Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 401, 2012 г.

А. В. Кривошеин, М. А. Огнева

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ВСПЛЕСКИ С КОЭФФИЦИЕНТОМ РАСТЯЖЕНИЯ $M = 3$

§1. Введение

Теория всплесков на сегодняшний день нашла своё применение практически во всех областях, связанных с обработкой нестационарных сигналов: в сжатии и обработке изображений (JPEG 2000, DjVU), аудио и видео кодировании, очищении зашумленных сигналов и многих других. С каждым годом число приложений только растет. В связи с этим разработка новых систем всплесков притягивает к себе пристальное внимание. Наиболее интересными с точки зрения полезных свойств для приложений являются симметричные ортогональные системы всплесков с компактным носителем. Благодаря ортогональности обеспечивается сохранение энергии сигнала при преобразованиях, симметрия позволяет избежать проблем, связанных с разрывностью сигнала на концах (что особенно важно при обработке изображений) и уменьшить вычислительную сложность. Кроме того, симметричные всплески обладают свойством линейной фазы, что влечет за собой отсутствие фазовых искажений при обработке.

Кратномасштабный анализ и унитарный принцип расширения (UEP, [11]) является стандартной схемой для построения новых систем всплесков. В частности, благодаря работам [5, 10], а также [6], возможно строить симметричные ортогональные системы всплесков для произвольного коэффициента растяжения с различными наперед заданными свойствами, такими как гладкость, число обнуляющихся моментов, число моментов линейной фазы (см. подробнее [6]) и др. В связи с потребностью в таких системах всплесков известным специалистом в области обработки сигналов профессором Московского энергетического института М. К. Чобану была поставлена следующая

Ключевые слова: ортогональные всплески, симметричные всплески, компактный носитель, унитарный принцип расширения, полифазные составляющие.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 12-01-00216-а, и СПбГУ, НИР 9.38.62.2012.

задача: дать полное описание всех симметричных ортогональных базисов всплесков для коэффициента растяжения $M = 3$. Причем интерес представляют как вещественнозначные, так и комплекснозначные всплеск-функции.

§2. Обозначения и предварительные сведения

Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ будем обозначать множества натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел соответственно, через δ_{0k}, $k \in \mathbb{Z}$, – символ Кронекера. Для матрицы P сопряженную с ней, то есть транспонированную с комплексным сопряжением, будем обозначать символом P^*, $(i+1)$-ю строчку матрицы P обозначим через P^i. E_n – единичная матрица размера $n \times n$.

Число $M > 1$, $M \in \mathbb{N}$, будем называть коэффициентом растяжения. Рассмотрим на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ классы смежности по модулю M. Число таких классов равно M. Возьмем по одному представителю из каждого класса и назовем их цифрами. Множество цифр коэффициента растяжения M обозначим через $D(M) = \{s_0, \dots, s_{M-1}\}$, причем $s_0 = 0$.

Если функция f принадлежит множеству

$$L_2(\mathbb{R}) \bigcap L_1(\mathbb{R}),$$

то $\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i x\xi}\, dx$ – ее преобразование Фурье. На все пространство $L_2(\mathbb{R})$ это определение распространяется естественным образом. Для произвольной функции f положим

$$f_{jk}(x) := M^{j/2} f(M^j x + k), \quad k, j \in \mathbb{Z}.$$

Функция $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ называется *масштабирующей*, если ее преобразование Фурье удовлетворяет уравнению

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0(\xi/M)\widehat{\phi}(\xi/M), \tag{1}$$

где m_0 – 1-периодическая функция из $L_2(0,1)$, ее будем называть *маской* (масштабирующей маской). Известно (см., например, [2, §2.4]), что для любого тригонометрического полинома m_0, такого что $m_0(0) = 1$, функция

$$\widehat{\phi}(\xi) := \prod_{j=1}^{\infty} m_0(M^{-j}\xi) \tag{2}$$

является единственным (с точностью до множителя) решением уравнения (1) и преобразованием Фурье некоторой функции ϕ (вообще говоря, обобщенной функции медленного роста) с компактным носителем. В дальнейшем под масштабирующей маской m_0 понимаем тригонометрический полином вида

$$m_0(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{2\pi i n\xi},$$

где $h_n \in \mathbb{C}$ и лишь конечное число коэффициентов h_n отлично от нуля, при этом $m_0(0) = 1$.

Каждый тригонометрический полиномом t можно представить в виде

$$t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{M-1} e^{2\pi i s_k \xi} \tau_k(M\xi), \tag{3}$$

где τ_k, $k = 0, \dots, m-1$, – тригонометрические полиномы, s_k – цифры коэффициента растяжения M. Такое представление называют *полифазным*, а функции τ_k, $k = 0, \dots, m-1$, – *полифазными составляющими* тригонометрического полинома t. Полифазное представление единственно (см., например, [2, § 2.6]) и справедливы равенства

$$\tau_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s\in D(M)} e^{-2\pi i \frac{s_k}{M}(\xi+s)} t\left(\frac{\xi+s}{M}\right), \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Маску m_0 будем называть *M-ортогональной*, если

$$\sum_{s_k\in D(M)} \left| m_0\left(\xi + \frac{s_k}{M}\right)\right|^2 = 1. \tag{4}$$

Поскольку $m_0(0) = 1$, из M-ортогональности маски следует, что

$$m_0\left(\frac{s_k}{M}\right) = 0, \quad k = 1, \dots, M-1,$$

и соответствующая масштабирующая функция ϕ, определяемая через ее преобразование Фурье формулой (2), принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$ (теорема Малла, см., например, [2, теорема 4.1.2]). Когда система целочисленных сдвигов масштабирующей функции $\{\phi_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированную систему, масштабирующая маска является M-ортогональной (см., например, [2, §1.2]). Обратное в общем случае неверно. Если масштабирующая маска является M-ортогональной, то система растяжений и сдвигов масштабирующей функции $\{\phi_{jn}\}_{j,n\in\mathbb{Z}}$, вообще говоря, образует в $L_2(\mathbb{R})$ жесткий фрейм с единичными границами.

Тригонометрический полином $t(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{2\pi i n\xi}$, где $h_n \in \mathbb{C}$, будем называть *симметричным/антисимметричным* относительно точки $c \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, если для его коэффициентов выполнено соотношение

$$h_k = h_{2c-k} \quad (h_k = -h_{2c-k}), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Точку c будем называть *центром симметрии*. Также будем говорить, что тригонометрический полином обладает *свойством симметрии*, если он является симметричным или антисимметричным относительно некоторой точки $c \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Симметрия тригонометрического полинома может быть выражена с помощью *оператора симметрии* $\mathcal{S}$, определенного следующим образом:

$$\mathcal{S}t(\xi) = \frac{t(\xi)}{t(-\xi)}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}$, за исключением нулей тригонометрического полинома $t(-\xi)$. Если тригонометрический полином $t(\xi)$ тождественно не равен нулю, то соотношения (5) равносильны соотношениям

$$\mathcal{S}t(\xi) = e^{2\pi i 2c\xi} \quad \left(\mathcal{S}t(\xi) = -e^{2\pi i 2c\xi}\right), \quad c \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},$$

соответственно. Под выражением $\mathcal{S}0$ естественно понимать любое соотношение симметрии, подходящее для того или иного случая. Рассмотрим сдвинутый тригонометрический полином $t'(\xi) = e^{2\pi i c'\xi} t(\xi)$, $c' \in \mathbb{Z}$. Если $\mathcal{S}t(\xi) = e^{2\pi i 2c\xi}$, $c \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, то $\mathcal{S}t'(\xi) = e^{2\pi i(2c+2c')\xi}$. Отсюда нетрудно видеть, что любой тригонометрический полином со свойством симметрии можно сдвинуть так, что его центр симметрии c будет равен 0 или $\frac{1}{2}$.

Если матрица $\mathcal{N}$ состоит из тригонометрических полиномов, обладающих свойством симметрии, то $\mathcal{SN}$ означает матрицу, к каждому элементу которой применен оператор симметрии. Такую матрицу $\mathcal{SN}$ будем называть *рисунком симметрии* матрицы $\mathcal{N}$. Пусть $\mathcal{N}$ и $\mathcal{L}$ – две матрицы, состоящие из тригонометрических полиномов со свойством симметрии. В общем случае сумма, разность и произведение этих матриц могут состоять из тригонометрических полиномов, которые не являются симметричными. Чтобы свойство симметрии сохранялось при этих действиях, их рисунки симметрии $\mathcal{SN}$ и $\mathcal{SL}$ должны определенным образом соответствовать друг другу. А именно, если $\mathcal{SN} = \mathcal{SL}$, то $\mathcal{S}(\mathcal{N} \pm \mathcal{L}) = \mathcal{SN}$. Случай произведения немного сложнее. Введем понятие совместной симметрии. Будем говорить, что матрица $\mathcal{N}$ размера $(r \times w)$, состоящая из тригонометрических полиномов со свойством симметрии, обладает *совместной симметрией*, если

$$\mathcal{SN} = \mathcal{S}v_1^* \mathcal{S}v_2,$$

где v_1, v_2 – некоторые строчки размера $(1 \times r)$, $(1 \times w)$ соответственно, состоящие из тригонометрических полиномов со свойством симметрии. Про две матрицы $\mathcal{N}$ и $\mathcal{L}$ размера $(r \times w)$ и $(w \times v)$ соответственно, состоящие из тригонометрических полиномов со свойством симметрии, будем говорить, что они *взаимно совместно симметричны*, если

$$\mathcal{SN} = \mathcal{S}v_1^* \mathcal{S}v_2, \quad \mathcal{SL} = \mathcal{S}v_2^* \mathcal{S}v_3,$$

где v_1, v_2, v_3 – некоторые строчки размера $(1 \times r)$, $(1 \times w)$, $(1 \times v)$ соответственно, состоящие из тригонометрических полиномов со свойством симметрии. Нетрудно убедиться (см. подробнее [5]), что для двух матриц $\mathcal{N}$ и $\mathcal{L}$, которые взаимно совместно симметричны, их произведение обладает совместной симметрией, при этом

$$\mathcal{S}(\mathcal{NL}) = \mathcal{S}v_1^* \mathcal{S}v_3.$$

Следующая лемма позволяет переформулировать условия симметрии тригонометрического полинома для его полифазных составляющих (см. [8, лемма 6] или [7, доказательство леммы 1]).

Лемма 1. *Пусть M – коэффициент растяжения. Тригонометрический полином $t(\xi)$ симметричен относительно точки $c \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда его полифазные составляющие $\tau_k(\xi)$, $k = 0, \dots, M-1$, удовлетворяют равенствам*

$$\tau_k(\xi) = e^{2\pi i \frac{2c - s_k - s_l}{M}\xi} \tau_l(-\xi), \tag{6}$$

где индекс l выбирается единственным образом из множества $\{0, \dots, M-1\}$ так, что $\frac{1}{M}(2c - s_k - s_l) \in \mathbb{Z}$.

Общая схема построения ортогональной системы всплесков известна – это унитарный принцип расширения (UEP, [11]). Рассмотрим масштабирующую функцию ϕ, целочисленные сдвиги которой $\{\phi_{0n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ образуют ортонормированную систему. Ее маска $m_0(\xi)$ является M-ортогональной. Предположим, что существуют тригонометрические полиномы $m_\nu(\xi)$, $\nu = 1, \dots, M-1$ (всплеск-маски), такие что матрица

$$\mathcal{M} := \begin{pmatrix} m_0\left(\xi+\frac{s_0}{M}\right) & m_0\left(\xi+\frac{s_1}{M}\right) & \dots & m_0\left(\xi+\frac{s_{M-1}}{M}\right) \\ m_1\left(\xi+\frac{s_0}{M}\right) & m_1\left(\xi+\frac{s_1}{M}\right) & \dots & m_1\left(\xi+\frac{s_{M-1}}{M}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{M-1}\left(\xi+\frac{s_0}{M}\right) & m_{M-1}\left(\xi+\frac{s_1}{M}\right) & \dots & m_{M-1}\left(\xi+\frac{s_{M-1}}{M}\right) \end{pmatrix} \tag{7}$$

унитарна, то есть для всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{M}\mathcal{M}^* = E_M. \tag{8}$$

Определив всплеск-функции следующим образом:

$$\widehat{\psi^{(\nu)}}(\xi) = m_\nu(\xi/M)\widehat{\phi}(\xi/M), \quad \nu = 1, \dots, M-1,$$

получим систему $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}$, которая будет образовывать ортонормированный базис в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Ключевой момент конструкции заключается в построении унитарной матрицы (7). Возникает вопрос в том, как найти требуемые всплеск-маски.

Общий способ построения унитарной матрицы по известной первой строке в одномерном случае был найден в работе [9]. Для симметричной масштабирующей маски задача симметричного матричного расширения, то есть такого, чтобы все всплеск-маски также обладали свойством симметрии, решена в работах [10] для вещественнозначных функций и [5] для комплекснозначных.

В настоящей работе дано описание всех симметричных всплеск-масок с коэффициентом растяжения $M = 3$ по заданной M-ортогнальной масштабирующей маске $m_0(\xi)$.

§3. Построение ортогональных систем всплесков

Перейдем от задачи расширения матрицы вида (7), составленной из масок, к эквивалентной, сформулированной с использованием полифазных составляющих этих масок. Чтобы 3-ортогональная маска $m_0(\xi)$ и всплеск-маски $m_i(\xi)$, $i = 1, 2$, образовывали унитарную матрицу

$$\mathcal{M} := \begin{pmatrix} m_0\left(\xi+\frac{s_0}{3}\right) & m_0\left(\xi+\frac{s_1}{3}\right) & m_0\left(\xi+\frac{s_2}{3}\right) \\ m_1\left(\xi+\frac{s_0}{3}\right) & m_1\left(\xi+\frac{s_1}{3}\right) & m_1\left(\xi+\frac{s_2}{3}\right) \\ m_2\left(\xi+\frac{s_0}{3}\right) & m_2\left(\xi+\frac{s_1}{3}\right) & m_2\left(\xi+\frac{s_2}{3}\right) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

необходимо и достаточно (см., например, [2, лемма 2.6.3]), чтобы матрица $\mathcal{N}$, полученная из полифазных составляющих этих масок:

$$\mathcal{N} := \begin{pmatrix} \mu_{00}(\xi) & \mu_{01}(\xi) & \mu_{02}(\xi) \\ \mu_{10}(\xi) & \mu_{11}(\xi) & \mu_{12}(\xi) \\ \mu_{20}(\xi) & \mu_{21}(\xi) & \mu_{22}(\xi) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

была унитарной, то есть при всех $\xi \in \mathbb{R}$ было выполнено

$$\mathcal{N}\mathcal{N}^* = E_3, \tag{11}$$

где $\mu_{ij}(\xi)$, $j = 0, 1, 2$, – полифазные составляющие маски $m_i(\xi)$, $i = 0, 1, 2$. Матрицу $\mathcal{N}$ будем называть *полифазной матрицей* масок $m_0(\xi)$, $m_1(\xi)$ и $m_2(\xi)$. Эквивалентность унитарности матриц $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ имеет место независимо от выбранного множества цифр для коэффициента растяжения $M = 3$. Поэтому в дальнейшем в качестве множества цифр примем множество $D(M) = \{0, 1, -1\}$.

Докажем следующую лемму о том, каким образом связаны центры симметрии масок в матрице (9).

Лемма 2. *Пусть $m_0(\xi)$ – 3-ортогональная масштабирующая маска, такая что*

$$\mathcal{S}m_0(\xi) = e^{2\pi i 2 c_0 \xi}, \quad c_0 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}.$$

Пусть всплеск-маски $m_1(\xi)$ и $m_2(\xi)$ таковы, что матрица (9) *унитарна. Пусть, далее,*

$$\mathcal{S}m_i(\xi) = \varepsilon_i e^{2\pi i 2 c_i \xi}, \quad c_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \quad \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ и число $2c_1 - 2c_2$ кратно 3. Кроме того, если $|m_0\left(\frac{1}{2}\right)|^2 \neq 1$, то и $2c_0 - 2c_i$ кратно 3, $i = 1, 2$.

Доказательство. Покажем, что иные варианты приводят к противоречиям. Для множества цифр $D(M) = \{0, 1, -1\}$ матрица (9) при $\xi = 0$ в силу 3-ортогональности маски $m_0(\xi)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1\left(\frac{1}{3}\right) & m_1\left(-\frac{1}{3}\right) \\ 0 & m_2\left(\frac{1}{3}\right) & m_2\left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из унитарности матрицы получаем равенства

$$\left|m_1\left(\frac{1}{3}\right)\right|^2 + \left|m_2\left(\frac{1}{3}\right)\right|^2 = 1, \tag{12}$$

$$m_1\left(\frac{1}{3}\right)\overline{m_1\left(-\frac{1}{3}\right)}+m_2\left(\frac{1}{3}\right)\overline{m_2\left(-\frac{1}{3}\right)}=0. \tag{13}$$

Поскольку $\mathcal{S}m_i(\xi)=\varepsilon_i e^{2\pi i 2c_i\xi}$, $c_i\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $\varepsilon_i\in\{-1,1\}$, $i=1,2$, равенство (13) примет вид

$$\varepsilon_1 e^{2\pi i\frac{2c_1-2c_2}{3}}\left|m_1\left(\frac{1}{3}\right)\right|^2+\varepsilon_2\left|m_2\left(\frac{1}{3}\right)\right|^2=0. \tag{14}$$

При этом $\left|m_1\left(\frac{1}{3}\right)\right|^2\neq 0$, иначе придем к противоречию с равенством (12). Значит, экспонента $e^{2\pi i\frac{2c_1-2c_2}{3}}$ должна иметь вещественное значение, то есть ±1. Следовательно, $\frac{2c_1-2c_2}{3}\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Однако, $\frac{2c_1-2c_2}{3}$ полуцелым быть не может, поскольку $2c_1,2c_2\in\mathbb{Z}$. Таким образом, остается лишь вариант, когда $2c_1-2c_2$ кратно 3. Если при этом $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, то придем к противоречию с равенством (12). В итоге, единственный оставшийся случай, когда $2c_1-2c_2$ кратно 3 и $\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$.

Рассмотрим теперь матрицу (9) в точке $\xi=\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} m_0\left(\frac{1}{2}\right) & m_0\left(-\frac{1}{6}\right) & m_0\left(\frac{1}{6}\right)\\ m_1\left(\frac{1}{2}\right) & m_1\left(-\frac{1}{6}\right) & m_1\left(\frac{1}{6}\right)\\ m_2\left(\frac{1}{2}\right) & m_2\left(-\frac{1}{6}\right) & m_2\left(\frac{1}{6}\right)\end{pmatrix}.$$

Из унитарности этой матрицы получаем равенства

$$\left|m_0\left(\frac{1}{6}\right)\right|^2+\left|m_1\left(\frac{1}{6}\right)\right|^2+\left|m_2\left(\frac{1}{6}\right)\right|^2=1, \tag{15}$$

$$m_0\left(\frac{1}{6}\right)\overline{m_0\left(-\frac{1}{6}\right)}+m_1\left(\frac{1}{6}\right)\overline{m_1\left(-\frac{1}{6}\right)}+m_2\left(\frac{1}{6}\right)\overline{m_2\left(-\frac{1}{6}\right)}=0. \tag{16}$$

В силу симметрии равенство (16) имеет вид

$$e^{2\pi i\frac{2c_0-2c_2}{6}}\left|m_0\left(\frac{1}{6}\right)\right|^2+\varepsilon_1 e^{2\pi i\frac{2c_1-2c_2}{6}}\left|m_1\left(\frac{1}{6}\right)\right|^2+\varepsilon_2\left|m_2\left(\frac{1}{6}\right)\right|^2=0. \tag{17}$$

Экспонента $e^{2\pi i\frac{2c_1-2c_2}{6}}$ принимает значения ±1. Из того, что $|m_0\left(\frac{1}{2}\right)|^2\neq 1$, и из условия 3-ортогональности маски $m_0(\xi)$ в точке $\xi=\frac{1}{2}$ следует, что $m_0\left(\frac{1}{6}\right)\neq 0$. Тогда экспонента при m_0 может принимать лишь вещественные значения, а именно $e^{2\pi i\frac{2c_0-2c_2}{6}}=\pm1$. Это возможно лишь в случае, когда $2c_0-2c_2$ кратно 3. □

Маски, для которых $|m_0\left(\frac{1}{2}\right)|^2 = 1$, не могут привести к ортогональному базису всплесков. Действительно, поскольку масштабирующая функция ϕ из $L_2(\mathbb{R})$ имеет компактный носитель, ее преобразование Фурье непрерывно на $\mathbb{R}$. Тогда (см., например, [2, §1.2]) необходимым и достаточным условием того, что система целочисленных сдвигов масштабирующей функции $\{\phi_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированную систему, является равенство $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi}(\xi+k)|^2 = 1$ при всех $\xi\in\mathbb{R}$. Но, если $|m_0\left(\frac{1}{2}\right)|^2 = 1$, то $m_0\left(\frac{1}{6}\right) = m_0\left(\frac{5}{6}\right) = 0$. Из масштабирующего уравнения (1) при $M = 3$ следует, что в полуцелых точках $\widehat{\phi}(\frac{2k+1}{2}) = 0$, $k\in\mathbb{Z}$, а значит, условие ортонормированности в точке $\xi = \frac{1}{2}$ не выполняется. В дальнейшем будем рассматривать маски $m_0(\xi)$, для которых $|m_0\left(\frac{1}{2}\right)|^2 \neq 1$.

Пусть $m_0(\xi)$ является 3-ортогональной симметричной масштабирующей маской, при этом $\mathcal{S}m_0(\xi) = e^{2\pi i 2c_0\xi}$, $c_0\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Не умаляя общности, будем рассматривать маски $m_0(\xi)$, для которых $c_0\in\{0,\frac{1}{2}\}$. В противном случае, всегда можно домножить маску на некоторую экспоненту $e^{2\pi i n\xi}$, $n\in\mathbb{Z}$, чтобы сдвинуть центр симметрии в указанные точки. Пусть $\mu_{00}(\xi),\mu_{01}(\xi),\mu_{02}(\xi)$ – полифазные составляющие маски $m_0(\xi)$. В силу выбранного множества цифр $D(M) = \{0,1,-1\}$, симметричность маски $m_0(\xi)$ относительно точки $c_0 = 0$ по лемме 1 равносильна тому, что для ее полифазных составляющих $\mu_{0i}(\xi)$, $i = 0,1,2$, выполнено:

$$\mu_{00}(\xi) = \mu_{00}(-\xi), \quad \mu_{01}(\xi) = \mu_{02}(-\xi). \tag{18}$$

Симметричность относительно точки $c_0 = \frac{1}{2}$ по лемме 1 равносильна тому, что для ее полифазных составляющих выполнено:

$$\mu_{00}(\xi) = \mu_{01}(-\xi), \quad \mu_{02}(\xi) = \mu_{02}(-\xi)e^{2\pi i\xi}. \tag{19}$$

Пусть $m_1(\xi)$ и $m_2(\xi)$ – всплеск-маски из леммы 2. Так как числа $2c_1, 2c_2$ должны принадлежать тому же классу смежности по модулю 3, что и $2c_0$, то по лемме 1 полифазные составляющие всплеск-масок связаны соотношениями, аналогичными соотношениям (18) и (19). А именно, для $c_0 = 0$ получим

$$\mu_{j0}(\xi) = \varepsilon_j e^{2\pi i\frac{2c_j}{3}\xi}\mu_{j0}(-\xi), \quad \mu_{j1}(\xi) = \varepsilon_j e^{2\pi i\frac{2c_j}{3}\xi}\mu_{j2}(-\xi), \quad \frac{2c_j}{3}\in\mathbb{Z}; \tag{20}$$

для $c_0 = \frac{1}{2}$ получим

$$\begin{aligned} \mu_{j0}(\xi) &= \varepsilon_j e^{2\pi i \frac{2c_j - 1}{3}\xi} \mu_{j1}(-\xi), \\ \mu_{j2}(\xi) &= \varepsilon_j \mu_{j2}(-\xi) e^{2\pi i \frac{2c_j+2}{3}\xi}, \\ \frac{2c_j - 1}{3} &\in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{21}$$

где $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}, j = 1, 2$. Таким образом, в полифазной матрице (10) содержатся элементы, сами по себе свойством симметрии не обладающие. Однако, полифазную матрицу $\mathcal{N}$ всегда можно симметризовать следующим образом: $\mathcal{N}_{\text{sym}} = \mathcal{N}Q$, где матрица Q унитарна и имеет следующий вид:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

при $c_0 = 0$ или $c_0 = \frac{1}{2}$ соответственно. Тогда все элементы матрицы $\mathcal{N}_{\text{sym}}$ свойством симметрии обладают. Действительно, в силу (18), (19), (20), (21) и (22) непосредственно можно убедиться, что

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\mathcal{N}_{\text{sym}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_1 e^{2\pi i \frac{2c_1}{3}\xi} \\ \varepsilon_2 e^{2\pi i \frac{2c_2}{3}\xi} \end{pmatrix} (1, 1, -1), \\ \mathcal{S}\mathcal{N}_{\text{sym}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_1 e^{2\pi i \frac{2c_1 - 1}{3}\xi} \\ \varepsilon_2 e^{2\pi i \frac{2c_2 - 1}{3}\xi} \end{pmatrix} (1, -1, e^{2\pi i \xi}). \end{aligned} \tag{23}$$

при $c_0 = 0$ или $c_0 = \frac{1}{2}$ соответственно. Матрицу $\mathcal{N}_{\text{sym}}$ будем называть *симметризованной полифазной матрицей* масок $m_0(\xi)$, $m_1(\xi)$ и $m_2(\xi)$.

Таким образом, задача построения всплеск-масок $m_1(\xi)$ и $m_2(\xi)$ со свойством симметрии по известной маске $m_0(\xi)$, так чтобы матрица (9) была унитарна, свелась к построению унитарных симметризованных полифазных матриц $\mathcal{N}_{\text{sym}}$ с известной первой строкой $\mathcal{N}^0_{\text{sym}}$, так чтобы их рисунок симметрии совпадал с (23).

Построим сначала хотя бы одну такую матрицу $\mathcal{N}_{\text{sym}}$. По алгоритму, описанному в работе [5], это всегда возможно сделать. Начинаем с первой строчки, для которой $\mathcal{S}\mathcal{N}^0_{\text{sym}} = (1, 1, -1)$ при $c_0 = 0$ или

$\mathcal{S}\mathcal{N}^0_{\rm sym} = (1, -1, e^{2\pi i\xi})$ при $c_0 = \frac{1}{2}$. Следуя [5, Algorithm 2], достраиваем строчку $\mathcal{N}^0_{\rm sym}$ до унитарной матрицы $\mathcal{N}_{\rm sym}$, причем

$$\mathcal{S}\mathcal{N}_{\rm sym} = (\mathcal{S}\mathcal{N}^0_{\rm sym})^* \mathcal{S}\mathcal{N}^0_{\rm sym}, \tag{24}$$

то есть матрица $\mathcal{N}_{\rm sym}$ обладает совместной симметрией. Для того, чтобы получить всплеск-маски, возвращаемся к полифазной матрице $\mathcal{N}$ вида (10), которую получаем при помощи обратного преобразования $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\rm sym} Q^*$. Всплеск-маски $m_1(\xi)$ и $m_2(\xi)$ восстанавливаем по формуле (3). По лемме 1 они обладают свойством симметрии вида

$$\mathcal{S}m_i(\xi) = \varepsilon_i e^{2\pi i 2c_i\xi}, \quad c_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \quad \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, \quad i = 1, 2.$$

А именно, при $c_0 = 0$ имеют место равенства

$$c_1 = c_2 = 0, \quad \varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = -1. \tag{25}$$

При $c_0 = \frac{1}{2}$ имеют место равенства

$$c_1 = 0, \quad \varepsilon_1 = -1, \quad c_2 = -1, \quad \varepsilon_2 = 1. \tag{26}$$

Маски $m_1(\xi)$ и $m_2(\xi)$, построенные таким образом, будем называть *каноническими*.

Возникает вопрос: как по построенным каноническим всплеск-маскам $m_1(\xi)$ и $m_2(\xi)$ получить новые симметричные маски $t_1(\xi)$ и $t_2(\xi)$, такие что матрица вида (9) с масками $m_0(\xi), t_1(\xi)$ и $t_2(\xi)$ унитарна. Ответ дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $m_0(\xi)$ – 3-ортогональная масштабирующая маска со свойством симметрии: $\mathcal{S}m_0(\xi) = e^{2\pi i 2c_0\xi}$, $2c_0 \in \{0, 1\}$, $m_1(\xi)$ и $m_2(\xi)$ – канонические всплеск-маски. Матрица $\mathcal{N}_{\rm sym}$ – симметризованная полифазная матрица масок $m_0(\xi)$, $m_1(\xi)$ и $m_2(\xi)$. Чтобы всплеск-маски $t_1(\xi)$ и $t_2(\xi)$ со свойством симметрии типа*

$$\mathcal{S}t_j(\xi) = \varepsilon'_j e^{2\pi i 2c'_j\xi}, \quad c'_j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \quad j = 1, 2,$$

образовывали с маской $m_0(\xi)$ унитарную матрицу вида (9), *необходимо и достаточно, чтобы их симметризованная полифазная матрица имела вид*

$$\mathcal{T}_{\rm sym} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha'_{11}(\xi) & \alpha'_{12}(\xi) \\ 0 & \alpha'_{21}(\xi) & \alpha'_{22}(\xi) \end{pmatrix} \mathcal{N}_{\rm sym},$$

где матрица из тригонометрических полиномов

$$\mathcal{A}_{\rm sym} := \{\alpha'_{ij}(\xi)\}_{i,j=1,2}$$

унитарна и

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}\mathcal{A}_{\rm sym} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1' e^{2\pi i \frac{2c_1'}{3}} \\ \varepsilon_2' e^{2\pi i \frac{2c_2'}{3}} \end{pmatrix} (1, -1), \\
\mathcal{S}\mathcal{A}_{\rm sym} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1' e^{2\pi i \frac{2c_1'-1}{3}} \\ \varepsilon_2' e^{2\pi i \frac{2c_2'-1}{3}} \end{pmatrix} (-1, e^{2\pi i \xi}),
\end{aligned} \tag{27}
$$

где первая матрица используется при $c_0 = 0$, *при этом* $\frac{2c_j'}{3} \in \mathbb{Z}$, *вторая матрица – при* $c_0 = \frac{1}{2}$, *при этом* $\frac{2c_j-1}{3} \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Покажем необходимость. Пусть $\tau_{ij}(\xi)$, $j = 0, 1, 2,$ – полифазные составляющие всплеск-масок $t_i(\xi)$, $i = 1, 2$. Поиск унитарной матрицы вида (9) с масками $m_0(\xi), t_1(\xi)$ и $t_2(\xi)$ равносилен поиску унитарной матрицы

$$
\mathcal{T} := \begin{pmatrix} \mu_{00}(\xi) & \mu_{01}(\xi) & \mu_{02}(\xi) \\ \tau_{10}(\xi) & \tau_{11}(\xi) & \tau_{12}(\xi) \\ \tau_{20}(\xi) & \tau_{21}(\xi) & \tau_{22}(\xi) \end{pmatrix}. \tag{28}
$$

По лемме 2 числа $2c_1', 2c_2'$ принадлежат тому же классу смежности по модулю 3, что и $2c_0$. Значит, мы можем симметризовать матрицу $\mathcal{T}$, а именно, положим $\mathcal{T}_{\rm sym} = \mathcal{T}Q$, где матрица Q из (22), при этом

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}\mathcal{T}_{\rm sym} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_1' e^{2\pi i \frac{2c_1'}{3}\xi} \\ \varepsilon_2' e^{2\pi i \frac{2c_2'}{3}\xi} \end{pmatrix} (1, 1, -1), \\
\mathcal{S}\mathcal{T}_{\rm sym} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_1' e^{2\pi i \frac{2c_1'-1}{3}\xi} \\ \varepsilon_2' e^{2\pi i \frac{2c_2'-1}{3}\xi} \end{pmatrix} (1, -1, e^{2\pi i \xi})
\end{aligned} \tag{29}
$$

при $c_0 = 0$ или $c_0 = \frac{1}{2}$ соответственно.

Зафиксируем значение аргумента ξ. Тогда строки матриц $\mathcal{T}_{\rm sym}$ и $\mathcal{N}_{\rm sym}$ образуют три ортогональных вектора в $\mathbb{C}^3$. Первые строки этих матриц совпадают. Значит, для вторых и третьих строк этих матриц имеют место следующие соотношения:

$$
\mathcal{T}^1_{\rm sym} = \alpha'_{11}(\xi)\mathcal{N}^1_{\rm sym} + \alpha'_{12}(\xi)\mathcal{N}^2_{\rm sym}, \quad \mathcal{T}^2_{\rm sym} = \alpha'_{21}(\xi)\mathcal{N}^1_{\rm sym} + \alpha'_{22}(\xi)\mathcal{N}^2_{\rm sym}.
$$

Для любого ξ определим тригонометрические полиномы $\alpha'_{ij}(\xi)$, $i,j=1,2$, следующим образом:

$$\alpha'_{ij}(\xi) = \mathcal{T}^i_{\mathrm{sym}} \mathcal{N}^{j*}_{\mathrm{sym}}. \tag{30}$$

Обозначим $\mathcal{A}_{\mathrm{sym}} := \{\alpha'_{ij}(\xi)\}_{i,j=1,2}$. Тогда

$$\mathcal{A}_{\mathrm{sym}} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}^1_{\mathrm{sym}} \\ \mathcal{T}^2_{\mathrm{sym}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathcal{N}^1_{\mathrm{sym}} \\ \mathcal{N}^2_{\mathrm{sym}} \end{pmatrix}^* . \tag{31}$$

Нетрудно убедиться, что матрица $\mathcal{A}_{\mathrm{sym}}$ является унитарной, так как из унитарности матриц $\mathcal{T}_{\mathrm{sym}}$ и $\mathcal{N}_{\mathrm{sym}}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}^1_{\mathrm{sym}} \\ \mathcal{T}^2_{\mathrm{sym}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathcal{T}^1_{\mathrm{sym}} \\ \mathcal{T}^2_{\mathrm{sym}} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \mathcal{N}^1_{\mathrm{sym}} \\ \mathcal{N}^2_{\mathrm{sym}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathcal{N}^1_{\mathrm{sym}} \\ \mathcal{N}^2_{\mathrm{sym}} \end{pmatrix}^* = E_2.$$

Кроме того, из (24) и (29) следует, что эти два столбца обладают взаимной совместной симметрией, поэтому (27) выполнено.

Необходимость доказана, докажем достаточность. Нетрудно видеть, что матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha'_{11}(\xi) & \alpha'_{12}(\xi) \\ 0 & \alpha'_{21}(\xi) & \alpha'_{22}(\xi) \end{pmatrix}$$

унитарна и обладает совместной симметрией, а также взаимной совместной симметрией с матрицей $\mathcal{N}_{\mathrm{sym}}$. Тогда для матрицы $\mathcal{T}_{\mathrm{sym}}$ верны соотношения (29) и она унитарна. Выполнив обратное преобразование с матрицей Q, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathrm{sym}} Q^*$, нетрудно видеть, что для элементов матрицы $\mathcal{T}$ справедливы равенства вида (18) и (20) при $c_0 = 0$ или (19) и (21) при $c_0 = \frac{1}{2}$. А значит, всплеск-маски $t_1(\xi)$ и $t_2(\xi)$ обладают требуемыми свойствами симметрии по лемме 1. Условия на числа $2c_j$, $j=1,2$, согласуются с леммой 2. $\square$

Таким образом, описание всех 3-ортогональных симметричных всплесков по заданной 3-ортогональной масштабирующей маске свелось к описанию всех унитарных матриц $\mathcal{A}_{\mathrm{sym}}$ размера 2×2, таких что их элементы обладают свойством симметрии в соответствии с (27). Упростим вид этих матриц. Не умаляя общности, будем полагать, что $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1$, $\varepsilon'_2 = \varepsilon_2$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ из (25) или (26). В любом другом случае строки можно поменять местами с помощью перестановочной матрицы.

Далее, центры симметрии элементов матрицы $\mathcal{A}_{\mathrm{sym}}$ могут быть приведены к точкам 0 или $\frac{1}{2}$ с помощью умножения на унитарную матрицу, у которой на диагонали расположены соответствующие экспоненты. При $c_0 = 0$, матрица $\mathcal{S}\mathcal{A}_{\mathrm{sym}}$ в формуле (27) в зависимости от четности/нечетности чисел $\frac{2c_1'}{3}$, $\frac{2c_2'}{3}$ приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -e^{2\pi i\xi} & e^{2\pi i\xi} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i\xi} & -e^{2\pi i\xi} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} e^{2\pi i\xi} & -e^{2\pi i\xi} \\ -e^{2\pi i\xi} & e^{2\pi i\xi} \end{pmatrix}.$$

Однако, унитарных матриц $\mathcal{A}_{\mathrm{sym}}$ с элементами, такими чтобы их рисунок симметрии совпадал со второй матрицей, не существует. Действительно, рассмотрим второй столбец матрицы $\mathcal{A}_{\mathrm{sym}}$. Условия на симметрию, $\alpha_{12}'(\xi) = -\alpha_{12}'(-\xi)$ и $\alpha_{22}'(\xi) = e^{2\pi i\xi}\alpha_{22}'(-\xi)$, в точке $\xi = \frac{1}{2}$ приводят тому, что $\alpha_{12}'(\frac{1}{2}) = \alpha_{22}'(\frac{1}{2}) = 0$, что противоречит унитарности матрицы, а именно условию $|\alpha_{12}'(\xi)|^2 + |\alpha_{22}'(\xi)|^2 = 1$. Аналогично, исключается и случай с третьей матрицей.

При $c_0 = \frac{1}{2}$, матрица $\mathcal{S}\mathcal{A}_{\mathrm{sym}}$ в формуле (27) в зависимости от четности/нечетности чисел $\frac{2c_1'-1}{3}$, $\frac{2c_2'+2}{3}$ приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & -e^{2\pi i\xi} \\ -e^{-2\pi i\xi} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -e^{2\pi i\xi} \\ -1 & e^{2\pi i\xi} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} e^{-2\pi i\xi} & -1 \\ -e^{-2\pi i\xi} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} e^{-2\pi i\xi} & -1 \\ -1 & e^{2\pi i\xi} \end{pmatrix}.$$

Но, как и выше, унитарных матриц $\mathcal{A}_{\mathrm{sym}}$ с элементами, такими что их рисунок симметрии совпадает со второй, третьей и четвертой матрицей, не существует. Унитарная матрица $\mathcal{A}_{\mathrm{sym}}$ с элементами, такими что их рисунок симметрии совпадает с первой матрицей, может быть только единичной матрицей E_2. Действительно, с учетом свойства симметрии элементы матрицы имеют общий вид

$$\alpha_{11}'(\xi) = h_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k(e^{2\pi ik\xi} + e^{-2\pi ik\xi}),$$
$$\alpha_{12}'(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(e^{2\pi ik\xi} - e^{2\pi i(1-k)\xi}).$$

Тогда из требования унитарности $|\alpha_{11}'(\xi)|^2 + |\alpha_{12}'(\xi)|^2 = 1$ нетрудно показать, что все коэффициенты g_k равны нулю, а $h_k = \delta_{0k}, k \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, необходимо описать все унитарные матрицы $\mathcal{A}_{\text{sym}}$, рисунок симметрии которых имеет вид

$$\mathcal{S}\mathcal{A}_{\text{sym}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}\mathcal{A}_{\text{sym}} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i\xi} & -e^{2\pi i\xi} \\ -e^{2\pi i\xi} & e^{2\pi i\xi} \end{pmatrix}.$$

Первое равенство имеет место, когда числа $\frac{2c_1'}{3}$, $\frac{2c_2'}{3}$ четные, второе – когда нечетные.

Перейдем от этой задачи к эквивалентной. Преобразуем матрицу $\mathcal{A}_{\text{sym}}$ следующим образом:

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \alpha_{11}(\xi) & \alpha_{12}(\xi) \\ \alpha_{21}(\xi) & \alpha_{22}(\xi) \end{pmatrix} = \mathcal{A}_{\text{sym}} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Матрица $\mathcal{A}$ унитарна и для ее элементов выполнены соотношения

$$\alpha_{11}(\xi) = e^{2\pi i 2d\xi}\alpha_{12}(-\xi), \quad \alpha_{21}(\xi) = -e^{2\pi i 2d\xi}\alpha_{22}(-\xi), \quad d \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}.$$

Будем рассматривать элементы матрицы $\mathcal{A}$ как полифазные составляющие тригонометрических полиномов $a_1(\xi)$ и $a_2(\xi)$ с коэффициентом растяжения 2 и множеством цифр $D(2) = \{0, 1\}$, то есть

$$\begin{aligned} a_1(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha_{11}(2\xi) + e^{2\pi i\xi}\alpha_{12}(2\xi)\right), \\ a_2(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha_{21}(2\xi) + e^{2\pi i\xi}\alpha_{22}(2\xi)\right). \end{aligned} \tag{33}$$

При этом, по лемме 1 тригонометрический полином $a_1(\xi)$ симметричен относительно $2d+\frac{1}{2}$, $a_2(\xi)$ антисимметричен относительно $2d+\frac{1}{2}$. Унитарность матрицы $\mathcal{A}$ равносильна (см., например, [2, лемма 2.6.3]) унитарности матрицы

$$A := \begin{pmatrix} a_1(\xi) & a_1(\xi+\frac{1}{2}) \\ a_2(\xi) & a_2(\xi+\frac{1}{2}) \end{pmatrix}.$$

Далее, покажем, как выбрать первую строчку матрицы A. Проводить построение будем для $d = 0$, то есть когда тригонометрический полином $a_1(\xi)$ симметричен относительно точки $\frac{1}{2}$. Ясно, что для $d = \frac{1}{2}$ тригонометрический полином $a_1(\xi)$ с симметрией относительно точки $\frac{3}{2}$ может быть получен сдвигом на экспоненту $e^{2\pi i\xi}$.

Лемма 3. *Все 2-ортогональные тригонометрические полиномы $a_1(\xi)$, симметричные относительно точки $c = \frac{1}{2}$, имеют вид*

$$a_1(\xi) = (1 + e^{2\pi i\xi})P(\xi),$$

где $P(\xi)$ – тригонометрический полином, симметричный относительно $c = 0$, вида

$$P(\xi) = p_0 + \sum_{k=1}^{n} p_k(e^{2\pi ik\xi} + e^{-2\pi ik\xi}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{34}$$

Коэффициенты $p_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, \dots, n$, определяются из условия 2-ортогональности для тригонометрического полинома $a_1(\xi)$.

Доказательство. Пусть $a_1(\xi)$ – 2-ортогональный тригонометрический полином, симметричный относительно точки $c = \frac{1}{2}$. Из условия симметрии

$$a_1(\xi) = e^{2\pi i\xi} a_1(-\xi)$$

следует, что точка $\xi = \frac{1}{2}$ является нулем тригонометрического полинома $a_1(\xi)$. Значит, он может быть представлен в виде

$$a_1(\xi) = (1 + e^{2\pi i\xi})P(\xi),$$

где $P(\xi)$ – некоторый тригонометрический полином. В силу того, что $a_1(\xi)$ симметричен относительно точки $c = \frac{1}{2}$, $P(\xi)$ является симметричным относительно нуля. Значит, $P(\xi)$ имеет вид (34), где коэффициенты находятся из условия 2-ортогональности.

Обратно, если $a_1(\xi)$ имеет вид

$$a_1(\xi) = (1 + e^{2\pi i\xi})P(\xi),$$

то требования леммы очевидно выполнены. □

К примеру, при $n = 1$ коэффициенты тригонометрического полинома

$$a_1(\xi) = (1 + e^{2\pi i\xi}) \left(p_0 + p_1(e^{2\pi i\xi} + e^{-2\pi i\xi})\right)$$

будут определяться из следующих соотношений

$$|p_0|^2 = \frac{1}{4}, \quad 2|p_1|^2 + p_0\overline{p_1} + \overline{p_0}p_1 = 0.$$

Для случая вещественных коэффициентов общий вид 2-ортогонального тригонометрического полинома, симметричного относительно точки $c = \frac{1}{2}$, может быть выписан явно. Для этого вернемся к матрице $\mathcal{A}_{\rm sym}$ из (31) с элементами $\alpha'_{ij}(\xi)$, $i,j = 1,2$. Если у тригонометрических полиномов $\alpha'_{1j}(\xi)$, $j = 1,2$, вещественные коэффициенты и рисунок симметрии для первой строки задается равенством $\mathcal{SA}^0_{\rm sym} = (1,-1)$, то $\alpha'_{11}(\xi)$ является вещественной функцией, а $\alpha'_{12}(\xi)$ является чисто мнимой. Условие

$$|\alpha'_{11}(\xi)|^2 + |\alpha'_{12}(\xi)|^2 = 1$$

можно эквивалентно переписать в виде

$$|\alpha'_{11}(\xi) + \alpha'_{12}(\xi)| = 1.$$

Отсюда нетрудно убедиться, что выражение под модулем может быть только одночленом вида $\alpha'_{11}(\xi) + \alpha'_{12}(\xi) = \pm e^{2\pi i N\xi}$, где $N \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\alpha'_{11}(\xi) = \pm\cos(2\pi N\xi), \quad \alpha'_{12}(\xi) = \pm i\sin(2\pi N\xi), \quad N \in \mathbb{Z}.$$

Далее, преобразуем $\alpha'_{11}(\xi)$ и $\alpha'_{12}(\xi)$ к тригонометрическому полиному $a_1(\xi)$, как указано выше. Функции $\alpha_{11}(\xi)$, $\alpha_{12}(\xi)$ из (32) имеют вид

$$\alpha_{11}(\xi) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e^{2\pi i N\xi}, \quad \alpha_{12}(\xi) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2\pi i N\xi}, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

По формуле (3),

$$a_1(\xi) = \pm\frac{1}{2}\left(e^{2\pi i 2N\xi} + e^{2\pi i(-2N+1)\xi}\right), \quad N \in \mathbb{Z}. \tag{35}$$

Общий вид 2-ортогонального тригонометрического полинома с вещественными коэффициентами, симметричного относительно точки $c = \frac{1}{2}$, дается формулой (35).

Следуя схеме, изложенной в [1, Глава 5], построим общий вид всех тригонометрических полиномов $a_2(\xi)$. Пусть $a_1(\xi)$ из леммы 3. Очевидно, что матрица

$$\begin{pmatrix} a_1(\xi) & a_1(\xi+\frac{1}{2}) \\ \overline{a_1(\xi+\frac{1}{2})} & -\overline{a_1(\xi)} \end{pmatrix}$$

унитарна.

Предположим, мы достроили первую строчку до унитарной матрицы еще одним способом:

$$\begin{pmatrix} a_1(\xi) & a_1(\xi+\frac{1}{2}) \\ a_2(\xi) & a_2(\xi+\frac{1}{2}) \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Зафиксируем аргумент ξ. Тогда две строки образуют ортонормированный базис в $\mathbb{C}^2$. Значит, строки

$$\left(a_2(\xi), a_2(\xi+\frac{1}{2})\right) \quad \text{и} \quad \left(\overline{a_1(\xi+\frac{1}{2})}, -\overline{a_1(\xi)}\right)$$

коллинеарны с некоторым коэффициентом $\lambda(\xi)$, который определяется из соотношения

$$\lambda(\xi) = a_2(\xi)a_1\left(\xi+\frac{1}{2}\right) - a_2\left(\xi+\frac{1}{2}\right)a_1(\xi),$$

при всех ξ.

Очевидно, функция $\lambda(\xi)$ является тригонометрическим полиномом и для нее выполняется тождество $\lambda(\xi)+\lambda(\xi+\frac{1}{2}) \equiv 0$. Тогда функция $\lambda(\xi)$ может быть представлена в виде

$$\lambda(\xi) = e^{2\pi i\xi}\nu(2\xi),$$

где $\nu(\xi)$ – произвольный тригонометрический полином. Действительно, так как сдвиг функции $\lambda(\xi)$ на пол-периода равен $(-1)\lambda(\xi)$, то у такого тригонометрического полинома коэффициенты при $e^{2\pi in\xi}$, $n \in \mathbb{N}$, отличны от нуля лишь при нечетных n, а значит имеет место представление $\lambda(\xi) = e^{2\pi i\xi}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} h_{2k+1}e^{2\pi i2k\xi}$, $h_k \in \mathbb{C}$.

Таким образом, тригонометрический полином $a_2(\xi)$ имеет вид

$$a_2(\xi) = e^{2\pi i\xi}\overline{a_1\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}\nu(2\xi).$$

При этом, из условия 2-ортогональности полинома $a_2(\xi)$ следует, что $|\nu(\xi)|^2 = 1$. Значит, тригонометрический полином $\nu(\xi)$ является одночленом вида

$$\nu(\xi) = h_k e^{2\pi ik\xi}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{37}$$

где $h_k \in \mathbb{C}$, $|h_k|^2 = 1$.

Более того, нам необходимо также обеспечить антисимметрию для тригонометрического полинома $a_2(\xi)$ относительно точки $c = \frac{1}{2}$. Так как

$$\begin{aligned}
a_2(-\xi) &= e^{-2\pi i\xi}\overline{a_1\left(-\xi+\frac{1}{2}\right)}\nu(-2\xi)\\
&= e^{-2\pi i\xi}\overline{a_1\left(\xi+\frac{1}{2}\right)e^{-2\pi i(\xi+\frac{1}{2})}}\nu(-2\xi)\\
&= -e^{-2\pi i\xi}e^{2\pi i\xi}\overline{a_1\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}\nu(-2\xi),
\end{aligned}$$

то для того, чтобы выполнялось равенство $a_2(\xi) = -e^{2\pi i\xi}a_2(-\xi)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\nu(\xi)$ была четной, то есть $\nu(\xi) = \nu(-\xi)$. Сопоставляя это с (37), получаем, что $\nu(\xi) = h_0$, где $h_0 \in \mathbb{C}$, $|h_0|^2 = 1$.

Таким образом доказана следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть $a_1(\xi)$ является 2-ортогональным тригонометрическим полиномом, симметричным относительно точки $c = \frac{1}{2}$. Тогда любой тригонометрический полином $a_2(\xi)$, антисимметричный относительно точки $c = \frac{1}{2}$, такой что матрица (36) унитарна, имеет вид*

$$a_2(\xi) = e^{2\pi i\xi}\overline{a_1\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}h_0, \tag{38}$$

где $h_0 \in \mathbb{C}$, $|h_0|^2 = 1$.

Для случая тригонометрических полиномов с вещественными коэффициентами полином $a_2(\xi)$ в силу формул (35) и (38) будет иметь вид

$$a_2(\xi) = \pm\frac{1}{2}\left(e^{2\pi i(-2N+1)\xi} - e^{2\pi i2N\xi}\right)h_0,$$

где $h_0 = \pm 1$. Переходя к симметризованной полифазной матрице $\mathcal{A}_{\mathrm{sym}}$ для тригонометрических полиномов $a_1(\xi)$ и $a_2(\xi)$, получим:

$$\mathcal{A}_{\mathrm{sym}} = \begin{pmatrix} \pm\cos(2\pi N\xi) & \pm i\sin(2\pi N\xi) \\ \mp i\sin(2\pi N\xi)h_0 & \mp\cos(2\pi N\xi)h_0 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

где $h_0 = \pm 1$.

Таким образом, суммируя вышесказанное, благодаря теореме 1, с помощью матрицы $\mathcal{A}_{\mathrm{sym}}$ строятся все возможные ортогональные симметричные всплеск-маски, такие что матрица (9) унитарна. Каждая матрица $\mathcal{A}_{\mathrm{sym}}$ строится при помощи лемм 3 и 4, а также формул перехода (32) и (33).

§4. Пример

Обозначим для краткости записи $z := e^{2\pi i\xi}$, $|z| = 1$. Рассмотрим для примера 3-ортогональную маску с вещественными коэффициентами, симметричную относительно нуля:

$$m_0 = -\frac{1}{81z^4} - \frac{4}{81z^3} + \frac{8}{81z^2} + \frac{20}{81z} + \frac{35}{81} + \frac{20}{81}z + \frac{8}{81}z^2 - \frac{4}{81}z^3 - \frac{1}{81}z^4.$$

Эта маска была найдена в работе [4], также исследовалась в [3]. Перейдем к строчке полифазных составляющих $\mathcal{N}^0 = (\mu_{00}(\xi), \mu_{01}(\xi), \mu_{02}(\xi))$, симметризуем ее с помощью матрицы Q из (22): $\mathcal{N}^0_{\mathrm{sym}} = \mathcal{N}^0 Q$ и, следуя [5, Algorithm 2], достраиваем до симметризованной полифазной матрицы

$$\mathcal{N}_{\mathrm{sym}} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{81}\sqrt{3}z+\frac{35}{81}\sqrt{3}-\frac{4}{81z}\sqrt{3} & -\frac{10}{81}\sqrt{6}z-\frac{7}{81}\sqrt{6}-\frac{10}{81z}\sqrt{6} & -\frac{2}{9}z\sqrt{2}+\frac{2}{9z}\sqrt{2} \\ \frac{7}{162}\sqrt{6}z+\frac{20}{81}\sqrt{6}+\frac{7}{162z}\sqrt{6} & \frac{35}{162}\sqrt{3}z-\frac{8}{81}\sqrt{3}+\frac{35}{162z}\sqrt{3} & -\frac{7}{18z}+\frac{7}{18}z \\ \frac{1}{18}\sqrt{6}z-\frac{1}{18z}\sqrt{6} & \frac{5}{18}\sqrt{3}z-\frac{5}{18z}\sqrt{3} & \frac{1}{2z}+\frac{1}{2}z \end{pmatrix}.$$

Соответствующие канонические всплеск-маски m_1 и m_2 будут иметь вид

$$m_1 = \sqrt{2}\left(-\frac{5}{162z^4} - \frac{10}{81z^3} + \frac{20}{81z^2} - \frac{4}{81z} - \frac{7}{81} - \frac{4}{81}z + \frac{20}{81}z^2 - \frac{10}{81}z^3 - \frac{5}{162}z^4\right),$$

$$m_2 = -\frac{1}{54z^4}\sqrt{6} - \frac{2}{27z^3}\sqrt{6} + \frac{4}{27z^2}\sqrt{6} - \frac{4}{27}\sqrt{6}z^2 + \frac{2}{27}\sqrt{6}z^3 + \frac{1}{54}\sqrt{6}z^4.$$

Все возможные симметризованные полифазные матрицы $\mathcal{T}_{\mathrm{sym}}$ с первой строчкой $\mathcal{N}^0_{\mathrm{sym}}$ (с точностью до сдвигов на целочисленные экспоненты z^n, $n \in \mathbb{Z}$) согласно (39) имеют вид

$$\mathcal{T}_{\mathrm{sym}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\cos(2\pi N\xi) & \pm i\sin(2\pi N\xi) \\ 0 & \mp i\sin(2\pi N\xi)h_0 & \mp\cos(2\pi N\xi)h_0 \end{pmatrix} \mathcal{N}_{\mathrm{sym}},$$

где $h_0 = \pm 1$. К примеру, при $N = 1$, $h_0 = 1$, и выборе верхнего знака в $\pm$ и $\mp$ всплеск-маски t_1 и t_2 имеют вид

$$U = \frac{-5+3\sqrt{3}}{324}z^7 + \frac{-10+6\sqrt{3}}{162}z^6 - \frac{-40+24\sqrt{3}}{324}z^5 - \frac{2}{81}z^4 - \frac{7}{162}z^3 - \frac{2}{81}z^2 + \frac{35+21\sqrt{3}}{324}z,$$

$$t_1 = \sqrt{2}\left(U - \frac{20+12\sqrt{3}}{162} + \overline{U}\right);$$

$$V = -\frac{-5+3\sqrt{3}}{324}z^7 - \frac{-10+6\sqrt{3}}{162}z^6 + \frac{-40+24\sqrt{3}}{324}z^5 + \frac{2}{81}z^4 + \frac{7}{162}z^3 + \frac{2}{81}z^2 - \frac{45+27\sqrt{3}}{324}z,$$
$$t_2 = \sqrt{2}\left(V - \overline{V}\right).$$

Авторы выражают благодарность научному руководителю М. А. Скопиной за обсуждение полученных результатов, ценные замечания и внимание к работе.

Литература

1. И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам.* НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевск (2001).
2. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков.* ФИЗМАТЛИТ, М. (2005).
3. М. К. Чобану, *Трехканальные ортогональные симметричные вейвлеты и банки фильтров.* — Труды Междун. конф. Цифровая обработка сигналов и ее применения DSPA-2011 XIII-1 (2011), 290–293.
4. C. Chui, J. Lian, *Construction of compactly supported symmetric and antisymmetric orthonormal wavelets with scale = 3.* — Appl. Comput. Harmon. Anal. **2** (1995), 21–51.
5. B. Han, *Matrix extension with symmetry and applications to symmetric orthonormal complex M-wavelets.* — J. Fourier Anal. Appl. **15** (2009), 684–705.
6. B. Han, *Symmetric orthogonal filters and wavelets with linear-phase moments.* — J. of Comp. and Appl. Math. **236** (2011), 482–503.
7. B. Han, X. S. Zhuang, *Matrix extension with symmetry and its application to symmetric orthonormal multiwavelets.* — SIAM J. Math. Anal. **42** (2010), 2297–2317.
8. A. Krivoshein, *On construction of multivariate symmetric MRA-based wavelets.* arXiv:1201.2606v1, preprint.
9. W. Lawton, S. L. Lee, Z. Shen, *An algorithm for matrix extension and wavelet construction.* — Math. Comput. **65** (1996), 723–737.
10. A. Petukhov, *Construction of symmetric orthogonal bases of wavelets and tight wavelet frames with integer dilation factor.* — Appl. Comput. Harmon. Anal. **17** (2004), 198–210.
11. A. Ron, Z. Shen, *Affine systems in $L_2(R^d)$: the analysis of the analysis operator.* — J. Func. Anal. **148** (1997), 408–447.

Krivoshein A. V., Ogneva M. A. Symmetric orthogonal wavelets with dilation factor $M = 3$.

For the dilation factor $M = 3$ and any given symmetric 3-orthogonal refinable mask, we describe all symmetric 3-orthogonal wavelet masks for which the corresponding wavelet systems form an orthonormal basis in $L_2(\mathbb{R})$.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетский просп. 35,
Петергоф, Санкт-Петербург 198504,
Россия
E-mail: krivosheinav@gmail.com

Поступило 24 апреля 2012 г.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетский просп. 35,
Петергоф, Санкт-Петербург 198504,
Россия
E-mail: maria.ogneva@mail.ru