2. Граница линейно выпуклой области как однородное пространство

В данном разделе мы опишем геометрию границы строго линейно выпуклой области $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$. В частности, мы покажем, что из строгой линейной выпуклости следует строгая линейная выпуклость в геометрическом смысле и, таким образом, расстояние от точки z, лежащей на границе области, до комплексной касательной плоскости в точке ξ, определяемое по формуле $|\langle\partial\rho(\xi),\ \xi - z\rangle|$, отделено от нуля и, кроме того, оценивается через $|\xi - z|^2$, когда $\xi,\ z \in \partial\Omega$.

Далее область $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$ определяется C^2-гладкой функцией ρ, причём $d\rho(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \partial\Omega$. Через $\nu(\xi) = \frac{\partial\rho}{|\partial\rho|}$ обозначим комплексную нормаль, а $n(\xi) = \frac{\mathrm{grad}\ \rho}{|\mathrm{grad}\ \rho|}$. Действие второго дифференциала функции ρ в точке $\xi \in \mathbb{C}^n$ на вектор $w \in \mathbb{C}^n$ обозначим через $d^2\rho(\xi)[w]$.

Определение 1. *Касательную плоскость к поверхности $\partial\Omega$ в точке ξ будем обозначать через $T_\xi^{\mathbb{R}}$:*

$$T_\xi^{\mathbb{R}} = \{z \in \mathbb{C}^n : (z-\xi) \perp \nu(\xi)\}.$$

Если поверхность S регулярна, то $T_\xi^{\mathbb{R}}$ является вещественной $(2n-1)$-мерной гиперплоскостью в $\mathbb{C}^n$, тогда в ней содержится в точности одна $(n-1)$-мерная комплексная гиперплоскость, которую мы будем называть комплексной касательной гиперплоскостью и обозначать через T_ξ.

Замечание 2. Если область Ω невырождена, то

$$\begin{aligned} &T_\xi = \{z \in \mathbb{C}^n : \alpha(z-\xi) \in T_\xi^{\mathbb{R}} - \xi,\ \alpha \in \mathbb{C}\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^n : z-\xi,\ i(z-\xi) \in T_\xi^{\mathbb{R}} - \xi\} = \{z \in \mathbb{C}^n : \langle \partial\rho(\xi),\ z-\xi\rangle = 0\}. \end{aligned}$$

Как следствие, если комплексная прямая $\Gamma = \{\zeta + \alpha W : \alpha \in \mathbb{C}\}$ касается поверхности S, т.е. $\Gamma \subset T_\xi^{\mathbb{R}}$, то она содержится в комплексной касательной гиперплоскости T_ξ.

Определение 2. *Область $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$, где $\rho(\cdot) \in C^2(\mathbb{C}^n)$, строго линейно выпукла, если*

$$d^2\rho(\xi)[z-\xi] \geqslant c|z-\xi|^2,\ \xi \in \partial\Omega,\ z \in T_\xi.$$

Дифференциальная форма $(2\pi i)^{-n}\partial\rho(\xi) \wedge (\bar\partial\partial\rho(\xi))^{n-1}$ определяет положительную меру dS на границе области Ω, эквивалентную поверхностной мере, поскольку

$$\partial\rho(\xi) \wedge (\bar\partial\partial\rho(\xi))^{n-1} = (n-1)! \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \frac{L(\rho)}{\rho'_{\bar\xi_m}} d\bar\xi_{[m]} \wedge d\xi,$$

где $d\bar\xi_{[m]} = d\bar\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\bar\xi_{m-1} \wedge d\bar\xi_{m+1} \wedge \cdots \wedge d\bar\xi_n$ и $d\xi = \bigwedge\limits_{k=1}^{n} d\xi_k$, причём функция $L(\rho)$ строго положительна на $\partial\Omega$ (см. [1]).

Кроме того, введём в рассмотрение меру dV, определяемую формой $(2\pi i)^{-n}(\bar\partial\partial\rho)^n$. Заметим, что $(2\pi i)^{-n}(\bar\partial\partial\rho)^n = d((2\pi i)^{-n}\partial\rho(\xi) \wedge$

$(\bar\partial\partial\rho(\xi))^{n-1})$ и $dV \sim d\lambda$, где $d\lambda$ – мера Лебега. Для краткости будем использовать обозначение $|U| = \int\limits_U dS$, $U \subset \partial\Omega$.

Положим $d(\xi, z) = |v(\xi, z)| + |v(z, \xi)|$, где $v(\xi, z) = \langle \partial\rho(\xi),\ \xi - z\rangle$, и обозначим $B_\varepsilon(z) = \{\xi \in \partial\Omega : d(\xi, z) < \varepsilon\}$. Эта метрика вместе с мерой dS порождает на $\partial\Omega$ структуру однородного пространства.

Лемма 1. *Пусть область Ω строго линейно выпукла, тогда выполнены следующие оценки:*

1) $\operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) \asymp \rho(z) \asymp |z - \xi|^2,\ z \in T_\xi,\ \xi \in \partial\Omega$;
2) $\operatorname{dist}(\zeta,\ T_\xi) \asymp |\pi_\xi(\zeta)|^2 \asymp |\xi - \zeta|^2,\ \xi, \zeta \in \partial\Omega$, *где $\pi_\xi(\zeta)$ – проекция ζ на комплексную касательную плоскость в точке ξ;*
3) $|v(\zeta, \xi)| \asymp |v(\xi, \zeta)|,\ \zeta, \xi \in \partial\Omega$;
4) $d(\zeta, \xi) \lesssim d(\xi, w) + d(w, \zeta),\ \zeta, \xi, w \in \partial\Omega$.

Доказательство. 1. Разложим $\rho(z)$ по формуле Тейлора:

$$\rho(z) = \rho(\xi) + 2\operatorname{Re}\langle \partial\rho(\xi),\ z - \xi\rangle + \frac{1}{2}d^2\rho(\xi)\left[\frac{z-\xi}{|z-\xi|}\right]\cdot|z-\xi|^2 + o(|z-\xi|^2)$$
$$= \frac{1}{2}d^2\rho(\xi)\left[\frac{z-\xi}{|z-\xi|}\right]\cdot|z-\xi|^2 + o(|z-\xi|^2) \asymp |z-\xi|^2.$$

2. Пусть точка $\zeta_0 \in T_\xi$ – ближайшая к точке ζ, тогда $\pi_\xi(\zeta) = \zeta_0 - \xi$, $\operatorname{dist}(\zeta,\ T_\xi) = |\zeta - \zeta_0| = \operatorname{dist}(\zeta_0,\ \partial\Omega)$, откуда $\operatorname{dist}(\zeta,\ T_\xi) \asymp |\zeta_0 - \xi|^2 = |\pi_\xi(\zeta)|^2$. Далее, $|\zeta - \xi|^2 = |\pi_\xi(\zeta)|^2 + \operatorname{dist}(\zeta,\ T_\xi) \asymp |\pi_\xi(\zeta)|^2$.
3. Легко видеть, что $|v(\xi, z)| \asymp \operatorname{dist}(z,\ T_\xi) \asymp |z - \xi|^2$, откуда и следует требуемая оценка.
4. Это свойство легко получается из сравнимости величины $d(\xi, \zeta)$ с $|\xi - \zeta|^2$:

$$d(\xi, \zeta) \asymp |v(\xi, \zeta)| \asymp |\xi - \zeta|^2 \leqslant |\xi - w|^2 + |w - \zeta|^2 \lesssim d(\xi, \zeta) + d(\zeta, w).$$

□

Последний пункт леммы 1 вместе с симметричностью и невырожденностью при $z \neq \xi$ функции $d(\xi, z)$ показывает, что d – квазиметрика на $\partial\Omega$. Мера dS удовлетворяет условию удвоения, точнее верно даже большее: объём шара в квазиметрике d сравним с радиусом в степени n.

Следствие 2. *Обозначим через $B_\varepsilon(z_0)$ шар радиуса ε с центром в $z_0 \in \partial\Omega$ в квазиметрике d, тогда $\sigma(B_\varepsilon(z_0)) \asymp |B_\varepsilon(z_0)| \asymp \varepsilon^n$.*

Доказательство. Заметим, что в комплексно-касательных направлениях расстояние в квазиметрике d сравнимо с евклидовым расстоянием в степени $\frac{1}{2}$, точнее $\operatorname{dist}(z,\ T_{z_0}) \asymp |\pi_{z_0}(z)|^2 \asymp |v(z_0, z)| \asymp d(z, z_0)$, следовательно, пользуясь проекцией на касательную плоскость как локальной параметризацией множества $\partial\Omega$, получаем

$$\sigma(B_\varepsilon(z_0)) \asymp |B_\varepsilon(z_0)| \asymp \varepsilon^{1/2(2n-2)}\varepsilon = \varepsilon^n.$$

$\square$

Таким образом, мера dS относительно квазиметрики d удовлетворяет условию удвоения и пространство $(\partial\Omega,\ d,\ dS)$ однородно. В дальнейшем нам понадобятся следующие две технические леммы.

Лемма 2. *Равномерно по $z \in \partial\Omega$ выполнены следующие оценки*:

1) $\int\limits_{|v(z,\xi)|<h,\ \xi\in\Omega} dV(\xi) \lesssim h^{n+1}$;
2) $\int\limits_{|v(\xi,z)|<h,\ \xi\in\Omega^c} dV(\xi) \lesssim h^{n+1}$.

Доказательство. Докажем, например, пункт 2:

$$\int\limits_{|v(\xi,z)|<h,\ \xi\in\Omega^c} dV(\xi) \asymp \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{|v(\zeta,z)|<\varepsilon-t} dS(\zeta)dt \asymp \int\limits_0^\varepsilon (\varepsilon-t)^n dt \asymp \varepsilon^{n+1}.$$

$\square$

Лемма 3. *Пусть $\alpha, \beta > 0,\ \beta - \alpha > -1$, тогда равномерно по $z \in \partial\Omega$ выполнены следующие оценки*:

1. $\int\limits_{|v(\xi,z)|>h} \frac{dS(\xi)}{d(\xi,z)^{n+\alpha}} \lesssim h^{-\alpha}$;
2. $\int\limits_{\Omega} \frac{(-\rho(\xi))^{\beta-\alpha}}{|v(z,\xi)|^{n+1-\alpha}} dV(\xi) \lesssim 1$.

Доказательство. Проверим выполнение пункта 1, для этого разобъём множество $\{\xi \in \partial\Omega : d(\xi, z) > h\}$ на множества $\{\xi \in \partial\Omega : 2^{j-1}h < d(\xi, z) \leqslant 2^j h\}$, $j = 1, \ldots, \infty$, тогда:

$$\int\limits_{|v(\xi,z)|>h} \frac{dS(\xi)}{d(\xi,z)^{n+\alpha}} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} (2^j h)^{-(n+\alpha)} \int\limits_{|v(\xi,z)|<2^j h} dS(\xi) \lesssim h^{-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-\alpha j} \lesssim h^{-\alpha}.$$

Для доказательства второго пункта возьмём $h > 0$ и разобъём область Ω на полосы: $\Omega = \bigcup\limits_{j=0}^{N(h)} W_j$, где $W_j = \{\xi \in \Omega : 2^{j-1}h \leqslant |v(z,\xi)| < 2^j h\}$, $j = 1, \dots, N(h)$, $W_0 = \{\xi \in \Omega : |v(\xi, z)| < h\}$, причём $N(h) \lesssim \log \frac{1}{h}$. Тогда, учитывая полученную из линейной выпуклости оценку $|\rho(\xi)| \leqslant \operatorname{dist}(\xi,\ T_z) \lesssim |v(z,\xi)|$, получаем:

$$\int\limits_{\Omega\setminus W_0} \frac{(-\rho(\xi))^{\beta-\alpha}}{|v(z,\xi)|^{n+1-\alpha}} dV(\xi) \lesssim \sum_{j=1}^{N(h)} \int\limits_{W_j} \frac{(-\rho(\xi))^{\beta-\alpha}}{|v(z,\xi)|^{n+1-\alpha}} dV(\xi)$$

$$\lesssim \sum_{j=1}^{N(h)} (2^j h)^{-n-1+\alpha} \int\limits_{|v(z,\xi)|<2^j h} (-\rho(\xi))^{\beta-\alpha} dV(\xi)$$

$$\lesssim \sum_{j=1}^{N(h)} (2^j h)^{-n-1+\alpha} \int\limits_0^{2^j h} \int\limits_{\xi\in\partial\Omega_{-t},|v(\xi,z)|<2^j h} t^{\beta-\alpha} dS_{-t}(\xi) dt$$

$$\lesssim \sum_{j=0}^{N(h)} (2^j h)^{-n-1+\alpha} (2^j h)^{(\beta-\alpha+1)} 2^j (2^j h)^n \lesssim h^\beta \sum_{j=0}^{N(h)} 2^{\beta j} \lesssim h^\beta \log\frac{1}{h} \lesssim 1.$$

Тогда $\int\limits_{\Omega} \frac{(-\rho(\xi))^{\beta-\alpha}}{|v(z,\xi)|^{n+1-\alpha}} dV(\xi) \leqslant \sup\limits_{h>0} \int\limits_{\Omega\setminus W_0} \frac{(-\rho(\xi))^{\beta-\alpha}}{|v(z,\xi)|^{n+1-\alpha}} dV(\xi) \lesssim 1.$ $\square$

§3. Ограниченность оператора

В обозначениях, введённых в предыдущем разделе, оператор K определяется следующим образом:

$$Kf(z) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{f(\xi) dS(\xi)}{v(\xi,z)^n},\ z \in \Omega. \tag{2}$$

Этот оператор восстанавливает голоморфные функции, непрерывные вплоть до границы, по граничным значениям. На самом деле, $Kf = f$ для любой функции $f \in H^1(\Omega)$, поскольку пересечение $H^1(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ плотно в $H^1(\Omega)$.

В данном разделе мы докажем, что оператор K ограниченно действует из $L^2(\partial\Omega)$ в $H^2(\Omega)$. Доказательство этого утверждения проведём, используя модификацию $T1$-теоремы для однородных пространств, описанную в [5]. Затем мы докажем, что оператор K и сопряжённый к нему ограниченно действуют из BMO в BMO.

В первую очередь сформулируем $T1$-теорему в том виде, в котором будем её использовать (подробнее см. [5]). Для этого нам понадобятся определения, касающиеся сингулярных интегральных операторов. Напомним, что квазиметрика d вместе с мерой dS порождает на $\partial\Omega$ структуру однородного пространства, в котором объём шара $B_r(z)$ сравним с r^n, что мотивирует формулировку следующих определений.

Определение 3. *Ядро $k : \partial\Omega \times \partial\Omega \setminus \{\xi = z\} \to \mathbb{C}$ будем называть стандартным, если существуют константы A и $\delta > 0$ такие, что*

$$|k(\xi, z)| \leqslant \frac{A}{d(\xi, z)^n} \tag{3}$$

и

$$|k(\xi, z) - k(\xi, w)| + |k(\xi, w) - k(z, w)| \leqslant A \frac{d(\xi, w)^\delta}{d(\xi, z)^{n+\delta}} \tag{4}$$

для всех $\xi, z, w \in \partial\Omega$, таких, что $d(\xi, z) \geqslant Ad(\xi, w)$.

Замечание 3. Если выбрать константу $A > 0$ достаточно большой (например, $A = 2c_d$, где c_d – константа в квазиметрике), то условие $d(\xi, z) \geqslant Ad(\xi, w)$ влечёт оценку $d(\xi, z) \asymp d(w, z)$.

Определение 4. *Пусть k – стандартное ядро. Оператор T, действующий из пространства $C^\infty(\partial\Omega)$ в пространство распределений на $\partial\Omega$ по правилу*

$$\langle Tf,\ g\rangle = \int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega} k(\xi, z) f(z) g(\xi) dS(z) dS(\xi), \tag{5}$$

будем называть сингулярным интегральным оператором с ядром k.

Определение 5. *Формально сопряжённый оператор T^t к оператору T определим как оператор, действующий по правилу*

$$(\varphi, T^t\psi) = (T\varphi, \psi). \tag{6}$$

Определим класс функций $A(\delta, w, \varepsilon)$ как класс гладких функций φ, сосредоточенных на шаре $B_\varepsilon(w)$ и удовлетворяющих оценке:

$$|\varphi(\xi) - \varphi(z)| \leqslant \frac{d(\xi, z)^\delta}{\varepsilon^\delta}. \tag{7}$$

Определение 6. *Будем говорить, что оператор T слабо ограничен, если для некоторого $\delta > 0$ для всех $w \in \partial\Omega$, $\varepsilon > 0$ и функций $\varphi, \psi \in A(\delta, w, \varepsilon)$ выполнена оценка:*

$$(T\varphi, \psi) \lesssim |B_\varepsilon(w)|. \tag{8}$$

$T1$-теорема утверждает следующее.

Утверждение 1. *Сингулярный оператор T, определённый на однородном пространстве, ограничен на L^2 в том и только том случае, когда он слабо ограничен и $T1$, $T^t1 \in$ BMO.*

Доказательство теоремы 2. Доказательство этой теоремы, в основном, повторяет доказательство аналогичного результата, данное Ханссоном в [7] для эллипсоидов. Основное отличие состоит в способе проверки стандартности ядра рассматриваемого оператора.

Во-первых, необходимо показать, что ядро

$$k(\xi, z) = \frac{1}{v(\xi, z)^n} = \frac{1}{\langle \partial\rho(\xi), \xi - z\rangle^n}$$

стандартное. Действительно, $|k(\xi, z)| \leqslant \frac{C}{d(\xi,z)^n}$. Проверим теперь выполнение оценки (4):

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{v(\xi, z)^n} - \frac{1}{v(\xi, w)^n}\right| &= \left|\frac{v(\xi, z)^n - v(\xi, w)^n}{v(\xi, z)^n v(\xi, w)^n}\right| \\ &\lesssim \frac{|v(\xi, z) - v(\xi, w)|}{|v(\xi, z)|^{n+1}} \lesssim \frac{d(w, z)^{1/2}}{d(\xi, z)^{n+1/2}}, \end{aligned} \tag{9}$$

поскольку

$$\begin{aligned} |v(\xi, z) - v(\xi, w)| &= |\langle \partial\rho(\xi),\ z - w\rangle| \\ &\leqslant |\langle \partial\rho(\xi) - \partial\rho(w),\ z - w\rangle| + |\langle \partial\rho(w),\ z - w\rangle| \\ &\lesssim |\xi - w||z - w| + d(z, w) \\ &\lesssim d(\xi, w)^{1/2} d(z, w)^{1/2} + d(\xi, w) \\ &\lesssim d(\xi, w)^{1/2} d(z, w)^{1/2}. \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\left|\frac{1}{v(\xi, z)^n} - \frac{1}{v(\zeta, z)^n}\right| \lesssim \frac{|v(\xi, z)^n - v(\zeta, z)^n|}{|v(\xi, z)|^{n+1}} \lesssim \frac{d(\xi, \zeta)^{1/2}}{d(\xi, z)^{n+1/2}}, \tag{10}$$

поскольку

$$\begin{aligned}|v(\xi,z)-v(\zeta,z)| &= |\,\langle\partial\rho(\xi),\ \xi-z\rangle-\langle\partial\rho(\zeta),\ \zeta-z\rangle\,|\\ &\leqslant |\,\langle\partial\rho(\xi),\ \xi-\zeta\rangle\,|+|\,\langle\partial\rho(\xi)-\partial\rho(\zeta),\ \zeta-z\rangle\,|\\ &\lesssim d(\xi,\zeta)+|\xi-\zeta||\zeta-z|\\ &\lesssim d(\xi,\zeta)+d(\xi,\zeta)^{1/2}d(\zeta,z)^{1/2}\\ &\lesssim d(\xi,\zeta)^{1/2}d(\xi,z)^{1/2}.\end{aligned}$$

Определим оператор K как оператор на $\partial\Omega$. Для точки $z_0\in\partial\Omega$ положим $Kf(z_0)$ равным пределу вдоль комплексного касательного направления. Этот предел существует не всегда, однако, если $f\in C^1$, то

$$Kf(z)=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{f(\xi)-f(z_0)}{v(\xi,z)^n}dS(\xi)+f(z_0)$$

и в интеграле можно перейти к пределу, то есть

$$Kf(z_0)=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{f(\xi)-f(z_0)}{v(\xi,z_0)^n}dS(\xi)+f(z_0). \tag{11}$$

Таким образом, оператор K оказывается сингулярным интегральным оператором со стандартным ядром $k(\xi,z)$.

Теперь ограниченность оператора K на пространстве L^2 можно проверять, пользуясь $T1$-теоремой. Оператор K восстанавливает голоморфные функции по граничным значениям, следовательно, $K1=1\in\mathrm{BMO}$. Далее, мы покажем, что $K^t1\in L^\infty$. По формуле Стокса

$$\int\limits_{\partial\Omega_{-r}}\frac{\partial\rho(z)\wedge(\bar\partial\partial\rho(z))^{n-1}}{v(\xi,z)^n}=\int\limits_{\Omega_{-r}}\frac{(\bar\partial\partial\rho(z))^n}{v(\xi,z)^n}.$$

Заметим, что правая часть сходится равномерно по ξ при $r\to0$, следовательно, по теореме Фубини

$$\int\limits_{\partial\Omega_{-r}}KfdS=\int\limits_{\partial\Omega}f(\xi)\left(\int\limits_{\Omega_{-r}}\frac{dV(\xi)}{v(\xi,z)^n}\right)dS(\xi).$$

Если $f \in C^\infty$, то функция Kf непрерывна вплоть до границы и, переходя к пределу, получаем:

$$\int\limits_{\partial\Omega} f\overline{K^t 1} dS = \int\limits_{\partial\Omega} Kf dS = \int\limits_{\partial\Omega} f(\xi)\left(\int\limits_{\Omega} \frac{dV(\xi)}{v(\xi,z)^n}\right) dS(\xi).$$

Получаем, что

$$K^t 1(z) = \int\limits_{\Omega} \frac{dV(\xi)}{\overline{v(\xi,z)}^n},\ z \in \partial\Omega. \tag{12}$$

В частности, $K^t 1 \in L^\infty \subset \mathrm{BMO}$. Остаётся проверить, что оператор K слабо ограничен. Для этого потребуется следующая лемма.

Лемма 4. *Для $z \in \partial\Omega$ и $\varepsilon > 0$ имеем*

$$\int\limits_{d(\xi,z)>\varepsilon} \frac{dS(\xi)}{v(\xi,z)^n} \lesssim 1.$$

Доказательство. Так как $d(\xi,z) \lesssim |v(\xi,z)|$, то справедливо неравенство

$$\int\limits_{d(\xi,z)>\varepsilon} \frac{dS(\xi)}{v(\xi,z)^n} \lesssim \left|\int\limits_{|v(\xi,z)|>\varepsilon} \frac{dS(\xi)}{v(\xi,z)^n}\right| + \int\limits_{\varepsilon \gtrsim |v(\xi,z)|>\varepsilon} \frac{dS(\xi)}{|v(\xi,z)|^n}.$$

Второй интеграл в правой части, очевидно, ограничен. Чтобы оценить первый, воспользуемся теоремой Стокса для области $\{\xi \in \Omega^c : |v(\xi,z)| > \varepsilon,\ \rho(\xi) < 1\}$. Поскольку $\frac{\partial\rho(\xi)\wedge(\bar\partial\partial\rho(\xi))^{n-1}}{v(\xi,z)^n}$ – замкнутая форма при $\xi \neq z$ и

$$\int\limits_{\rho(\xi)=1} \frac{\partial\rho(\xi)\wedge(\bar\partial\partial\rho(\xi))^{n-1}}{v(\xi,z)^n} = 1,$$

получаем

$$\int\limits_{|v(\xi,z)|>\varepsilon} \frac{\partial\rho(\xi)\wedge(\bar\partial\partial\rho(\xi))^{n-1}}{v(\xi,z)^n} = 1 - \int\limits_{|v(\xi,z)|=\varepsilon,\ \xi\in\Omega^c} \frac{\partial\rho(\xi)\wedge(\bar\partial\partial\rho(\xi))^{n-1}}{v(\xi,z)^n}.$$

Когда мы интегрируем по таким ξ, что $|v(\xi,z)|=\varepsilon$, заменим

$$1/v(\xi,z)=\overline{v(\xi,z)}/\varepsilon^2.$$

Тогда, по теореме Стокса, применённой к области

$$\{\xi \in \Omega^c \,:\, |v(\xi, z)| < \varepsilon\},$$

имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{|v(\xi,z)|=\varepsilon,\ \xi\in\Omega^c} \frac{\partial\rho(\xi)\wedge(\bar\partial\partial\rho(\xi))^{n-1}}{v(\xi,z)^n} \\
&\quad= \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int\limits_{|v(\xi,z)|=\varepsilon,\ \xi\in\Omega^c} \overline{v(\xi,z)}^n \partial\rho(\xi)\wedge(\bar\partial\partial\rho(\xi))^{n-1} \\
&\quad= \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int\limits_{|v(\xi,z)|<\varepsilon} \overline{v(\xi,z)}^n \partial\rho(\xi)\wedge(\bar\partial\partial\rho(\xi))^{n-1} \\
&\qquad+ \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int\limits_{|v(\xi,z)|<\varepsilon,\ \xi\in\Omega^c} d_\xi\overline{v(\xi,z)}^n \wedge \partial\rho(\xi)\wedge(\bar\partial\partial\rho(\xi))^{n-1} \\
&\qquad+ \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int\limits_{|v(\xi,z)|<\varepsilon,\ \xi\in\Omega^c} \overline{v(\xi,z)}^n (\bar\partial\partial\rho(\xi))^{n}.
\end{aligned}$$

Поскольку $\left|d_\xi\overline{v(\xi,z)}^n \wedge \partial\rho(\xi)\wedge(\bar\partial\partial\rho(\xi))^{n-1}\right| \lesssim |v(\xi,z)^n|$, приходим к оценке

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{|v(\xi,z)|>\varepsilon} \frac{\partial\rho(\xi)\wedge(\bar\partial\partial\rho(\xi))^{n-1}}{v(\xi,z)^n}\right| &\leqslant 1 + \frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_{|v(\xi,z)|<\varepsilon} dS(\xi) \\
&\quad+ \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int\limits_{|v(\xi,z)|<\varepsilon,\ \xi\in\Omega^c} dV(\xi) + \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_{|v(\xi,z)|<\varepsilon,\ \xi\in\Omega^c} dV(\xi).
\end{aligned}$$

Используя лемму 3, получаем ограниченность этого интеграла. □

Проверим теперь слабую ограниченность оператора K. Возьмём функцию $\varphi \in A\left(\frac{1}{2}, w, \varepsilon\right)$ и достаточно большую константу C, тогда

$$K\varphi(z) = \int\limits_{d(\xi,w)\leqslant C\varepsilon} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(z)}{v(\xi,z)^n} dS(\xi) + \varphi(z)\left(1 - \int\limits_{d(\xi,w)>C\varepsilon} \frac{1}{v(\xi,z)^n} dS(\xi)\right).$$

По предыдущей лемме второе слагаемое равномерно ограничено, а первое оценивается следующим образом:

$$\left|\int\limits_{d(\xi,w)\leqslant C\varepsilon} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(z)}{v(\xi,z)^n} dS(\xi)\right| \lesssim \varepsilon^{1/2} \int\limits_{d(\xi,w)\leqslant C\varepsilon} \frac{1}{d(\xi,z)^{n-1/2}} dS(\xi) \lesssim \frac{\varepsilon^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}} = 1,$$

т.е. $\|K\varphi(z)\|_\infty \lesssim 1$ для всех $\varphi \in A\left(\frac{1}{2}, w, \varepsilon\right)$. Следовательно, оператор K слабо ограничен:

$$|\langle K\varphi,\ \psi\rangle| \lesssim \int\limits_{\partial\Omega} |\psi| dS = \int\limits_{d(\xi,w)<\varepsilon} |\psi| dS \lesssim |B_\varepsilon(w)|,\ \ \varphi,\psi \in A(1/2, w, \varepsilon).$$

Таким образом, по $T1$-теореме оператор K, определённый на границе, как описано выше, продолжается до ограниченного оператора на $L^2(\partial\Omega)$. Легко проверить, что он ограничен как оператор из $L^2(\partial\Omega)$ на $H^2(\Omega)$. Действительно, возьмём функцию $f \in L^2(\partial\Omega)$ и приблизим её по норме в L^2 последовательностью функций $f_n \in C^1$. Тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega_{-r}} |Kf_n|^2 dS \leqslant \int\limits_{\partial\Omega} |Kf_n|^2 dS \lesssim \int\limits_{\partial\Omega} |f_n|^2 dS,$$

откуда, переходя к пределу по $n \to \infty$, получаем

$$\int\limits_{\Omega_{-r}} |Kf|^2 dS \lesssim \int\limits_{\partial\Omega} |f|^2 dS,$$

следовательно, $\|Kf\|_{H^2} \leqslant \|f\|_{L^2}$ и теорема доказана. □

Определим сопряжённый оператор K^*. Для функции $f \in C^1$ действие оператора на неё определяет непрерывную вплоть до границы функцию, и Kf можно продолжить на границу. Заметим, что функции класса H^2 имеют нормальные граничные значения почти всюду и при этом $\|F\|_{H^2(\Omega)} \asymp \|F\|_{L^2(\partial\Omega)}$, поэтому из теоремы 2 следует, что функции $Kf(z)$ можно доопределить на границе области, причём получившийся оператор будет ограничен в L^2. Более того, этот предельный оператор будет совпадать с оператором, определённым в доказательстве теоремы (поскольку они совпадают на гладких функциях). Как оператор на L^2, он имеет сопряжённый, который мы будем обозначать через K^*. Отметим, что, согласно расуждению в доказательстве теоремы 2, K^* также сингулярный интегральный оператор со стандартным ядром $1/\overline{v(\xi, z)}^n$.

Определение 7. *Функция* $b \in L^1(\partial\Omega)$ *лежит в классе* BMO, *если следующее выражение конечно*:

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_{z_0 \in \partial\Omega,\ \varepsilon > 0} \frac{1}{|B_\varepsilon(z_0)|} \int\limits_{B_\varepsilon(z_0)} |b(z) - b_{B_\varepsilon(z_0)}| dS(z) + \int\limits_{\partial\Omega} |b(z)| dS(z),$$

где $b_{B_\varepsilon(z_0)} = \frac{1}{|B_\varepsilon(z_0)|} \int\limits_{B_\varepsilon(z_0)} b(z) dS(z)$ *– среднее значение функции* b *на шаре* $B_\varepsilon(z_0)$.

Заметим, что наше определение нормы в классе BMO отличается от классического, где в выражении для нормы присутствует только первое слагаемое и, при этом, пространство BMO факторизуется по подпространству постоянных функций. За счёт этого и конечности меры dS приведённые здесь рассуждения несколько отличаются от обычно применяемых в похожих ситуациях, в частности $K^t 1 \neq \mathrm{const}$. Для функций класса BMO выполнено неравенство Джона–Ниренберга:

$$\frac{1}{|B_\varepsilon(z_0)|} \int\limits_{B_\varepsilon(z_0)} |b(z) - b_{B_\varepsilon(z_0)}|^q dS(z) \leqslant \|b\|^q_{\mathrm{BMO}},\ q > 1.$$

Доказательство теоремы 3. Доказательство повторяет рассуждение из статьи Ханссона [7]. Возьмём функцию $b \in \mathrm{BMO}$, зафиксируем точку $z_0 \in \partial\Omega$, представим функцию b в виде суммы $b = b_1 + b_2 + b_3$, где $b_1 = b_{B_\varepsilon(z_0)}$, $b_2 = (b - b_1)\chi_{B_{C\varepsilon}(z_0)}$, где $\chi_{B_{C\varepsilon}(z_0)}$ – характеристическая функция шара $B_{C\varepsilon}(z_0)$, а C – достаточно большая константа, зависящая от константы в неравенстве треугольника для квазиметрики d. Тогда $Kb_1 = b_1$, следовательно,

$$\frac{1}{|B_\varepsilon(z_0)|} \int\limits_{B_\varepsilon(z_0)} |Kb_1(z) - Kb_{1\,B_\varepsilon(z_0)}| dS(z) = 0.$$

Для оценки функции Kb_2 воспользуемся ограниченностью оператора K в L^2 и неравенством Йенсена:

$$\left(\frac{1}{|B_\varepsilon(z_0)|}\int\limits_{B_\varepsilon(z_0)}|Kb_2-(Kb_2)_{B_\varepsilon(z_0)}|dS\right)^2\lesssim\left(\frac{1}{|B_\varepsilon(z_0)|}\int\limits_{B_\varepsilon(z_0)}|Kb_2|dS\right)^2$$
$$\lesssim\frac{1}{|B_\varepsilon(z_0)|}\int\limits_{\partial\Omega}|Kb_2|^2dS\lesssim\frac{1}{|B_\varepsilon(z_0)|}\int\limits_{\partial\Omega}|b_2|^2dS$$
$$=\frac{1}{|B_\varepsilon(z_0)|}\int\limits_{B_{C\varepsilon}(z_0)}|b(z)-b_{B_\varepsilon(z_0)}|^2dS(z)\lesssim\|b\|^2_{\mathrm{BMO}}.$$

Окончательно, оценивая Kb_3, получаем:

$$\frac{1}{|B_\varepsilon(z_0)|}\int\limits_{B_\varepsilon(z_0)}|Kb_3-(Kb_3)_{B_\varepsilon(z_0)}|dS$$
$$\lesssim\frac{1}{|B_\varepsilon(z_0)|^2}\int\limits_{B_\varepsilon(z_0)}\left(\int\limits_{B_\varepsilon(z_0)}\left(\int\limits_{\partial\Omega}\left|\frac{1}{v(\zeta,z)^n}-\frac{1}{v(\zeta,w)^n}\right||b_3(\zeta)|dS(\zeta)\right)dS(w)\right)dS(z)$$
$$\lesssim\frac{1}{|B_\varepsilon(z_0)|^2}\int\limits_{B_\varepsilon(z_0)}\int\limits_{B_\varepsilon(z_0)}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{d(z,w)^{1/2}}{d(\zeta,z)^{n+1/2}}|b_3(\zeta)|dS(\zeta)dS(z)dS(w)$$
$$\lesssim\varepsilon^{1/2}\int\limits_{B^c_{C\varepsilon}(z_0)}\frac{|b(\zeta)-b_{B_{C\varepsilon}(z_0)}|}{d(\zeta,z_0)^{n+1/2}}\,dS(\zeta)\lesssim\|b\|_{\mathrm{BMO}},$$

поскольку $d(\zeta,z)\lesssim d(z,w)$ и $d(\zeta,z)\asymp d(\zeta,z_0)$ при достаточно большом значении постоянной $C>0$, а последнее неравенство легко получить, разбив область интегрирования на диадические шары $B_{2^jC\varepsilon}(z_0)$. Таким образом, мы оценили первое слагаемое в выражении для BMO-нормы функции Kb, оценим второе слагаемое, т.е. $\|Kb\|_{L^1}$. Напишем

$$Kb=Kb_{\partial\Omega}+K(b-b_{\partial\Omega})=b_{\partial\Omega}+K(b-b_{\partial\Omega}),$$

первое слагаемое оценивается через $\|b\|_{\mathrm{BMO}}$, а второе через Kb_2.

Похожим образом доказывается, что оператор K^* ограничен в BMO. Различие лишь в оценке слагаемого K^*b_1, поскольку функция K^*1 не постоянная. Однако, используя выражение (12) для K^*1, оценку (9) и лемму 3, можно показать, что K^*1 гёльдерова с показателем $1/2$:

$$\left|K^*1(z) - K^*1(w)\right| \lesssim \int\limits_{\Omega} \left|\frac{1}{v(\xi,z)^n} - \frac{1}{v(\xi,w)^n}\right| dV(\xi)$$

$$\lesssim \int\limits_{\Omega} \frac{d(w,z)^{1/2}}{d(\xi,z)^{n+1/2}} dV(\xi) \lesssim d(w,z)^{1/2}.$$

Кроме того, верна оценка $|b_1| \leqslant \|b_1\|_{\mathrm{BMO}} \log\frac{1}{\varepsilon}$ (см. [6]), откуда получаем:

$$\frac{1}{|B_\varepsilon(z_0)|} \int\limits_{B_\varepsilon(z_0)} |K^*b_1(z) - (K^*b_1)_{B_\varepsilon(z_0)}| dS(z)$$

$$\lesssim \frac{|b_1|}{|B_\varepsilon(z_0)|^2} \int\limits_{B_\varepsilon(z_0)} \int\limits_{B_\varepsilon(z_0)} |K^*1(z) - K^*1(\xi)| dS(\xi) dS(z)$$

$$\lesssim |b_1|\varepsilon^{1/2} \leqslant \varepsilon^{1/2} \log\frac{1}{\varepsilon}\|b\|_{\mathrm{BMO}} \lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}}.$$

Слагаемые K^*b_2 и K^*b_3 оцениваются так же, как в случае оператора K, с учётом того, что оператор K^* является сингулярным оператором со стандартным ядром $1/\overline{v(\xi,z)}^n$. Окончательно получаем, что оператор K^* ограничен в BMO. □

Литература

1. Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков, *Интегральные представления и вычеты в комплексном анализе.* Наука (1979).
2. А. Роткевич, *Формула Айзенберга в невыпуклых областях и некоторые её приложения.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **389** (2011), 206–231.
3. J. D. McNeal, *The Bergman projection as a singular integral operator.* — J. Geom. Anal., **4**, No. 1 (1994), 91–103.
4. K. Adachi, *Several complex variables and integral formulas.* World Scientific, 2007.
5. G. David, J. L. Journe, and S. Semmes, *Opérateurs de Calderón-Zygmund, fonctions para-accrétives et interpolation.* — Rev. Mat. Iber. **1** (1985), 1–56.
6. C. Fefferman, E. M. Stein, *H^p spaces of several variables.* — Acta mathematica, **129**, No. 1 (1972), 137–193, DOI: 10.1007/BF02392215.
7. T. Hansson, *On Hardy spaces in complex ellipsoids.* — Annales de l'institut Fourier, **49**, No. 5 (1999), 1477–1501, doi:10.5802/aif.1727.
8. N. Kerzman, E. M. Stein, *The Szego kernel in terms of Cauchy–Fantappie kernels.* — Duke Math. J., **45**, No. 2 (1978), 197–224.

9. A. Korànyi, S. Vàgi, *Singular integrals on homogeneous spaces and some problems of classical analysis.* — Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Sér. 3, **25**, No. 4 (1971), 575–648.
10. L. Lanzani, E. M. Stein, *Szegö and Bergman projections on non-smooth planar domains.* — J. Geom. Anal., **14**, No. 1 (2004), 63–86, DOI: 10.1007/BF02921866.
11. L. Lanzani, E. M. Stein, *The Bergman projection in L^p for domains with minimal smoothness*, 2012, arXiv:1201.4148v1.
12. M. Machedon, *Szego kernels on pseudoconvex domains with one degenerate eigenvalue.* — Ann. Math., 2nd Ser., **128**, No. 3 (1988), 619–640.
13. J. D. McNeal, E. M. Stein, *Mapping properties of the Bergman projection on convex domains of finite type.* — Duke Math. J. **73**, No. 1 (1994), 177–199.
14. J. D. McNeal, E. M. Stein, *The Szegö projection on convex domains.* — Mathematische Zeitschrift, **224**, No. 4 (1997), 519–553, DOI: 10.1007/PL00004593.
15. A. Nagel, J. P. Rosay, E. M. Stein, S. Wainger, *Estimates for the Bergman and Szego kernels in C^2.* — Ann. Math., **129** (1989), 113–149.
16. W. Rudin, *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 241, Springer-Verlag, Berlin and New York (1980), xiii + 436 pp.
17. E. L. Stout, *H^p-functions on strictly pseudoconvex domains.* — Amer. J. Math., **98**, No. 3 (1976), 821–852.

Rotkevich A. S. Cauchy–Leray–Fantappiè formula for linearly convex domains.

An important tool in analysis of functions of one complex variable is the Cauchy formula. However, in the case of several complex variables there is no unique and convenient formula of this sort. One can use the Szegő projection, but the kernel of the corresponding operator has usually no explicit expression. Another choice is the Cauchy–Leray–Fantappiè formula, which has rather explicit kernel for large classes of domains. In this paper we prove the boundedness properties of the Cauchy–Leray–Fantappiè integral for linearly convex domains, as an operator on L^p and BMO.

СПбГУ, Лаборатория им. П.Л.Чебышева,
14 линия В.О., д. 29Б,
Санкт-Петербург 199178, Россия
E-mail: rotkevichas@gmail.com

Поступило 14 июня 2012 г.