Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 401, 2012 г.

М. Я. Мазалов

КРИТЕРИЙ ПРИБЛИЖАЕМОСТИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛИПШИЦА

§1. Введение

Пусть $0 < \gamma < 1$, $X \subset \mathbb{R}^3$ – компакт; напомним (см., например, [1, гл. 3, §1]), что пространство Липшица $\mathrm{Lip}^\gamma(X)$ состоит из функций $f : X \to \mathbb{R}$, таких, что для всех $x, y \in X$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|^\gamma, \tag{1.1}$$

где $c = c(f, X, \gamma) < \infty$. Точная нижняя грань значений c в формуле (1.1) задает полунорму $\|f\|_{\gamma,X}$. Пусть $x_0 \in X$ – фиксированная точка, тогда $\mathrm{Lip}^\gamma(X)$ – банахово пространство с нормой $|f(x_0)| + \|f\|_{\gamma,X}$.

Пространство $\mathrm{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^3)$ с полунормой $\|f\|_\gamma = \|f\|_{\gamma,\mathbb{R}^3}$ определяется аналогично: в формуле (1.1) считаем, что $x, y \in \mathbb{R}^3$ и дополнительно полагаем, что $\|f\|_{\mathrm{L}_\infty} < \infty$.

Напомним, что по теореме Уитни о продолжении (см., например, [2, гл. 6, теорема 3]) каждая функция $f \in \mathrm{Lip}^\gamma(X)$ продолжается до функции из $\mathrm{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^3)$, имеющей компактный носитель и принадлежащей классу C^∞ вне X, так, что $\|f\|_\gamma \leqslant A\|f\|_{\gamma,X}$ и $A \geqslant 1$ – абсолютная постоянная. Учитывая это, в дальнейшем будем считать каждую функцию из $\mathrm{Lip}^\gamma(X)$ продолженной на все пространство $\mathbb{R}^3$ по теореме Уитни.

Пространство $C^\gamma(X)$ – подпространство в $\mathrm{Lip}^\gamma(X)$, состоящее из функций f, таких, что при $x, y \in X$, $|x - y| \leqslant \delta$ и $x \neq y$ выполнено неравенство

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma} \leqslant \epsilon_1(\delta),$$

где $\lim\limits_{\delta\to 0} \epsilon_1(\delta) = 0$, $\epsilon_1 = \epsilon_1(f, X, \gamma)$.

Ключевые слова: пространства Липшица, гармонические функции, обхват по Хаусдорфу, схема Витушкина.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант No. 12-01-00434).

Как следует, например, из теоремы 3 и формулы (15) в [2, гл. 6], для функции $f \in C^\gamma(X)$, продолженной по теореме Уитни, при всех $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$, $|x-y| \leqslant \delta$ выполнено условие

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\gamma} \leqslant \epsilon_{f,\gamma}(\delta), \quad \text{где} \quad \lim_{\delta\to 0} \epsilon_{f,\gamma}(\delta) = 0. \tag{1.2}$$

Далее $C^\gamma(\mathbb{R}^3)$ – подпространство в $\mathrm{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^3)$, состоящее из функций f, для которых имеет место условие (1.2).

Пусть X^o – множество всех внутренних точек компакта X, Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$, $h_\gamma(X)$ и $H_\gamma(X)$ – следующие классы функций:

$$h_\gamma(X) = C^\gamma(X) \cap \{f|_X : \Delta f = 0 \ \text{ в } \ X^o\};$$

$H_\gamma(X)$ – замыкание в $C^\gamma(X)$ множества функций

$$\{f|_X : \Delta f = 0 \text{ в некоторой окрестности } X\}$$

(окрестность X зависит от функции f); ясно, что $H_\gamma(X) \subset h_\gamma(X)$.

Цель настоящей работы – описание функций, принадлежащих классу $H_\gamma(X)$, в терминах функционала $M^{1+\gamma}(\cdot)$, т.е. обхвата по Хаусдорфу порядка $1+\gamma$. По определению (см., например, [3, гл. 2]), для ограниченного множества $U \subset \mathbb{R}^3$ и $t > 0$ имеем

$$M^t(U) = \inf \sum_k (r_k)^t, \tag{1.3}$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям U не более, чем счетными наборами шаров B_k радиусов r_k (открыты или замкнуты шары – безразлично).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть существуют постоянная $k \geqslant 1$ и функция $\epsilon(r)$, $\epsilon(r) \searrow 0$ при $r \searrow 0$, такие, что для любого открытого шара $B = B(a,r)$ (где $a \in \mathbb{R}^3$ – центр, r – радиус) с границей ∂B выполнена оценка*

$$\left| \frac{1}{\sigma(\partial B)} \int\limits_{\partial B} f(x) d\sigma_x - \frac{1}{m(B)} \int\limits_B f(x)\, dm_x \right| \leqslant \epsilon(r) r^{-1} M^{1+\gamma}(kB \setminus X), \tag{1.4}$$

где $\sigma_{(\cdot)}$ – поверхностная мера на ∂B, $m_{(\cdot)}$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^3$, $kB = B(a, kr)$. Тогда $f \in H_\gamma(X)$.

Обратно, если $f \in H_\gamma(X)$, *то оценка* (1.4) *выполнена при* $k = 1$ *и* $\epsilon = A\epsilon_{f,\gamma}$, *где* $A > 0$ *– абсолютная постоянная,* $\epsilon_{f,\gamma}$ *из* (1.2).

В дальнейшем для краткости средние значения функции f из левой части неравенства (1.4) будем записывать как $f_{\text{ср}}(\partial B)$ и $f_{\text{ср}}(B)$. Заметим, что условие (1.4) взято по аналогии с условием (iv) из [4, теорема 1.1].

В доказательстве теоремы 1 ключевую роль играет следующая лемма (далее $Q(a,s)$ – куб со сторонами, параллельными осям координат, a – центр, s – длина стороны, $kQ = Q(a,ks)$ для $k > 0$, $\operatorname{Spt}(\cdot)$ – замыкание носителя функции).

Лемма 1.1. *Пусть* f *– функция из* $h_\gamma(X)$, *продолженная по теореме Уитни. Если существует функция* $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *такая, что* $\lim_{s\to 0} \varepsilon(s) = 0$, *и для произвольных открытого куба* $Q = Q(a,s)$ *и функции* $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{Spt}(\psi) \subset Q$, *выполнена оценка*

$$\left| \int\limits_Q f(x)\Delta\psi(x)\,dm_x \right| \leqslant \varepsilon(s)\|\nabla^3\psi\|_{\mathrm{L}_\infty} s^3 M^{1+\gamma}((9/8)Q \setminus X), \tag{1.5}$$

то $f \in H_\gamma(X)$.

Лемма 1.1 близка по формулировке к лемме А. Г. Витушкина [5, гл. 4, §2, лемма 1] о равномерных аналитических приближениях, теореме П. В. Парамонова [6, теорема 5.1] о гармонических приближениях в C^1-норме и к теореме А. О'Фаррелла о приближениях аналитическими функциями в липшицевых нормах при $0 < \gamma < 1$ [1, гл. 3, теорема 1.1].

Замечание 1.1. Можно показать, что условие (1.5) является не только достаточным для $f \in H_\gamma(X)$, но и необходимым, причем можно взять $\varepsilon(s) = A\epsilon_{f,\gamma}(s)$, где $\epsilon_{f,\gamma}$ из (1.2), $A > 0$ – абсолютная постоянная. Этот факт стандартен и устанавливается так же, как и в теореме 1.1 из [1, гл. 3] или ниже в лемме 4.2.

Замечание 1.2. Можно показать, что заключение леммы 1.1 сохранится, если в правой части неравенства (1.5) заменить множество $(9/8)Q \setminus X$ на $kQ \setminus X$ для фиксированного $k \geqslant 1$.

Замечание 1.3. Теорема 1 и лемма 1.1 переносятся на гармонические функции в пространстве $\mathbb{R}^d$ при $d \geqslant 3$, при этом в правой части неравенства (1.5) обхват $M^{1+\gamma}$ заменяется на $M^{d-2+\gamma}$, а в правой части неравенства (1.4) выражение $r^{-1}M^{1+\gamma}(\cdot)$ заменяется на $r^{2-d}M^{d-2+\gamma}(\cdot)$.

Напомним, что описание компактов X, таких, что $h_\gamma(X) = H_\gamma(X)$, получено в [7] (Дж. Матеу и Дж. Оробич); по существу, это частный случай теоремы 1 настоящей работы (см. также [8, теорема 1] – обобщение результата статьи [7] на эллиптические операторы произвольного порядка). Отметим, что доказательство теоремы 1 настоящей работы существенно проще по сравнению с [7] и полностью конструктивно (в [7, 8] используются двойственные аргументы, опирающиеся на спектральный синтез в пространствах Лизоркина–Трибеля).

В доказательстве теоремы 1 применяется усовершенствованная схема А. Г. Витушкина [5] разделения особенностей и приближения функции по частям. Лемма 1.1 доказывается в §§2–3. В §2 с помощью подготовительных результатов лемма 1.1 сводится к основной лемме 2.7. В §3 (основном в работе) лемма 2.7 доказывается с помощью специальной геометрической конструкции, цель которой – оценка и уравнивание лорановских коэффициентов при первых производных фундаментального решения у локализаций функции f. В §4 теорема 1 выводится из леммы 1.1 с помощью тех же рассуждений, которые были применены в [9, §4], при этом используются некоторые идеи работы [10].

§2. Подготовительные результаты. Основная лемма

В доказательстве леммы 1.1 будем использовать схему А. Г. Витушкина [5]:

1) с помощью подходящего разбиения единицы представить функцию f в виде конечной суммы локализаций;

2) разложить локализации в ряд Лорана и оценить лорановские коэффициенты;

3) используя условие (1.5), уравнять у локализаций необходимое число лорановских коэффициентов так, чтобы это гарантировало включение $f \in H_\gamma(X)$.

Разбиением единицы на компакте K назовем конечное семейство неотрицательных функций $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, таких, что $\sum_j \varphi_j(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности множества K.

Так как (продолженная по теореме Уитни) функция f представима (в обобщенном смысле) в виде свертки $f = (\Delta f) * E$, где

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} \tag{2.1}$$

– фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$, то разбиение единицы на $\mathrm{Spt}(\Delta f)$ порождает разложение функции f в конечную сумму локализаций

$$f = \sum_j f_j, \quad \text{где} \quad f_j = V_{\varphi_j} f, \tag{2.2}$$

$V_\varphi f = (\varphi \Delta f) * E$ – оператор локализации [5, гл. 2, §3], [11, §2], $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Далее $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – мультииндекс ($\alpha_m \in \mathbb{Z}_+$, $m = 1, 2, 3$), $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$|\alpha| = \sum_{m=1}^{3} \alpha_m, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}},$$
$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}.$$

Двоичными кубами будем называть (замкнутые) кубы вида

$$Q = Q_p^{m_1, m_2, m_3} = \prod_{k=1}^{3} [m_k 2^{-p}, (m_k + 1) 2^{-p}], \tag{2.3}$$

где $(p, m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^4$. Рассматривая покрытия семействами двоичных кубов, всегда будем считать, что кубы раздельные (не имеют общих внутренних точек).

Далее положительные абсолютные постоянные будем обозначать символами A, A_1, A_2, …, причем значения каждой из этих постоянных в разных соотношениях могут быть различными; положительные постоянные, зависящие только от γ из (1.1), будем обозначать через $c_1(\gamma)$, $c_2(\gamma)$, … .

Следующее утверждение принадлежит Р. Харви и Дж. Полкингу [12, лемма 3.1].

Лемма 2.1. *Пусть $\{Q_j\}$ – конечное семейство раздельных двоичных кубов. Тогда существует $\{\varphi_j\}$ – разбиение единицы на $\bigcup_j Q_j$, такое, что $\mathrm{Spt}\varphi_j \subset (3/2)Q_j$ и для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ выполнены оценки $\|\nabla^n \varphi_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A(n)(s(Q_j))^{-n}$.*

Всюду в дальнейшем для построения локализаций будем использовать разбиения единицы из леммы 2.1. Заметим, что если в условиях леммы 1.1 куб Q есть $(3/2)Q'$ для подходящего двоичного куба Q', а ψ – функция с оценками производных из леммы 2.1 относительно Q, то в в правой части формулы (1.5) имеем $\|\nabla^3 \psi\|_{\mathrm{L}_\infty} s^3 \leqslant A_1$.

Лемма 2.2. *Пусть $Q = Q(a,s)$ – открытый куб; $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ – функция, такая, что $\operatorname{Spt}(\varphi) \subset Q$, с оценками производных из леммы 2.1 относительно Q. Тогда для локализации $V_\varphi f$ имеет место следующее:*

(a) $\Delta(V_\varphi f) = \varphi \Delta f$, *и следовательно,* $\operatorname{Spt}(\Delta(V_\varphi f)) \subset (\operatorname{Spt}(\varphi) \setminus X^o)$;

(b) $V_\varphi f \in C^\gamma(\mathbb{R}^3)$, *причем выполнена оценка* $\|V_\varphi f\|_\gamma \leqslant A\epsilon_{f,\gamma}(s)$ *с* $\epsilon_{f,\gamma}$ *из* (1.2);

(c) *выполнена оценка* $\|V_\varphi f\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A\omega_f(s)$, *где* ω_f *– (обычный) модуль непрерывности функции* f.

Лемма 2.2 стандартна. Утверждение (a) очевидно; утверждение (b) доказано в лемме 2.4 из [7] (см. также лемму 1.4 из [1, гл. 3]); утверждение (c) – частный случай леммы 14.10 из [13]: это аналог леммы А. Г. Витушкина [5, гл. 2, §3, лемма 2].

Замечание 2.1. Утверждения (b)–(c) леммы 2.2 следуют из равенства

$$V_\varphi f = \varphi f_0 + (f_0 \Delta\varphi) * E - 2 \sum_{|\alpha|=1} (f_0 \partial^\alpha \varphi) * \partial^\alpha E,$$

где $f_0(x) = f(x) - f(a)$, и стандартных оценок свертки.

Для оценки локализаций вне Q используем разложение в ряд Лорана. Всюду при $|x-a| > 6s$ функция $V_\varphi f$ разлагается в *ряд Лорана*, сходящийся в C^∞ (см. [6, лемма 3.2]):

$$V_\varphi f(x) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} c_\alpha \partial^\alpha E(x-a), \tag{2.4}$$

где c_α – *лорановские коэффициенты*, определяемые формулами

$$c_\alpha = c_\alpha(V_\varphi f, a) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \int_Q f(x) \Delta(\varphi(x)(x-a)^\alpha)\, dm_x,$$

в частности, коэффициент $c_0(V_\varphi f)$ не зависит от центра разложения a.

Заметим [6, лемма 3.2], [7, Sec. 2], [14, 1B], что справедливо более общее утверждение: разложение (2.4) имеет место при $|x-a| > 6s$ для любой свертки вида $T * E$, где T – распределение, $\operatorname{Spt}(T) \subset Q$, а

$$c_\alpha(T * E, a) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \langle T(x) | (x-a)^\alpha \rangle, \tag{2.5}$$

где в угловых скобках записано действие распределения T с компактным носителем на функцию из $C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

В силу неравенства (1.5), где возьмем $\psi(x) = \varphi(x)(x-a)^\alpha$, имеют место следующие оценки:

$$|c_\alpha(V_\varphi f, a)| \leqslant (\alpha!)^{-1} A_1 \varepsilon(s) s^{|\alpha|} M^{1+\gamma}((9/8)Q \setminus X) \tag{2.6}$$

(здесь учтено, что для $x \in Q$ имеем $|x-a| \leqslant (\sqrt{3}/2)s$, и применена элементарная оценка $\|\nabla^3(\varphi(x)(x-a)^\alpha)\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A_2 \|\nabla^3\varphi\|_{\mathrm{L}_\infty} s^{|\alpha|}$).

Далее будем рассматривать покрытия, в которых длины сторон кубов не превосходят 1, и считать, не ограничивая общности, что $\varepsilon(s) \geqslant \epsilon_{f,\gamma}(s)$ и $\varepsilon(2s) \leqslant 2\varepsilon(s)$ при $s \leqslant 1$. Из (2.4)–(2.6) вытекает следующее утверждение (несложные детали, сводящиеся к суммированию геометрической прогрессии см., например, в доказательстве лемм 1.4 и 1.5 из [9]).

Лемма 2.3. *Пусть Q и $V_\varphi f$ из леммы 2.2, $n \leqslant 2$, и при этом выполнены равенства $c_\alpha(V_\varphi f, a) = 0$ при $|\alpha| < n$. Тогда для $x \notin (8/7)Q$ имеют место оценки:*

$$\begin{aligned} |V_\varphi f(x)| &\leqslant A\varepsilon(s) s^n \frac{M^{1+\gamma}((9/8)Q \setminus X)}{|x-a|^{1+n}}, \\ |\nabla V_\varphi f(x)| &\leqslant A\varepsilon(s) s^n \frac{M^{1+\gamma}((9/8)Q \setminus X)}{|x-a|^{2+n}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Теперь рассмотрим вопрос о приближении локализаций. Будем считать, что для открытого куба Q множество $Q \setminus X$ непусто, в противном случае $\mathrm{Spt}(\varphi) \subset X^o$, и в силу леммы 2.2 имеем $V_\varphi f \equiv 0$.

Напомним, что в силу теоремы Фростмана [3, гл. 2, теорема 1] для любого ограниченного открытого множества U существует неотрицательная мера μ, $\mathrm{Spt}(\mu) \subset U$, такая, что $\|\mu\| \geqslant A_1 M^{1+\gamma}(U)$ (где $\|\cdot\|$ – полная вариация меры, $A_1 > 0$ – абсолютная постоянная), и при этом для любого шара B радиуса r выполнено неравенство $\|\mu\|(B) \leqslant r^{1+\gamma}$. Из последнего неравенства легко получается оценка $\|\mu * E\|_\gamma \leqslant A$, где E из (2.1); таким образом, имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.4. *Для любого открытого куба $Q = Q(a,s)$ существует неотрицательная мера ν, такая, что $\mathrm{Spt}(\nu) \subset ((9/8)Q \setminus X)$, $\|\nu\| = A_2 M^{1+\gamma}((9/8)Q \setminus X)$ и $\|\nu * E\|_\gamma \leqslant 1$.*

Пусть $H = \varepsilon(s)(\nu * E)$. В силу леммы 2.4 и формулы (2.5) выполнено равенство $c_0(H) = A_2\varepsilon(s)M^{1+\gamma}((9/8)Q \setminus X)$, а при $|\alpha| > 0$ имеют место оценки

$$|c_\alpha(H, a)| \leqslant (\alpha!)^{-1} A\varepsilon(s) s^{|\alpha|} M^{1+\gamma}((9/8)Q \setminus X). \tag{2.8}$$

В силу леммы 2.4 и оценки (2.6) для $c_0(V_\varphi f)$, имеет место следующее утверждение (где $\Psi = \lambda H$, $|\lambda| \leqslant A_3$).

Лемма 2.5. *Пусть выполнена оценка* (1.5), $Q = Q(a,s)$ *и* $V_\varphi f$ *из леммы* 2.2. *Тогда существует функция* $\Psi \in \mathrm{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^3)$, *такая, что* $\mathrm{Spt}(\Delta\Psi) \subset ((9/8)Q \setminus X)$ *и имеет место следующее:*

(1) $c_0(V_\varphi f) = c_0(\Psi)$;

(2) $\|\Psi\|_\gamma \leqslant A\varepsilon(s)$.

Из лемм 2.3 и 2.5, оценок (2.6) и (2.8) вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.6. *Пусть* $V_\varphi f$ *из леммы* 2.2, Ψ *из леммы* 2.5, $r = V_\varphi f - \Psi$. *Тогда:*

(1) *при* $x \notin (8/7)Q$ *имеют место оценки*

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad |r(x)| \leqslant A\varepsilon(s)s\frac{M^{1+\gamma}((9/8)Q \setminus X)}{|x-a|^2}, \\ &\text{b)}\quad |\nabla r(x)| \leqslant A\varepsilon(s)s\frac{M^{1+\gamma}((9/8)Q \setminus X)}{|x-a|^3}; \end{aligned} \tag{2.9}$$

(2) $|c_\alpha(r)| \leqslant A\varepsilon(s)sM^{1+\gamma}((9/8)Q\setminus X)$ *при* $|\alpha| = 1$ (*так как* $c_0(r) = 0$, *коэффициенты* $c_\alpha(r)$ *при* $|\alpha| = 1$ *не зависят от центра разложения*).

Замечание 2.2. Важно отметить, что, в отличие от приближения аналитическими функциями в липшицевых нормах при $0 < \gamma < 1$ (см., например, [1, гл. 3, §1]), лемма 2.5 об уравнивании коэффициента c_0 сама по себе не приводит к включению $f \in H_\gamma(X)$; требуется более сильное утверждение об уравнивании коэффициентов c_α, $|\alpha| \leqslant 1$.

Лемма 1.1 вытекает из следующей (основной) леммы, которую докажем в §3.

Лемма 2.7. *Пусть* f, $V_\varphi f$ *и* Q *– те же, что и в лемме* 2.5, $s(Q) \leqslant 1$. *Тогда существует функция* $F \in \mathrm{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^3)$, *такая, что* $\mathrm{Spt}(\Delta F) \subset (4Q \setminus X)$, *и имеет место следующее:*

(1′) $c_\alpha(V_\varphi f, a) = c_\alpha(F, a)$ *при* $|\alpha| \leqslant 1$;

(2′) $\|F\|_\gamma \leqslant c_1(\gamma)\varepsilon(s)$.

Утверждение: “лемма 2.7 $\Rightarrow$ лемма 1.1” вытекает из [7, лемма 2.1] (см. также [14, лемма 3.2]). Дадим существенно более простой вывод леммы 1.1 из леммы 2.7; аналогичные рассуждения будут использоваться и в §3, при доказательстве леммы 2.7.

Доказательство леммы 1.1. Возьмем произвольное число $\delta = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$; покроем компакт $\operatorname{Spt}(\Delta f)$ сеткой двоичных кубов $Q_j(a_j, \delta)$ (одного размера), построим соответствующее разбиение единицы $\{\varphi_j\}$ из леммы 2.1, и пусть $\{f_j = V_{\varphi_j} f\}$ – полученное семейство локализаций. Для каждой функции f_j возьмем функцию $F_j = F$ из леммы 2.7. Пусть $\rho_j = f_j - F_j$. В силу леммы 2.7 и леммы 2.3 при $n = 2$, для $x \notin 8Q_j$ имеем следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad |\rho_j(x)| \leqslant A_1 c_1(\gamma)\varepsilon(\delta)\frac{\delta^{3+\gamma}}{|x-a_j|^3}, \\ &\text{b)}\quad |\nabla\rho_j(x)| \leqslant A_1 c_1(\gamma)\varepsilon(\delta)\frac{\delta^{3+\gamma}}{|x-a_j|^4}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Для доказательства леммы 1.1 достаточно убедиться в том, что верна оценка

$$\Big\|\sum_j \rho_j\Big\|_\gamma \leqslant c_2(\gamma)\varepsilon(\delta). \tag{2.11}$$

Зафиксируем произвольные точки $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$. Разобьем множество всех кубов покрытия Q_j на три попарно не пересекающиеся части P_m, $m = 1, 2, 3$, следующим образом.

1. Рассмотрим множество P_1 всех кубов Q_j, для которых расстояние до $\{x\} \cup \{y\}$ меньше 10δ. Так как число кубов из P_1 ограничено сверху абсолютной постоянной, в силу лемм 2.2 и 2.7 для суммы по соответствующим j имеем оценку (2.11).

2. Рассмотрим множество P_2 всех кубов Q_j, для которых расстояние до $\{x\} \cup \{y\}$ заключено в пределах $[10\delta, 10|x-y|]$ (при $|x-y| < \delta$ множество P_2 пусто). В силу оценки (2.10) a) при суммировании по индексам j кубов из P_2 имеем ($v \in \mathbb{R}^3$):

$$\sum_j |\rho_j(x)-\rho_j(y)| \leqslant \sum_j(|\rho_j(x)|+|\rho_j(y)|) \leqslant A_2 c_1(\gamma)\varepsilon(\delta)\delta^\gamma \int\limits_{10\delta\leqslant|v|\leqslant 10|x-y|} \frac{dm_v}{|v|^3}$$

$$\leqslant A_3 c_1(\gamma)\varepsilon(\delta)\delta^\gamma \log\left(\frac{|x-y|}{\delta}+1\right) \leqslant c_3(\gamma)\varepsilon(\delta)|x-y|^\gamma.$$

3. Пусть $P_3 = \{Q_j\} \setminus (P_1 \cup P_2)$; тогда для каждого куба $Q_j \in P_3$ расстояние до $\{x\} \cup \{y\}$ превосходит $\max(10\delta, 10|x-y|)$. При суммировании по индексам j кубов P_3 в силу оценки (2.10) b) имеем:

$$\sum_j |\rho_j(x) - \rho_j(y)| \leqslant A_4|x-y| \sum_j (|\nabla\rho_j(x)| + |\nabla\rho_j(y)|)$$

$$\leqslant A_5 c_1(\gamma)\varepsilon(\delta)\delta^\gamma |x-y| \int\limits_{|v|\geqslant \max(10\delta, 10|x-y|)} \frac{dm_v}{|v|^4} \leqslant A_6 c_1(\gamma)\varepsilon(\delta)|x-y|^\gamma.$$

Итак, из леммы 2.7 выведена оценка (2.11). Таким образом, для завершения доказательства леммы 1.1 осталось доказать лемму 2.7.

§3. Доказательство леммы 2.7

Зафиксируем двоичный куб $\mathbf{Q}$; пусть $s(\mathbf{Q}) = \delta \leqslant 1$, $g = V_\varphi f$, где φ удовлетворяет условиям леммы 2.1 относительно куба $\mathbf{Q}$. Лорановские коэффициенты функций при $(\partial/\partial x_m)E$ (то есть, c_α при $|\alpha| = 1$) будем обозначать через c^1_m, $m = 1, 2, 3$. Считаем, что $((3/2)\mathbf{Q} \setminus X^o) \neq \varnothing$, иначе $g \equiv 0$; при этом, очевидно, пересечение $(13/8)\mathbf{Q} \setminus X^o$ и дополнения к X содержит непустое открытое множество.

Лемма 3.1. *Пусть выполнена оценка* (1.5). *Тогда существуют* 6 *функций* $G^p_m \in \mathrm{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^3)$ ($m = 1, 2, 3$, $p = 1, 2$), *таких, что:*

(1) $\mathrm{Spt}(\Delta G^p_m) \subset (4\mathbf{Q} \setminus X)$, $g - G^1_m(x) = O(|x|^{-2})$, $G^2_m(x) = O(|x|^{-2})$ *при* $x \to \infty$;

(2) $c^1_m(G^2_m) \geqslant \sum\limits_{j=1}^{3} |c^1_j(g - G^1_m)|$;

(3) $c^1_m(G^2_m) \geqslant 3\max_{j\neq m} |c^1_j(G^2_m)|$;

(4) $\max\left(\|g - G^1_m\|_\gamma, \|G^2_m\|_\gamma\right) \leqslant c_4(\gamma)\varepsilon(\delta)$

(*в силу соотношения* $G^2_m(x) = O(|x|^{-2})$ *коэффициенты* $c^1_m(G^2_m)$ *не зависят от центра разложения*).

Из леммы 3.1 легко следует лемма 2.7. Действительно, пусть m_0 – индекс, при котором сумма $\sum\limits_{j=1}^{3} |c^1_j(g - G^1_m)|$ минимальна среди всех m. Тогда нужная функция F леммы 2.7, уравнивающая у g все коэффициенты c_α, $|\alpha| \leqslant 1$, строится в виде $F = G^1_{m_0} + \sum\limits_{m=1}^{3} t_m G^2_m$, где t_m, $m = 1, 2, 3$, – вещественные коэффициенты. Нахождение величины t_m, очевидно, сводится к решению системы из трех линейных уравнений, матрица которой в силу условия (3) леммы 3.1 хорошо обусловлена, а в силу выбора числа m_0 правая часть “не слишком велика” по сравнению с элементами главной диагонали. Это влечет оценки $|t_m| \leqslant A$ и следовательно, оценку $\|F\|_\gamma \leqslant c_1(\gamma)\varepsilon(\delta)$. Таким образом, лемма 1.1 сведена к лемме 3.1.

Доказательство леммы 3.1. Построим пару функций (G_3^1, G_3^2); остальные две пары (G_m^1, G_m^2) строятся совершенно аналогично.

Напомним, что $g = (\varphi\Delta f) * E$, где φ удовлетворяет условиям леммы 2.1 относительно куба $\mathbf{Q}$. Далее будем рассматривать покрытия компакта $(13/8)\mathbf{Q} \setminus X^o$ подходящими конечными семействами двоичных кубов Q_j и получать соответствующие функции φ_j из леммы 2.1 и локализации $g_j = V_{\varphi_j} g$. Так как $\Delta g = \varphi\Delta f$ и следовательно, $g_j = (\varphi_j\varphi\Delta f) * E$, то в силу неравенства (2.6) соответствующие оценки

$$|c_0(g_j)| \leqslant A\varepsilon(s(Q_j))M^{1+\gamma}((7/4)Q_j \setminus X) \tag{3.1}$$

вытекают из оценки (1.5) для f. Нужное покрытие $\{Q_j\} = \mathbf{Cover1}$ будет получено как результат геометрической конструкции. Сначала проведем вспомогательное построение.

Пусть Q – двоичный куб, $N = 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$, $N \geqslant 8$ (в дальнейшем, используя лемму 3.3, зафиксируем N в зависимости от γ). Разобьем Q на N^3 двоичных кубов одного размера, с длиной стороны $s_0 = s(Q)/N$; множество тех кубов D из них, для которых $((7/4)D \setminus X) \neq \varnothing$, обозначим через $\mathcal{Q}_N(Q)$. *Вертикальным рядом* назовем подмножество $\mathcal{Q}_N(Q)$ тех кубов, у которых совпадают пары (m_1, m_2) из (2.3), отличается только m_3. Вертикальный ряд назовем “хорошим”, если он содержит хотя бы два куба (обозначим их через Q_1 и Q_2), таких, что $m_3(Q_2) - m_3(Q_1) \geqslant 7$, и при этом

$$\min(M^{1+\gamma}((7/4)Q_1 \setminus X), M^{1+\gamma}((7/4)Q_2 \setminus X)) \geqslant N^{-1}(s_0)^{1+\gamma}. \tag{3.2}$$

Упорядоченную пару (Q_1, Q_2) назовем *согласованной парой*; куб Q назовем “хорошим”, если он содержит хотя бы один “хороший” вертикальный ряд, иначе (Q не содержит ни одного “хорошего” вертикального ряда) куб Q назовем “плохим”.

Рассмотрим “хороший” вертикальный ряд; пусть (Q_1, Q_2) – согласованная пара, $a_j \in (7/4)Q_j$ $(j = 1, 2)$ – произвольные точки, $h_0 = E(x - x_2) - E(x - x_1)$. Ясно, что для функции h_0 выполнено условие (3) леммы 3.1: $c_0(h_0) = 0$ и $c_3^1(h_0) > 3\max_{m\neq 3}|c_m^1(h_0)|$, причем

$c_3^1(h_0) > 5s_0$. Поэтому в силу неравенства (3.2) и леммы 2.4 имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Для любой согласованной пары* (Q_1, Q_2) *существует функция* $h_{2,1} = (\nu_2 - \nu_1) * E$, *такая, что* $\mathrm{Spt}(\nu_j) \subset ((7/4)Q_j \setminus X)$, ν_j – *(неотрицательные) меры* $(j = 1, 2)$, *и выполнены следующие условия:*

(i) $\|\nu_1\| = \|\nu_2\|$ *(и следовательно,* $c_0(h_{2,1}) = 0$, *а коэффициенты* $c_m^1(h_{2,1})$ *не зависят от центра лорановского разложения)*;

(ii) $N^{-1}(s_0)^{1+\gamma} \leqslant \|\nu_1\| \leqslant (s_0)^{1+\gamma}$, *и следовательно,*

$$c_3^1(h_{2,1}) > 5N^{-1}(s_0)^{2+\gamma}$$

(то есть, коэффициент $c_3^1(h_{2,1})$ *оценивает сверху величину* $(s(Q))^{2+\gamma}$ *с постоянной, зависящей от* N*)*;

(iii) $c_3^1(h_{2,1}) > 3\max_{m\neq 3}|c_m^1(h_{2,1})|$;

(iv) $h_{2,1} \in \mathrm{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^3)$ *и* $\|h_{2,1}\|_\gamma \leqslant A$.

С каждым "хорошим" кубом Q свяжем функцию $h_{2,1} = h_{2,1}(Q)$, выбрав согласованную пару произвольно.

Замечание 3.1. Роль функций $h_{2,1}$ состоит в следующем. Построим для локализации $V_\varphi g$ (где для φ выполнены условия леммы 2.1 относительно Q) функцию Ψ из леммы 2.5, и пусть, как и в лемме 2.6, $r = V_\varphi g - \Psi$. Тогда в силу условия (ii) леммы 3.2 величина $\varepsilon(s(Q))c_3^1(h_{2,1})$ оценивает сверху (с постоянной, зависящей от N) сумму $|c_m^1(r)|$, $m = 1, 2, 3$.

Замечание 3.2. Функцию G_3^2 будем строить как конечную линейную комбинацию функций $h_{2,1}$ с положительными коэффициентами, тем самым, в силу условия (iii) леммы 3.2, условие (3) леммы 3.1 будет выполнено автоматически.

Рассмотрим произвольный "плохой" куб Q. Так как условие (3.2) не выполняется ни в одном его вертикальном ряду, то, очевидно, для каждого вертикального ряда сумма $M^{1+\gamma}((7/4)D \setminus X)$ по всем соответствующим кубам D не превосходит $A(s_0)^{1+\gamma}$. Отсюда вытекает следующая оценка. Пусть Q' – куб, $Q' \subset Q$, тогда

$$\sum_{\{Q_j | Q_j \in \mathcal{Q}_N(Q),\, Q_j \subset Q'\}} (s_0)^{1-\gamma} M^{1+\gamma}((7/4)Q_j \setminus X) \leqslant A_1(s(Q'))^2. \qquad (3.3)$$

Геометрическая конструкция §3 опирается на следующую лемму; для ее справедливости существенно, что $\gamma > 0$. Заметим, что в случае равномерных гармонических приближений ($\gamma = 0$) ситуация значительно усложняется (см., например, [9]).

Лемма 3.3. *Существует (достаточно большое) число $N = N(\gamma)$, такое, что для каждого "плохого" куба Q при суммировании по всем кубам Q_j из $\mathcal{Q}_N(Q)$ выполнена оценка*

$$\sum_{\mathcal{Q}_N(Q)} s_0 M^{1+\gamma}((7/4)Q_j \setminus X) \leqslant \frac{1}{2} s(Q) M^{1+\gamma}((7/4)Q \setminus X) \tag{3.4}$$

(напомним, что $N = s(Q)/s(Q_j)$, $s(Q_j) = s_0$).

Доказательство леммы 3.3. Установим оценку

$$\sum_{\mathcal{Q}_N(Q)} (s_0)^{1-\gamma} M^{1+\gamma}((7/4)Q_j \setminus X) \leqslant A(s(Q))^{1-\gamma} M^{1+\gamma}\left(\bigcup_{\mathcal{Q}_N(Q)} (7/4)Q_j \setminus X\right), \tag{3.5}$$

из которой сразу же следует оценка (3.4), если $A/N^\gamma \leqslant 1/2$.

Заметим [3, гл. 2, (1.3)], что, если в определении обхвата по Хаусдорфу (см. (1.3)) в покрытиях шары B_k заменить (замкнутыми) двоичными кубами D_k и взять $(s(D_k))^t$ вместо $(r_k)^t$, то полученная величина $m_t(\cdot) = \inf \sum_k (s(D_k))^t$ будет соизмерима с $M^t(\cdot)$. Рассмотрим счетное семейство двоичных кубов D_k, покрывающих $\bigcup_{\mathcal{Q}_N(Q)} ((7/4)Q_j \setminus X)$, таких, что

$$m_{1+\gamma}\left(\bigcup_{\mathcal{Q}_N(Q)} (7/4)Q_j \setminus X\right) \leqslant \sum_k (s(D_k))^{1+\gamma} \leqslant 2m_{1+\gamma}\left(\bigcup_{\mathcal{Q}_N(Q)} (7/4)Q_j \setminus X\right);$$

достаточно доказать (3.5) с заменой правой части на

$$A_1 \sum_k (s(D_k))^{1+\gamma} (s(Q))^{1-\gamma}.$$

Разобьем множество $\mathcal{Q}_N(Q)$ на две непересекающиеся части $\mathcal{Q}_N^1(Q)$ и $\mathcal{Q}_N^2(Q)$ следующим образом: куб Q^1 из $\mathcal{Q}_N(Q)$ принадлежит $\mathcal{Q}_N^1(Q)$

тогда и только тогда, когда для любого куба покрытия D_k, пересекающего $2Q^1$, выполнено условие $s(D_k) < s_0$. Следовательно, множество $\bigcup\limits_{\mathcal{Q}^1_N(Q)} ((7/4)Q_j \setminus X)$ покрывается объединением кубов D_k с $s(D_k) < s_0$, причем каждый такой куб D_k в силу того, что $s(D_k) < s(Q_j)$, пересекает не более 8 различных кубов из $\mathcal{Q}^1_N(Q)$, поэтому

$$\sum_{\mathcal{Q}^1_N(Q)} m_{1+\gamma}((7/4)Q_j \setminus X) \leqslant 8 \sum_k (s(D_k))^{1+\gamma}. \tag{3.6}$$

Так как для любого куба Q^2 из $\mathcal{Q}^2_N(Q)$ куб $2Q^2$ пересекает хотя бы один куб покрытия D_k с $s(D_k) \geqslant s_0$, то Q^2 содержится в $5D_k$. В силу формулы (3.3), где $Q' = D_k$, и неравенства $s(D_k) \leqslant s(Q)$ имеем

$$\sum_{\mathcal{Q}^2_N(Q)} (s_0)^{1-\gamma} M^{1+\gamma}((7/4)Q_j \setminus X) \leqslant A_2 \sum_k (s(D_k))^{1+\gamma}(s(Q))^{1-\gamma}. \tag{3.7}$$

В силу (3.6) и (3.7) установлена оценка (3.5) и, следовательно, (3.4). Лемма 3.3 доказана. □

С этого момента зафиксируем N в соответствии с леммой 3.3. Проведем геометрическую конструкцию, которая состоит из 2 частей: основной и дополнительной.

Конструкция: основная часть. Проведем индукцию по номеру шага. Перед первым шагом имеем множество $\mathcal{Q}^{(0)}$, состоящее из 27 двоичных кубов с длиной стороны δ, составляющих куб $3\mathbf{Q}$. В общем случае перед n-м шагом, где $n \in \mathbb{N}$, имеем вполне определенное конечное множество $\mathcal{Q}^{(n-1)}$ двоичных кубов с длиной стороны $N^{1-n}\delta$.

На n-м шаге исключим из рассмотрения все кубы из множества $\mathcal{Q}^{(n-1)}$, не пересекающие компакт $(13/8)\mathbf{Q} \setminus X^o$, зафиксируем все "хорошие" кубы из $\mathcal{Q}^{(n-1)}$ и построим соответствующие им функции $h_{2,1}$. Проверим указанные ниже два условия остановки. Если хотя бы одно из этих условий выполнено, то основная часть конструкции завершена. В противном случае каждый из незафиксированных кубов $\mathcal{Q}^{(n-1)}$ (это "плохой" куб, пересекающий множество $(13/8)\mathbf{Q} \setminus X^o$), разделим на N^3 двоичных кубов одинакового размера с длиной стороны $N^{-n}\delta$; множество полученных кубов и образует множество $\mathcal{Q}^{(n)}$.

Условия остановки.

1. Множество $\mathcal{Q}^{(n)}$ не содержит "плохих" кубов, пересекающих $(13/8)\mathbf{Q} \setminus X^o$.

2. Выполнена оценка $\delta^{2+\gamma}/2^n < \sum_j (s(Q_j))^{2+\gamma}$, где в правой части берется сумма по всем зафиксированным ранее "хорошим" кубам (так как пересечение компакта $(13/8)\mathbf{Q} \setminus X^o$ и дополнения к X содержит непустое открытое множество, то при достаточно больших n хотя бы один "хороший" куб фиксируется).

Таким образом, построение завершается на некотором шаге. По окончании основной части конструкции имеем покрытие компакта $(13/8)\mathbf{Q} \setminus X^o$, состоящее из кубов множества $\mathcal{Q}^{(n)}$ для последнего номера n, пересекающих $(13/8)\mathbf{Q} \setminus X^o$, и всех зафиксированных ранее "хороших" кубов; покрытие обозначим **Cover** (в результате дополнительной части конструкции покрытие **Cover** будет преобразовано в нужное покрытие **Cover1**).

В силу построения, для покрытия **Cover** выполнены следующие оценки (3.8)–(3.9). Во-первых,

$$\sum_{\{j|Q_j \in \mathbf{Cover}\}} s(Q_j) M^{1+\gamma}((7/4)Q_j \setminus X) \leqslant c_5(\gamma) \sum_k c_3^1 (h_{2,1})_k, \qquad (3.8)$$

где в правой части сумма берется по всем построенным функциям $h_{2,1}$, соответствующим "хорошим" кубам покрытия **Cover**.

Действительно, для суммы по "хорошим" кубам Q_j покрытия **Cover** оценка (3.8) сразу же следует из условия (ii) леммы 3.2 (причем $M^{1+\gamma}((7/4)Q_j \setminus X)$ в левой части неравенства (3.8) можно заменить даже на $(s(Q_j))^{1+\gamma}$), а для суммы по "плохим" кубам покрытия **Cover** – из второго условия завершения конструкции и оценки (3.4), так как на каждом шаге делятся только "плохие" кубы, и соответствующая сумма $s(Q_j)M^{1+\gamma}((7/4)Q_j \setminus X)$ уменьшается не менее, чем в 2 раза.

Далее, для произвольного куба D

$$\sum_{\{j|Q_j \in \mathbf{Cover},\, Q_j \subset D\}} s(Q_j) M^{1+\gamma}((7/4)Q_j \setminus X) \leqslant c_5(\gamma)(s(D))^{2+\gamma}. \qquad (3.9)$$

Действительно, пусть D – двоичный куб, $s(D) \leqslant \delta$, n – первый номер, для которого существует куб $Q \in \mathcal{Q}^{(n)}$, содержащийся в D; тогда $s(D)/s(Q) \leqslant N$, и если n – номер последнего шага в основной части конструкции, то оценка (3.9), очевидно, выполняется. Если же номер n не последний, то оценка (3.9) по индукции следует из (3.4), так как делятся только "плохие" кубы. Оценка (3.9) для произвольного куба D следует из такой же оценки для двоичного куба с длиной стороны не больше δ.

Замечание 3.3. Смысл оценки (3.8) в следующем. Если взять функцию G_3^2 как сумму всех построенных функций $h_{2,1}$, то (после построения разбиения единицы по покрытию **Cover**) из (3.8) нетрудно получить утверждение (2) леммы 3.1. Ситуация с утверждением (4) леммы 3.1 сложнее: оценки (3.9) здесь недостаточно, так как в покрытии **Cover** кратность пересечения увеличенных кубов $(7/4)Q_j$ может быть произвольной. Цель дополнительной части конструкции – увеличив некоторые из кубов покрытия **Cover**, добиться контроля над указанной кратностью пересечения, "не слишком испортив" оценки (3.8)–(3.9) (см. лемму 3.4).

Конструкция: дополнительная часть. Пусть δ_0 – минимальная длина стороны кубов покрытия **Cover**, D – произвольный куб из **Cover**; построим для D конечное множество двоичных кубов $halo(D)$. Соответствующее построение аналогично проведенному в [7, Sec. 2.3].

Положим $D^{(0)} = D$, $D^{(1)}$ – множество, состоящее из D и всех двоичных кубов с длиной стороны $s(D)/2$, не содержащихся в D, но касающихся D; аналогично, при $m > 1$ множество $D^{(m)}$ состоит из всех кубов $D^{(m-1)}$ и всех двоичных кубов с длиной стороны $s(D)/2^m$, не содержащихся в кубах $D^{(m-1)}$, но касающихся их. Возьмем $halo(D) = D^{(m)}$, где m – максимальный номер, такой, что для всех кубов $Q \in D^{(m)}$ имеем $s(Q) \geqslant \delta_0$. Отметим очевидные свойства множества $halo(D)$:

1) если кубы Q и Q' из $halo(D)$ касаются, то отношение $s(Q)/s(Q')$ принимает значения $1/2$, 1 или 2;

2) $halo(D)$ содержит D (если $s(D) = \delta_0$, в частности, D – "плохой" куб, то $halo(D) = D$), при этом все кубы семейства $halo(D)$ содержатся в $3D$;

3) сумма $(s(Q_j))^{2+\gamma}$ по всем кубам $Q_j \in halo(D)$ не превосходит $c_6(\gamma)(s(D))^{2+\gamma}$ (здесь важно, что $\gamma > 0$).

Возьмем множество всех кубов $halo(D)$ для всех $D \in$ **Cover**; исключим из этого множества все кубы, которые не являются максимальными по включению или не пересекают компакт $(13/8)\mathbf{Q} \setminus X^o$. Множество всех оставшихся (не исключенных) кубов образует покрытие **Cover1** компакта $(13/8)\mathbf{Q}\setminus X^o$, нужное для доказательства леммы 3.1. Дополнительная часть конструкции завершена.

Пусть $\mathcal{Q}'_b$ – множество “плохих” кубов покрытия **Cover** (длина стороны каждого из них минимальна и равна δ_0); $\mathcal{Q}'_g$ – множество “хороших” кубов покрытия **Cover**. В силу построения множество **Cover1** состоит из трех попарно не пересекающихся частей:

1. $\mathcal{Q}_b$ *– подмножество в* $\mathcal{Q}'_b$;
2. $\mathcal{Q}_g$ *– подмножество в* $\mathcal{Q}'_g$;
3. $\mathcal{Q}_h = \mathbf{Cover1} \setminus (\mathcal{Q}_b \bigcup \mathcal{Q}_g)$*; каждый куб из* $\mathcal{Q}_h$ *принадлежит* $\bigcup\limits_{\{D|D\in\mathcal{Q}'_g\}} halo(D)$.

Замечание 3.4. Множество $\bigcup\limits_{\{D|D\in\mathcal{Q}'_g\}} halo(D)$ покрывается множеством $\bigcup\limits_{\{D|D\in\mathcal{Q}_g\}} halo(D)$. Действительно, из того, что какой-либо куб $D_0 \in \mathcal{Q}'_g \setminus \mathcal{Q}_g$ не является максимальным по включению в множество $\bigcup\limits_{\{D|D\in\mathbf{Cover}\}} halo(D)$, из определения множества $halo(\cdot)$ следует, что максимальным по включению не может быть и никакой куб из $halo(D_0)$. Отсюда следует, что каждый куб из $\mathcal{Q}'_g \setminus \mathcal{Q}_g$ покрывается некоторым кубом из множества $\bigcup\limits_{\{D|D\in\mathcal{Q}_g\}} halo(D)$, и каждый куб из $\mathcal{Q}_h$ принадлежит $\bigcup\limits_{\{D|D\in\mathcal{Q}_g\}} halo(D)$.

Лемма 3.4. *Имеет место следующее:*

(1)

$$\sum_{\{j|Q_j\in\mathbf{Cover1}\}} \chi((9/4)Q_j) \leqslant 24,$$

где $\chi(\cdot)$ *– характеристическая функция;*

(2)

$$\sum_{\{j|Q_j\in\mathcal{Q}_h\}} (s(Q_j))^{2+\gamma} \leqslant c_7(\gamma) \sum_{\{j|Q_j\in\mathcal{Q}'_g\}} (s(Q_j))^{2+\gamma};$$

(3)

$$\sum_{\{j|Q_j\in\mathcal{Q}'_g\}} (s(Q_j))^{2+\gamma} \leqslant c_7(\gamma) \sum_{\{j|Q_j\in\mathcal{Q}_g\}} (s(Q_j))^{2+\gamma};$$

(4) *пусть* D *– произвольный двоичный куб, тогда*

$$\sum_{\{j|Q_j\in\mathcal{Q}_h,\, Q_j\subset D\}} (s(Q_j))^{2+\gamma} \leqslant c_7(\gamma)(s(D))^{2+\gamma};$$

(5) *для покрытия* **Cover1** *сохраняются оценки* (3.8)–(3.9) *с несколько увеличенной по сравнению с* **Cover** *постоянной* $c_5(\gamma)$.

Доказательство леммы 3.4. Оценка (1) следует из свойства 1) множества $halo(D)$ и того, что кратность пересечения двоичных кубов одного размера не превосходит 8. Оценка (2) следует из свойства 3) множества $halo(D)$.

Прежде чем доказывать оценки (3) и (4), напомним, что в силу формулы (3.2) для куба Q из $\mathcal{Q}'_g$ (и следовательно, из $\mathcal{Q}_g$) соизмеримы величины $M^{1+\gamma}((7/4)Q \setminus X)$ и $(s(Q))^{1+\gamma}$. Поэтому в силу неравенства (3.9) для каждого куба $D \in \mathcal{Q}_g$ сумма $(s(Q_j))^{2+\gamma}$ по всем кубам $Q_j \in \mathcal{Q}'_g$, содержащимся в $3D$, не превосходит $c_8(\gamma)(s(D))^{2+\gamma}$.

Так как, в силу замечания 3.4, каждый куб $Q \in \mathcal{Q}'_g \setminus \mathcal{Q}_g$ содержится в некотором кубе из $halo(D)$ для подходящего $D \in \mathcal{Q}_g$ (и следовательно, в силу свойства 2) множества $halo(D)$, куб Q содержится в $3D$), оценка (3) доказана.

Рассмотрим оценку (4). Для всех кубов Q_j, каждый из которых принадлежит $halo(Q)$ для подходящего куба $Q \in \mathcal{Q}'_g$, $Q \subset D$, оценка (4) следует из соизмеримости величин $M^{1+\gamma}((7/4)Q \setminus X)$ и $(s(Q))^{1+\gamma}$ и свойства 3) множества $halo(Q)$.

Каждый из остальных кубов Q_j в силу построения принадлежит $halo(Q)$ для куба Q, касающегося границы D, причем $s(Q) \leqslant 2s(D)$. Ясно, что сумма величин $(s(Q))^{2+\gamma}$ по всем таким кубам Q не превосходит $A(s(D))^{2+\gamma}$, и в силу свойства 3) оценка (4) доказана.

Утверждение (5) леммы 3.4 следует из оценок (2)–(4). Действительно, в силу формулы (3.8), условия (ii) леммы 3.2, и утверждений (2) и (3) имеем

$$\sum_{\{j|Q_j \in \mathcal{Q}_h\}} (s(Q_j))^{2+\gamma} \leqslant c_9(\gamma) \sum_{\{j|Q_j \in \mathcal{Q}_g\}} c_3^1(h_{2,1})_j,$$

откуда следует сохранение соотношения (3.8). Сохранение соотношения (3.9) следует из оценки (4). Лемма 3.4 доказана. □

Теперь все готово для завершения доказательства леммы 3.1.

Построим разбиение единицы $\{\varphi_j\}$, соответствующее покрытию $\{Q_j(a_j, s_j)\} = \textbf{Cover1}$; построим семейство локализаций $\{g_j = V_{\varphi_j} g\}$. В силу неравенства (3.1) и леммы 2.5 для каждой функции g_j существует функция $\Psi_j \in \mathrm{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^3)$, такая, что $\mathrm{Spt}(\Delta\Psi_j) \subset ((7/4)Q_j^o \setminus X)$,

$\|\Psi_j\|_\gamma \leqslant A\varepsilon(\delta)$ и $c_0(g_j) = c_0(\Psi_j)$, причем для $\Psi = \Psi_j$, $Q = (7/4)Q_j^o$ и разности $r = r_j \overset{def}{=} g_j - \Psi_j$ имеют место оценки леммы 2.6.

Возьмем $G_3^1 = \sum\limits_{\{j|Q_j\in\mathbf{Cover1}\}} \Psi_j$ и $\widetilde{G_3^2} = \varepsilon(\delta) \sum\limits_{\{j|Q_j\in\mathcal{Q}_g\}} (h_{2,1})_j$. В силу определения функций Ψ_j, условий (i) и (iii) леммы 3.2 и замечания 3.2, для функций G_3^1 и $\widetilde{G_3^2}$ выполнены утверждения (1) и (3) леммы 3.1. В силу условия (ii) леммы 3.2, оценки (3.8), утверждения (5) леммы 3.4 и замечания 3.1, для G_3^1 и $G_3^2 = c_{10}(\gamma)\widetilde{G_3^2}$ при подходящем $c_{10}(\gamma)$ имеет место утверждение (2) леммы 3.1.

Осталось доказать утверждение (4) леммы 3.1; необходимо и достаточно установить следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \Bigg\|\sum_{\{j|Q_j\in\mathbf{Cover1}\}} r_j\Bigg\|_\gamma \leqslant c_{11}(\gamma)\varepsilon(\delta), \\ &\text{b)} \quad \Bigg\|\sum_{\{j|Q_j\in\mathcal{Q}_g\}} (h_{2,1})_j\Bigg\|_\gamma \leqslant c_{11}(\gamma). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Доказательство оценок (3.10) проводится так же, как в конце §2 был проведен вывод леммы 1.1 из леммы 2.7. Докажем оценку (3.10) а): она вытекает из лемм 2.5, 2.6, оценки (3.9) и утверждений (1) и (5) леммы 3.4.

Зафиксируем произвольные точки $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$.

1. Пусть P_1 – множество всех кубов $Q_j \in \mathbf{Cover1}$, для которых куб $(9/4)Q_j$ пересекает множество $\{x\}\cup\{y\}$. В силу утверждения (1) леммы 3.4, число кубов из P_1 ограничено сверху абсолютной постоянной, поэтому в силу лемм 2.2 и 2.5 для суммы по всем кубам из P_1 имеем оценку (3.10) а).

Отметим, что для любого куба Q_j из $\mathbf{Cover1} \setminus P_1$ расстояние от произвольной точки $a'_j \in 2Q_j$ до x (соответственно, до y) соизмеримо с расстоянием от центра a_j куба Q_j до x (до y), причем вне $2Q_j$ для функций r_j имеют место оценки (2.9).

Поэтому из (2.9) и из (3.9) с учетом утверждения (5) леммы 3.4 вытекает следующее. Пусть $O_k(x)$ – множество всех кубов Q_j из $\mathbf{Cover1}\setminus P_1$, таких, что расстояние от a_j до x заключено в пределах $[2^k, 2^{k+1}]$, где $k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\sum_{\{j|Q_j \in O_k(x)\}} |r_j(x)| \leqslant A\varepsilon(\delta)2^{-2k} \sum_{\{j|Q_j \in O_k(x)\}} s_j M^{1+\gamma}((7/4)Q_j \setminus X) \leqslant A_1 c_5(\gamma)\varepsilon(\delta)2^{k\gamma}, \quad (3.11)$$

и такая же оценка выполняется для суммы $|r_j(y)|$ по аналогично определяемому множеству $O_k(y)$.

2. Пусть число $k_0 \in \mathbb{Z}$ таково, что $2^{k_0} \leqslant |x-y| < 2^{k_0+1}$; P_2 – множество всех кубов $Q_j \in \mathbf{Cover1} \setminus P_1$, таких, что выполнена оценка $\min(|a_j-x|, |a_j-y|) \leqslant 10|x-y|$. Так как при этом $\max(|a_j-x|, |a_j-y|) \leqslant 11|x-y|$, то в силу формулы (3.11) при суммировании по индексам j кубов P_2 (и следовательно, по соответствующим k) имеем:

$$\sum_j |r_j(x) - r_j(y)| \leqslant \sum_j (|r_j(x)| + |r_j(y)|) \leqslant A_2 c_5(\gamma)\varepsilon(\delta) \sum_{\{k|k\leqslant k_0\}} 2^{k\gamma} \leqslant c_{12}(\gamma)\varepsilon(\delta)|x-y|^\gamma.$$

3. Пусть $P_3 = \mathbf{Cover1} \setminus (P_1 \cup P_2)$. Аналогично неравенству (3.11) получим, что

$$\sum_{\{j|Q_j \in O_k(x)\}} |\nabla r_j(x)| \leqslant A_2 c_5(\gamma)\varepsilon(\delta)2^{k(\gamma-1)}. \quad (3.12)$$

С учетом неравенства $\min(|a_j-x|, |a_j-y|) > 10|x-y|$, при суммировании по индексам j кубов P_3 отсюда следует:

$$\sum_j |r_j(x) - r_j(y)| \leqslant A_3|x-y| \sum_j (|\nabla r_j(x)| + |\nabla r_j(y)|)$$

$$\leqslant A_4|x-y| c_5(\gamma)\varepsilon(\delta) \sum_{\{k|k\geqslant k_0\}} 2^{k(\gamma-1)} \leqslant c_{12}(\gamma)\varepsilon(\delta)|x-y|^\gamma.$$

Оценка (3.10) a) доказана.

Оценка (3.10) b) доказывается аналогично (даже проще), так как, в силу условий (i)–(iv) леммы 3.2 и леммы 2.3 при $n=1$, для функций $(h_{2,1})_j$ выполнена оценка $\|(h_{2,1})_j\|_\gamma \leqslant A$, вне кубов $2Q_j$ имеют место оценки

$$|(h_{2,1})_j(x)| \leqslant A\frac{(s_j)^{2+\gamma}}{|x-a_j|^2}, \quad |\nabla(h_{2,1})_j(x)| \leqslant A\frac{(s_j)^{2+\gamma}}{|x-a_j|^3}$$

и в силу формулы (3.9) для произвольного куба D выполнено неравенство

$$\sum_{\{j|Q_j\in\mathcal{Q}_g,\,Q_j\subset D\}}(s_j)^{2+\gamma}\leqslant c_5(\gamma)(s(D))^{2+\gamma}.$$

Лемма 3.1 доказана. Доказательство леммы 1.1 завершено. □

§4. Доказательство теоремы 1

Теорема 1 вытекает из лемм 4.2 и 4.3. В лемме 4.2 доказывается необходимость оценки (1.4) для условия $f\in H_\gamma(X)$; в лемме 4.3 устанавливается, что если имеет место оценка (1.4), то выполнены условия леммы 1.1. Так как лемма 1.1 была доказана выше, этим доказательство теоремы 1 завершается. В доказательстве теоремы 1 используем некоторые факты из [9, §4].

Прежде всего покажем (см. (4.4)), что оценка (1.4) фактически является специальным случаем оценки (1.5) для функций ψ простой радиальной структуры. Пусть

$$\psi_1^0(x)=\frac{15}{8\pi}\chi_{B(0,1)}(x)(1-|x|^2),\quad \psi_r^a(x)=r^{-3}\psi_1^0\left(\frac{x-a}{r}\right), \tag{4.1}$$

где $\chi_{(\cdot)}$ – характеристическая функция, $a\in\mathbb{R}^3$ и $r>0$; постоянная $15/(8\pi)$ взята для нормировки $\displaystyle\int\psi_r^a(x)\,dm_x{=}1$.

Заметим, что $\psi_r^a\notin C^\infty(\mathbb{R}^3)$ (хотя ψ_r^a и принадлежит классу $\mathrm{Lip}^1(\mathbb{R}^3)$); однако, используя формулу Грина, можно корректно определить локализации $E*(\psi_r^a\Delta h)$ для $h\in C^\gamma(\mathbb{R}^3)$ (а также для $h\in C(\mathbb{R}^3)$).

Пусть сначала $h\in C^2(\mathbb{R}^3)$. В силу формулы Грина для гармонических функций (например, формула (29) из [15, §6, п.5]) имеем ($B=B(a,r)$):

$$\int\limits_B\left(\psi_r^a(x)\Delta h(x)-h(x)\Delta\psi_r^a(x)\right)\,dm_x =\int\limits_{\partial B}\left(\psi_r^a(x)\frac{\partial h}{\partial n}(x)-h(x)\frac{\partial\psi_r^a}{\partial n}(x)\right)\,ds_x \tag{4.2}$$

(учтено, что $\psi_r^a\equiv 0$ при $x\notin B$; значения нормальной производной $\dfrac{\partial\psi_r^a}{\partial n}$ на ∂B вычисляются изнутри B). Так как функция ψ_r^a непрерывна в $\mathbb{R}^3$

и равна нулю на ∂B, слагаемое, содержащее нормальную производную h на ∂B, исчезает, и после простых вычислений получим

$$\int\limits_B \psi_r^a(x)\Delta h(x)\,dm_x = \int\limits_B h(x)\Delta\psi_r^a(x)\,dm_x - \int\limits_{\partial B} h(x)\frac{\partial\psi_r^a}{\partial n}(x)\,ds_x$$
$$= 15r^{-2}\left(h_{\text{ср}}(\partial B) - h_{\text{ср}}(B)\right). \tag{4.3}$$

Напомним, что запись $\langle\Psi|\varphi\rangle$ означает действие распределения Ψ с компактным носителем на функцию $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$; в частности, в левой части неравенства (1.5) с учетом интегрирования по частям записано действие

$$\langle\psi\Delta f|1\rangle = \int\limits_Q f(x)\Delta\psi(x)\,dm_x.$$

В качестве действия $\langle\psi_r^a\Delta h|1\rangle$ для $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ естественно взять значение интеграла $\int\limits_B \psi_r^a(x)\Delta h(x)\,dm_x$; в силу равенства (4.3) имеем

$$\langle\psi_r^a\Delta h|1\rangle = 15r^{-2}\left(h_{\text{ср}}(\partial B) - h_{\text{ср}}(B)\right); \tag{4.4}$$

по формуле (4.4) действие распределения $\langle\psi_r^a\Delta h|1\rangle$ переносится на функции $h\in C^\gamma(\mathbb{R}^3)$, $0 < \gamma < 1$.

Локализации $E * (\psi_r^a\Delta h)$ для функции $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ определим в соответствии с (4.2)–(4.3):

$$E * (\psi_r^a\Delta h)(x)$$
$$= \int\limits_B h(y)\Delta_y\left(\psi_r^a(y)E(y-x)\right)\,dm_y - \int\limits_{\partial B} h(y)E(y-x)\frac{\partial\psi_r^a}{\partial n}(y)\,ds_y \tag{4.5}$$

(так как $\psi_r^a \equiv 0$ на ∂B, интеграл, содержащий нормальную производную $E(y-x)$ на ∂B, исчезает). При вычислении лапласиана $\Delta_y\left(\psi_r^a(y)E(y-x)\right)$ учитываем фундаментальность решения E, именно,

$$\Delta_y\left(\psi_r^a(y)E(y-x)\right) = \psi_r^a(x) + E(y-x)\Delta_y\psi_r^a(y) + 2\nabla_y\psi_r^a(y)\nabla_y E(y-x).$$

То, что формула (4.5) сохраняет смысл для $h \in C^\gamma(\mathbb{R}^3)$, $0 < \gamma < 1$ (и для $h \in C(\mathbb{R}^3)$), показывается предельным переходом, так как в правой части в (4.5) записаны сингулярные интегралы с суммируемыми ядрами, а производные h отсутствуют.

Лемма 4.1. *Пусть $h \in C^\gamma(\mathbb{R}^3)$, $B = B(a,r)$ – открытый шар. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(a) *функция $E*(\psi_r^a \Delta h)$ гармонична всюду вне компакта*

$$\overline{B(a,r)} \bigcap \mathrm{Spt}(\Delta h);$$

(b) $E*(\psi_r^a \Delta h) \in C^\gamma(\mathbb{R}^3)$ *и* $\|E*(\psi_r^a \Delta h)\|_\gamma \leqslant A\epsilon_{h,\gamma}(r) r^{-3}$, *где* $\epsilon_{(\cdot),\gamma}$ *из* (1.2), *причем* $\lim\limits_{x\to\infty} E*(\psi_r^a \Delta h)(x) = 0$*;*

(c) *для лорановского разложения функции* $E*(\psi_r^a \Delta h)$ (*см.* (2.5)) *выполнено равенство* $c_0(E*(\psi_r^a \Delta h)) = 15r^{-2}\,(h_{\mathrm{cp}}(\partial B) - h_{\mathrm{cp}}(B))$.

Доказательство. Утверждение a) очевидно для $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$; случай $h \in C^\gamma(\mathbb{R}^3)$ стандартно получается регуляризацией (сверткой h с C_0^∞-функциями аппроксимативной единицы). Утверждение b) следует из равенства (4.5) прямым (и несложным) вычислением, при этом учитываем равенство $\Delta h = \Delta(h - h(a))$. Равенство c) следует из сравнения правой части формулы (4.3) и коэффициента при $E(y-x)$ в (4.5). Лемма доказана. □

Следующее утверждение известно (см., например, [13, теорема 5.2], [14, лемма 3.1]). Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$ – борелевское множество, $h \in \mathrm{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^3)$ – функция, такая, что $\mathrm{Spt}(\Delta h) \subset U$. Тогда выполнена оценка

$$|\langle \Delta h | 1\rangle| \leqslant A\|h\|_\gamma M^{1+\gamma}(U). \tag{4.6}$$

Отсюда и из леммы 4.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Пусть $f \in H_\gamma(X)$, тогда для любого открытого шара B радиуса r выполнена оценка* (1.4) *при $k=1$ и $\epsilon(r) = A\epsilon_{f,\gamma}(r)$.*

Доказательство. Пусть $f \in H_\gamma(X)$. Тогда для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует функция F, такая, что на X_1-замыкании некоторой окрестности множества X выполнены оценка $\|f - F\|_\gamma(X_1) < \varepsilon_1$ и равенство $\Delta F = 0$. Продолжив разность $f - F$ по теореме X. Уитни [2, гл. 6, теорема 3] на пространство $\mathbb{R}^3$ как финитную функцию из $C^\gamma(\mathbb{R}^3)$, получим неравенство $\|f - F\|_\gamma < A_1\varepsilon_1$. В силу произвольности ε_1 будем считать, что $\varepsilon_1 \leqslant \epsilon_{f,\gamma}(r)$.

Из леммы 4.1 следует, что

$$E*(\psi_r^a \Delta F) \in C^\gamma(\mathbb{R}^3), \quad \mathrm{Spt}\Delta(E*(\psi_r^a \Delta F)) \subset (kB \setminus X)$$

при любом $k > 1$ и имеет место оценка

$$\|E*(\psi_r^a \Delta F)\|_\gamma \leqslant A\epsilon_{f,\gamma}(r) r^{-3}.$$

В силу (4.6), (2.5) и равенства c) леммы 4.1 получим оценку

$$15r^{-2}\left|F_{\text{ср}}(\partial B)-F_{\text{ср}}(B)\right|\leqslant A\epsilon_{f,\gamma}(r)r^{-3}\inf_{k>1}M^{1+\gamma}(kB\setminus X).$$

Так как $\lim\limits_{t\to k}\left|F_{\text{ср}}(\partial(tB))-F_{\text{ср}}(tB)\right|=\left|F_{\text{ср}}(\partial(kB))-F_{\text{ср}}(kB)\right|$, имеем:

$$15\left|F_{\text{ср}}(\partial B)-F_{\text{ср}}(B)\right|\leqslant A\epsilon_{f,\gamma}(r)r^{-1}M^{1+\gamma}(B\setminus X).$$

В силу оценки $\|f-F\|_\gamma<A_1\varepsilon_1$ и произвольности ε_1 оценка (1.4) установлена. Лемма 4.2 доказана. □

Далее, не ограничивая общности, будем считать, что функция ϵ в (1.4) выбрана так, что при $t>0$ выполнено неравенство $\epsilon(t)\geqslant\epsilon_{f,\gamma}(t)$.

Лемма 4.3. *Пусть для функции f и любого открытого шара B выполнена оценка* (1.4)*, тогда для произвольных куба Q и функции $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\mathrm{Spt}(\psi)\subset Q$, имеет место оценка* (1.5).

Доказательство леммы 4.3. Считаем, что $M^{1+\gamma}((9/8)Q\setminus X)>0$, иначе $\Delta f=0$ в окрестности куба Q, и обе части в (1.5) равны нулю. Также, очевидно, можем считать, что $k\geqslant 1$ в (1.4).

Покроем куб Q сеткой двоичных кубов $Q_j=Q_j(a_j,\delta)$ одинакового размера так, что $M^{1+\gamma}((9/8)Q\setminus X)<\delta^{1+\gamma}\leqslant 4M^{1+\gamma}((9/8)Q\setminus X)$. Пусть $B_j=B(a_j,2\delta)$.

Замечание 4.1. Далее считаем, что все шары $(4+k)B_j$ содержатся в $(9/8)Q$, иначе величина δ сравнима с $s=s(Q)$, и оценка (1.5) является следствием очевидной оценки (a – центр куба Q):

$$\left|\int\limits_Q f(x)\Delta\psi(x)\,dm_x\right|$$
$$\leqslant\int\limits_Q|(f(x)-f(a))\Delta\psi(x)\,dm_x|\leqslant A\epsilon_{f,\gamma}(s)\|\nabla^2\psi\|_{\mathrm{L}_\infty}s^{3+\gamma}.$$

Введем специальное разбиение единицы $\{\varphi_{3,j}\}$ на $\bigcup_j Q_j$ аналогично статье [10]. Пусть $\psi^0_{3,\delta}=\psi^0_\delta*\psi^0_\delta*\psi^0_\delta$. Ясно, что $\psi^0_{3,\delta}(x)\geqslant 0$, $\mathrm{Spt}(\psi^0_{3,\delta})\subset B(0,3\delta)$ и в силу нормировки $\displaystyle\int\psi^0_{3,\delta}(x)\,dm_x=1$.

Пусть $\{\varphi_j\}$ – разбиение единицы из леммы 2.1 на $\bigcup_j Q_j$. Напомним, что $\varphi_j\in C_0^\infty(B_j)$ (то есть, $\varphi_j\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $\mathrm{Spt}(\varphi_j)\subset B_j$) и $\|\nabla^n\varphi_j\|_{\mathrm{L}_\infty}\leqslant$

$A(n)\delta^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Используя функции $\psi^0_{3,\delta}$, получим новое разбиение единицы $\{\varphi_{3,j}\} = \{\psi^0_{3,\delta} * \varphi_j\}$; при этом $\varphi_{3,j} \in C^\infty_0(4B_j)$ и $\|\nabla^n \varphi_{3,j}\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A_1(n)\delta^{-n}$. Цель нового разбиения единицы – выполнение оценки (4.7), см. также замечание 4.2.

Будем использовать следующие утверждения (i) и (ii), установленные в [9, §4].

(i) Пусть α – мультииндекс, $|\alpha| \leqslant 2$, $\Psi_{\alpha,j}$ – решение уравнения свертки

$$(x - a_j)^\alpha \varphi_{3,j} = \psi^0_\delta * \Psi_{\alpha,j}.$$

Тогда $\Psi_{\alpha,j} \in C^\infty_0(B(a_j, 3\delta))$, и имеет место оценка $\|\Psi_{\alpha,j}\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A\delta^{|\alpha|}$ [9, лемма 4.2] (см. также [10, лемма 2.5]); следовательно, $\|\Psi_{\alpha,j}\|_{\mathrm{L}_1} \leqslant A_1\delta^{3+|\alpha|}$.

(ii) Имеет место равенство [9, лемма 4.1] (обозначения см. в (4.1) и (4.4)):

$$\langle \Delta f | \psi^0_\delta * \Psi_{\alpha,j}\rangle = \int \Psi_{\alpha,j}(y)\, dm_y \langle \psi^y_\delta \Delta f | 1\rangle.$$

Из (i), (ii) и (1.4) непосредственно вытекает следующая оценка ($|\alpha| \leqslant 2$):

$$\begin{aligned}
|\langle \varphi_{3,j}\Delta f | (x-a_j)^\alpha\rangle| &= \big|\langle \Delta f | \psi^0_\delta * \Psi_{\alpha,j}\rangle\big| \\
&\leqslant A_1\delta^{3+|\alpha|}\epsilon(\delta)\delta^{-3} \sup_{|y-a_j|\leqslant 3\delta} M^{1+\gamma}(B(y,k\delta)\setminus X) \\
&\leqslant A_1\epsilon(\delta)\delta^{|\alpha|} M^{1+\gamma}((4+k)B_j \setminus X). \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Используя оценку (4.7), завершим доказательство леммы 4.3. Применив разбиение единицы $\{\varphi_{3,j}\}$ и формулу Тейлора, получим:

$$\int_Q f(x)\Delta\psi(x)\, dm_x = \langle \psi\Delta f | 1\rangle = \sum_j \langle \varphi_{3,j}\Delta f | \psi\rangle = \sum_j \psi(a_j)\langle \Delta f | \varphi_{3,j}\rangle$$

$$+ \sum_j \sum_{\{\alpha | 1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2\}} \frac{\partial^\alpha \psi(a_j)}{\alpha!}\langle \varphi_{3,j}\Delta f | (x-a_j)^\alpha\rangle + \sum_j \langle \Delta f | \varphi_{3,j} R_{3,j}\rangle, \qquad (4.8)$$

где $\partial^\alpha R_{3,j}(a_j) = 0$ при $|\alpha| \leqslant 2$ и $\partial^\alpha R_{3,j} \equiv \partial^\alpha \psi$ при $|\alpha| = 3$. Следовательно, при $x \in \mathrm{Spt}\varphi_{3,j} \subset B(a_j, 4\delta)$ и $|\alpha| \leqslant 2$ имеют место оценки $|\partial^\alpha R_{3,j}(x)| \leqslant A\delta^{3-|\alpha|}\|\nabla^3\psi\|_{\mathrm{L}_\infty}$. С учетом оценок производных функций $\varphi_{3,j}$ получим $|\Delta(\varphi_{3,j}R_{3,j})(x)| \leqslant A\delta\|\nabla^3\psi\|_{\mathrm{L}_\infty}$.

Напомним, что $M^{1+\gamma}((9/8)Q\setminus X) < \delta^{1+\gamma} \leqslant 4M^{1+\gamma}((9/8)Q\setminus X)$. Для завершения доказательства леммы 4.3 осталось показать, что каждая из сумм в правой части формулы (4.8) не превосходит

$$\varepsilon(\delta)\|\nabla^3\psi\|_{\mathrm{L}_\infty} s^3\delta^{1+\gamma},$$

где функция ε зависит от ϵ, k и $\epsilon_{f,\gamma}$.

Сначала рассмотрим выражение $\sum_j \langle \Delta f|\varphi_{3,j}R_{3,j}\rangle$. Интегрируя по частям и учитывая, что число индексов суммирования j не превосходит $A(s/\delta)^3$, получим (ω_f – модуль непрерывности функции f):

$$\left|\sum_j \langle \Delta f|\varphi_{3,j}R_{3,j}\rangle\right| \leqslant A_1\omega_f(\delta)\delta^3\|\nabla^3\psi\|_{\mathrm{L}_\infty}\delta\left(\frac{s}{\delta}\right)^3 \leqslant A_1\epsilon_{f,\gamma}(\delta)\|\nabla^3\psi\|_{\mathrm{L}_\infty}s^3\delta^{1+\gamma}.$$

Замечание 4.2. Для аналогичной суммы по функциям $R_{2,j}$, задающим остаток формулы Тейлора первого порядка, получается существенно более слабая оценка $A_1\epsilon_{f,\gamma}(\delta)\|\nabla^2\psi\|_{\mathrm{L}_\infty}s^3\delta^{\gamma}$; этим объясняется введение сверток $\psi^0_{3,\delta}$.

Для остальных выражений из правой части формулы (4.8) в силу неравенства (4.7) выполнены оценки

$$\left|\sum_j \psi(a_j)\langle \Delta f|\varphi_{3,j}\rangle\right| \leqslant A_1\epsilon(\delta)\sum_j M^{1+\gamma}((4+k)B_j\setminus X);$$

$$\left|\sum_j \sum_{\{\alpha|1\leqslant|\alpha|\leqslant 2\}} \frac{\partial^\alpha\psi(a_j)}{\alpha!}\langle\varphi_{3,j}\Delta f|(x-a_j)^\alpha\rangle\right| \leqslant A_2\epsilon(\delta)\|\nabla^2\psi\|_{\mathrm{L}_\infty}s^2\sum_j M^{1+\gamma}((4+k)B_j\setminus X).$$

Таким образом, для завершения доказательства леммы 4.3 осталось установить следующую оценку:

$$\sum_j M^{1+\gamma}((4+k)B_j\setminus X) \leqslant A(k)\delta^{1+\gamma}. \tag{4.9}$$

Рассмотрим счетное семейство шаров D_ι радиусов r_ι, покрывающих множество $(9/8)Q\setminus X$ и таких, что $\sum_\iota (r_\iota)^{1+\gamma} \leqslant 2M^{1+\gamma}((9/8)Q\setminus X) < 2\delta^{1+\gamma}$. Так как (см. замечание 4.1) все шары $(4+k)B_j$ содержатся в $(9/8)Q$, семейство $\{D_\iota\}$ покрывает множество $\bigcup_j((4+k)B_j \setminus X)$. Следовательно, левая часть неравенства (4.9) не превосходит $2N\delta^{1+\gamma}$, где N – максимальное число шаров $(4+k)B_j$, которые может пересекать фиксированный шар D_ι.

Так как, напомним, $B_j = B(a_j, 2\delta)$ для раздельных двоичных кубов $Q_j(a_j, \delta)$ и, очевидно, $r(D_\iota) < 2\delta$ для всех ι, то $2N \leqslant A(k)$. Оценка (4.9) доказана.

Доказательство леммы 4.3 завершено. Теорема 1 доказана. $\square$

Автор благодарен П. В. Парамонову за критические замечания и советы, признателен К. Ю. Федоровскому за полезные обсуждения.

Литература

1. J. Verdera, *Removability, capacity and approximation.* — NATO Adv. Sci. Int. Ser. C Math. Phys. Sci. **439** Kluwer. Dordrecht. (1994), 419–473.
2. И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* Мир, М., 1973.
3. Л. Карлесон, *Избранные проблемы теории исключительных множеств.* Мир, М., 1971.
4. Дж. Вердера, М. С. Мельников, П. В. Парамонов, *C^1-аппроксимация и продолжение субгармонических функций.* — Мат. сб. **192** (2001), No. 4, 37–58.
5. А. Г. Витушкин, *Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений.* — УМН **22** (1967), No. 6, 141–199.
6. П. В. Парамонов, *О гармонических приближениях в C^1-норме.* — Мат. сб. **181** (1990), No. 10, 1341–1365.
7. J. Mateu, J. Orobitg, *Lipschitz approximation by harmonic functions and some applications to spectral synthesis.* — Indiana Univ. Math. J. **39** (1990), 703–736.
8. J. Mateu, Y. Netrusov, J. Orobitg, J. Verdera, *BMO and Lipschitz approximation by solutions of elliptic equations.* — Ann. Inst. Fourier. **46** (1996), No. 4, 1057–1081.
9. М. Я. Мазалов, *О задаче равномерного приближения гармонических функций.* — Алгеба и анализ **23** (2011), No. 4, 136–178.
10. П. В. Парамонов, *Некоторые новые критерии равномерной приближаемости функций рациональными дробями.* — Матем. сборник **186** (1995), No. 9, 97–112.
11. A. G. O'Farrell, *Metaharmonic approximation in Lipschitz norms.* — Proc. Roy. Irish Acad. **75A** (1975), 317–330.
12. R. Harvey, J. Polking, *Removable singularities of solutions of linear partial differential equations.* — Acta Math. **125** (1970), 39–56.
13. Н. Н. Тарханов, *Ряд Лорана для решений эллиптических систем.* Наука, Новосибирск, 1991.
14. J. Verdera, C^m *approximation by solutions of elliptic equations, and Calderon–Zygmund operators.* — Duke Math. J. **55** (1987), 157–187.
15. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики.* Наука, М., 1988.

Mazalov M. Ya. A criterion for approximability by harmonic functions in Lipschitz spaces.

Let X be a compact subset of $\mathbb{R}^3$, and let f be a function harmonic inside X and belonging to the Lipschitz space $C^\gamma(X)$, $0 < \gamma < 1$. A criterion for approximability of f on X in $C^\gamma(X)$ by functions harmonic on neighborhoods of X is obtained in terms of the Hausdorff content of order $1+\gamma$. The proof is completely constructive, and Vitushkin's method of singularities separation and approximation by parts is applied.

Национальный исследовательский университет
"Московский энергетический институт",
Смоленский филиал
Энергетический проезд, 1
Смоленск 214013, Россия
E-mail: maksimmazalov@yandex.ru

Поступило 3 июня 2012 г.