Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 401, 2012 г.

А. М. Коточигов

СВОБОДНАЯ КРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

§1. Введение

Задача свободной интерполяции восходит к работе Карлесона [1], давшей мощный импульс таким исследованиям. Общая постановка задачи такова: пусть $X_A(D)$ – банахово пространство аналитических функций, $X(\Lambda)$ – банахово пространство функций, заданных на множестве Λ ($\Lambda \subset D$), свободных от условий аналитичности; требуется описать множества свободной интерполяции, т. е. такие множества Λ, что сужение на них всех функций пространства $X_A(D)$ порождает всё пространство $X(\Lambda)$. В работе [1] Карлесон дал полное описание множеств свободной интерполяции для $X_A(D) = H^\infty$, $D = \{z : |z| < 1\}$, и $X(\Lambda) = L^\infty$. Позже Рудиным, Шапиро, Шилдсом, Виноградовым, Коточиговым, Васюниным, Дынькиным, Широковым и многими другими были получены многочисленные аналоги этого результата для различных типов пространств. Существенным препятствием для решения задачи во многих случаях является проблема подбора естественного класса следов – пространства $X(\Lambda)$. Однако, когда она решена, описание структуры интерполяционных множеств происходит в одинаковых терминах – в терминах типа условия Карлесона для точек интерполяционного множества внутри круга, и, если речь идет о пространствах аналитических функций, гладких вплоть до границы, то добавляется условие пористости [2] для граничных точек множества. Если Λ – интерполяционное множество, то из теоремы об открытом отображении следует, что оператор сужения, действующий из $X_A(D)$ в $X(\Lambda)$, имеет непрерывный правый обратный – оператор продолжения. Во многих рассмотренных случаях доказательство достаточности условий на множество Λ проводится путем построения правого обратного оператора. Как в классической задаче интерполяции многочленами, естественно ставить вопрос о кратной интерполяции. В работе Васюнина [3] доказано, что результат Карлесона допускает обобщение на случай кратной интерполяции, но для того,

Ключевые слова: аналитическая функция, модули непрерывности, кратная интерполяция.

чтобы интерполяция была свободной, надо потребовать равномерной ограниченности кратности интерполяции. Доказательство Васюнина не содержало явной конструкции оператора продолжения. Цель этой заметки – построить такой оператор. Напомним, что существующие доказательства теорем о свободной интерполяции для множеств Карлесона общего вида неконструктивны (в них так или иначе проявляется ссылка на теорему о нормальных семействах аналитических функций). Поэтому уместен вопрос о том, когда оператор продолжения можно предъявить явно. Положительный ответ на этот вопрос удается дать, вводя жесткие геометрические условия на интерполяционное множество. Оно должно быть редким и некасательным. Целью заметки является построение оператора продолжения для широкого класса пространств, близких к H^∞ по простоте описания пространств следов для редких некасательных множеств.

§2. Постановка задачи. Формулировка основного результата

Здесь будут рассматриваться пространства аналитических функций, определяемые в терминах модуля непрерывности.

Определение 2.1. *Возрастающая функция $\omega(x)$, определённая на луче $[0,\infty)$, называется модулем непрерывности, если она полуаддитивна (т. е. $\omega(x+y)\le\omega(x)+\omega(y)$) и $\omega(0)=0$.*

Определение 2.2. *Символом $C_A^{m,\omega}$ будем обозначать пространство функций $f(z)$, аналитических в круге $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$, у которых производная $f^{(m)}(z)$ непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$,*

$$|f^{(m)}(z_1)-f^{(m)}(z_2)|\le c\,\omega(|z_1-z_2|),\quad z_1,z_2\in\overline{\mathbb{D}},$$

$$\|f\|=\sum_{k=0}^{m}|f^{(k)}(1)|+\sup_{z_1\ne z_2}\frac{|f^{(m)}(z_1)-f^{(m)}(z_2)|}{\omega(|z_1-z_2|)}.$$

Выбор множеств Λ ограничен условиями, содержащимися в следующем определении.

Определение 2.3. *Множество Λ называется редким, если*

$$\exists\delta\colon |\lambda-\mu|>\delta\max(1-|\lambda|,1-|\mu|),\quad \lambda,\mu\in\Lambda.$$

Множество Λ называется некасательным, если

$$\exists\varepsilon\colon |\lambda-1|>\varepsilon(1-|\lambda|),\quad \lambda\in\Lambda.$$

Из определения следует, что Λ – дискретное множество, сгущающееся к точке $z = 1$. Точка сгущения фиксирована для того, чтобы упростить дальнейшие описания.

Так как Λ – дискретное множество, то в описании пространства следов производные естественно заменить разделенными разностями, но разделенная разность слабо связана с кратной интерполяцией. С другой стороны, как будет показано, принятые ограничения на множество Λ оставляют большую свободу для поведения функций из $C_A^{m,\omega}$ на этом множестве. Для того, чтобы правильно описать эту свободу, воспользуемся следующим простым утверждением.

Лемма 2.1. *Всякая функция f из пространства $C_A^{m,\omega}$ допускает представление*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(z-1)^k + \int_1^z (1-t)^m f^{(m+1)}(t)\,dt\,.$$

Эта формула позволяет "сузить" задачу интерполяции.

Определение 2.4.

$$C_{0,A}^{m,\omega} = \{f \in C_A^{m,\omega} : f^{(k)}(1) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, m\}.$$

Следствие 2.1.

$$C_A^{m,\omega} = C_{0,A}^{m,\omega} + \mathcal{P}_m\,,$$

где $\mathcal{P}_m$ – пространство многочленов степени m.

Очевидно, задачу интерполяции достаточно решить для пространства $C_{0,A}^{m,\omega}$. Будет показано, что пространство следов полностью определяется минимальными требованиями, вытекающими из леммы. Дадим определения "кандидата" на пространство следов.

Определение 2.5.

$$C_0^{m,\omega}(\Lambda) = \{\vec{\phi}(\lambda) = (\phi_0(\lambda), \ldots, \phi_r(\lambda)) :$$
$$|\phi_k(\lambda)| \le c_k |1-\lambda|^{m-k}\omega(|1-\lambda|), 0 \le k \le r\}, \|\phi\| = \max\{c_k\}.$$

Замечание 2.1. Лемма 2.1 гарантирует, что отображение $f(z) \mapsto (f(\lambda), \ldots, f^{(r)}(\lambda))$ действует из $C_{0,A}^{m,\omega}$ в $C_0^{m,\omega}(\Lambda)$. Задача интерполяции будет решена, если будет построен непрерывный оператор, продолжающий последовательности ростков до функций и действующий из $C_0^{m,\omega}(\Lambda)$ в $C_{0,A}^{m,\omega}$. Отметим, что высота ростков (параметр r) совершенно произвольна. Допускается любая конечная кратность, как и в теореме Васюнина.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть Λ – редкое, некасательное множество. Тогда оператор*

$$\vec{\phi} \mapsto f(z) = (1-z)^m \Omega(z) \sum_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda(z)\Phi_\lambda(z)$$

является оператором продолжения ($f^{(k)}(\lambda) = \phi_k(\lambda)$, $k = 0, 1, \ldots, r$), *непрерывно отображающим пространство* $C_0^{m,\omega}(\Lambda)$ *в* $C_{0,A}^{m,\omega}$.

Здесь

- $\Omega(z)$ – функция, аналитическая в круге $\mathbb{D}$ и такая, что
$$\frac{1}{c}\,\omega(|1-z|) < |\Omega(z)| < c\,\omega(|1-z|)\,,$$
$$|\Omega^{(k)}(z)| < c\,|1-z|^{-k}\omega(|1-z|), \quad k = 0, \ldots, r\,,$$
- $p_\lambda(z)$ – многочлены, обеспечивающие локальное выполнение равенств $f^{(k)}(\lambda) = \phi_k(\lambda)$,
- $\Phi_\lambda(z)$ – аналитические в круге функции, гасящие на множестве Λ взаимное влияние многочленов.

Все эти функции, участвующие в формулировке основного результата, будут определены ниже.

Замечание 2.2. В проводимых ниже оценках важную роль играет то обстоятельство, что все функции, используемые для построения оператора продолжения, аналитичны в области

$$\mathbb{D}_\delta = \{z\colon |z| < 1+\delta, |\arg(z-1)| > \frac{\pi}{2} - \delta\}\,.$$

Этот запас аналитичности позволяет легко получить оценку

$$\|f\|_{C_{0,A}^{m,\omega}} \le c\ \sup\Big\{\frac{|f^{(m)}(z)|}{\omega(|1-z|)}\colon z\in\mathbb{D}\Big\}.$$

Определение функций $\Phi_\lambda(z)$ повторяет конструкцию из работы [4]:

$$\Phi_\lambda(z) = \left(\frac{B_\lambda(z)}{B_\lambda(\lambda)}\right)^{r+1} \left(\frac{(1-\lambda^2)(1-z^2)}{(1-\lambda z)^2}\right)^{r+1},$$

где $B_\lambda(z) = \prod_{\tau\in\Lambda\setminus\{\lambda\}} b_\tau(z)$ – произведение Бляшке, $b_\tau(z) = \frac{|\tau|}{\tau}\cdot\frac{\tau - z}{1-z\bar{\tau}}$ – фактор Бляшке. Главное свойство этой функции заключается в том, что $\Phi_\lambda(\lambda) = 1$ и $\Phi_\lambda(\mu) = 0$ при всех $\mu \ne \lambda$, $\mu\in\Lambda$.

Построение функции $\Omega(z)$ приведено в работе [5], где доказана следующая лемма.

Лемма 2.2. *Пусть ω – выпуклый модуль непрерывности. Тогда существуют функция $\Omega(z)$, аналитическая в области $|\arg(z-1)| > \frac{\pi}{4}$, и положительная постоянная c такие, что*

$$\frac{1}{c}\,\omega(|1-z|) < |\Omega(z)| < c\,\omega(|1-z|),$$

$$|\Omega^{(k)}(z)| < c\,\frac{\omega(|1-z|)}{|1-z|^k}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Замечание 2.3. Легко проверить (см. [6]), что для любого модуля непрерывности существует эквивалентный ему выпуклый модуль непрерывности. Для любого выпуклого модуля непрерывности выполняются неравенства

$$\alpha\omega(x) \le \omega(\alpha x) \le \omega(x), \quad \alpha \in [0,1]\,.$$

В дальнейших оценках одна и та же буква c может обозначать разные постоянные.

§3. Описание многочленов $p_\lambda(z)$

Построение многочленов требует уточнения того, как понимать явное построение. Здесь будут предъявлены системы линейных уравнений для определения коэффициентов многочленов. Все системы с квадратной невырожденной матрицей размера $r \times r$, но явного описания решений здесь не приводится. Многочлены $p_\lambda(z)$ должны быть построены так, чтобы выполнялись равенства $f^{(k)}(\lambda) = \phi_k(\lambda)$, $k = 0, 1, \ldots, r$.

Введем стандарт описания многочленов

$$p_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{r} p_{\lambda,k}(z-\lambda)^k.$$

Описание коэффициентов $p_{\lambda,0}$ получить легко. Воспользуемся той формой записи интерполирующей функции f, которую мы хотим получить (см. формулировку теоремы) и рассмотрим значения этой функции в точках множества Λ:

$$f(\lambda) = (1-\lambda)^m \Omega(\lambda) \sum_{\tau \in \Lambda} p_\tau(\lambda)\Phi_\tau(\lambda)\,.$$

Основное свойство функций $\Phi_\lambda(z)$ позволят переписать это равенство в виде

$$f(\lambda) = (1-\lambda)^m \Omega(\lambda) p_\lambda(\lambda)\,.$$

В силу принятого описания многочленов получаем следующее выражение для нулевого коэффициента:

$$p_{\lambda,0} = \frac{f(\lambda)}{(1-\lambda)^m \Omega(\lambda)}\,.$$

В общем случае требуется обеспечить равенства $f^{(k)}(\lambda) = \phi_k(\lambda)$ при $\lambda \in \Lambda$, $k = 0, 1, \ldots, r$. Контролировать эти соотношения удобно, используя формулу Коши

$$f^{(k)}(\lambda) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(\lambda)} \frac{f(z)}{(z-\lambda)^{(k+1)}}\,dz, \qquad \Gamma(\lambda) = \{|z-\lambda| = \varepsilon|1-\lambda|\}\,.$$

Здесь ε выбрано так, что внутри круга находится одна точки множества Λ. Заметим, что для всех слагаемых, кроме одного, особая точка устранимая, так как $B_\mu^{r+1}(z)$ содержит множитель $(z-\lambda)^{r+1}$ и $r \geq k$ при $\mu \neq \lambda$, $\mu \in \Lambda$. Благодаря этому, в сумме только одно слагаемое отлично от нуля:

$$f^{(k)}(\lambda) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(\lambda)} \frac{(1-z)^m \Omega(z) p_\lambda(z) \Phi_\lambda(z)}{(z-\lambda)^{k+1}}\,dz\,.$$

При $r = 0$ получим подтверждение уже доказанного соотношения для $p_{\lambda,0}$. При $r = 1$ получим

$$\begin{aligned} f'(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} p_{\lambda,0} \int\limits_{\Gamma(\lambda)} &\frac{(1-z)^m \Omega(z) \Phi_\lambda(z)}{(z-\lambda)^2}\,dz \\ &+ \frac{1}{2\pi i} p_{\lambda,1} \int\limits_{\Gamma(\lambda)} \frac{(1-z)^m \Omega(z) \Phi_\lambda(z)}{z-\lambda}\,dz\,, \end{aligned}$$

$$f'(\lambda) = p_{\lambda,0} \big[(1-z)^m \Omega(z) \Phi_\lambda(z)\big]'_{z=\lambda} + p_{\lambda,1} (1-\lambda)^m \Omega(\lambda)\,.$$

В общем случае

$$f^{(k)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!} p_{\lambda,j} \big[(1-z)^m \Omega(z) \Phi_\lambda(z)\big]^{(k-j)}_{z=\lambda}\,.$$

Таким образом, для того, чтобы интерполяционная задача была решена, необходимо выполнение следующих равенств:

$$\begin{cases} \phi_0(\lambda) = p_{\lambda,0}(1-\lambda)^m\Omega(\lambda), \\ \phi_1(\lambda) = p_{\lambda,1}(1-\lambda)^m\Omega(\lambda) \quad + p_{\lambda,0}[(1-z)^m\Omega(z)\Phi_\lambda(z)]'_{z=\lambda}, \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ \phi_r(\lambda) = p_{\lambda,r}(1-\lambda)^m\Omega(\lambda) \quad + \sum\limits_{k=0}^{r-1} \dfrac{r!}{k!} p_{\lambda,k}\left[(1-z)^m\Omega(z)\Phi_\lambda(z)\right]^{(r-k)}_{z=\lambda}. \end{cases}$$

Из этой системы определятся коэффициенты многочлена $p_\lambda(z)$:

$$\begin{cases} p_{\lambda,0} = \dfrac{\phi_0(\lambda)}{(1-\lambda)^m\Omega(\lambda)}, \\ p_{\lambda,1} = \dfrac{\phi_1(\lambda) - p_{\lambda,0}\left[(1-z)^m\Omega(z)\Phi_\lambda(z)\right]'_{z=\lambda}}{(1-\lambda)^m\Omega(\lambda)}, \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ p_{\lambda,r} = \dfrac{\phi_r(\lambda) - \sum_{k=0}^{r-1} \dfrac{r!}{k!} p_{\lambda,k}\left[((1-z)^m\Omega(z)\Phi_\lambda(z)\right]^{(r-k)}_{z=\lambda}}{(1-\lambda)^m\Omega(\lambda)}. \end{cases}$$

Чтобы получить оценки коэффициентов, этого представления достаточно (явное выражение пока не требуется).

§4. Вспомогательные оценки

В приводимых ниже доказательствах используется нумерация точек множества Λ. Предполагается, что точки занумерованы так, что $|1-\lambda_n| \geq |1-\lambda_{n+1}|$, что возможно для редкого некасательного множества.

Основу всех оценок составляет следующее доказанное в [4] утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть Λ – некасательное множество, являющееся объединением конечного числа редких множеств с предельной точкой $z = 1$, и пусть a, $b \geq 0$. Тогда существует такое положительное число ε, что в области $|\arg(z-1)| > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ справедливы следующие оценки.*

1) *При $|1-z| \geq |1-\lambda_N|$:*

$$\sum_{N \leq k \leq M} \frac{|1-z|^a|1-\lambda_k|^b}{|1-z\lambda_k|^{a+b}} \leq C\left|\frac{1-z}{1-z\lambda_N}\right|^b.$$

2) *При* $|1-\lambda_N| \ge |1-z| \ge |1-\lambda_M|$*:*

$$\sum_{N\le k\le M} \frac{|1-z|^a|1-\lambda_k|^b}{|1-z\lambda_k|^{a+b}} \le C\,.$$

3) *При* $|1-\lambda_M| \ge |1-z|$*:*

$$\sum_{N\le k\le M} \frac{|1-z|^a|1-\lambda_k|^b}{|1-z\lambda_k|^{a+b}} \le C\left|\frac{1-z}{1-z\lambda_M}\right|^a.$$

Лемма 4.2. *Пусть* $0<|\lambda|<1$, σ, $\varepsilon>0$, $1-|\lambda|>\sigma|1-\lambda|$, $|z-\frac{1}{\lambda}|>\varepsilon|1-\lambda|$. *Тогда существует постоянная* c*, зависящая только от* σ *и* ε*, такая, что*

$$\frac{1}{c}(|1-z|+|1-\lambda|) \le |1-z\lambda| \le c(|1-z|+|1-\lambda|).$$

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала случай, когда $|z-\bar\lambda| < \frac{1}{2}(1-|\lambda|)$, тогда оценка следует из двух вспомогательных неравенств. Первое утверждает, что в условиях леммы выполняются соотношения

$$\frac{1-|\lambda|^2}{2} \le |1-z\lambda| \le \frac{3(1-|\lambda|^2)}{2}.$$

Чтобы проверить это утверждение, можно воспользоваться равенством $1-z\lambda = 1-|\lambda|^2+\lambda(z-\bar\lambda)$ и переписать его в виде

$$\frac{1-z\lambda}{1-|\lambda|^2} = 1+\frac{\lambda(z-\bar\lambda)}{1-|\lambda|^2}.$$

Из условия $|z-\bar\lambda| < \frac{1}{2}(1-|\lambda|)$ вытекает, что

$$\frac{|\lambda||z-\bar\lambda|}{1-|\lambda|^2} \le \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \le \frac{|1-z\lambda|}{1-|\lambda|^2} \le \frac{3}{2},$$

что доказывает нужную оценку.

Второе вспомогательное неравенство:

$$\frac{1-|\lambda|}{2} \le |1-z| \le \frac{3(1-|\lambda|)}{2\sigma}$$

доказывается аналогично. Равенство $1 - z = (1 - \bar{\lambda}) + (\bar{\lambda} - z)$ можно переписать в виде

$$\frac{1-z}{1-\bar{\lambda}} = 1 - \frac{z-\bar{\lambda}}{1-\bar{\lambda}}.$$

Заметим, что

$$\frac{|z-\bar{\lambda}|}{|1-\bar{\lambda}|} \leq |1+\lambda|\frac{|z-\bar{\lambda}|}{1-|\lambda|^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$\frac{1-|\lambda|}{2} \leq \frac{|1-\bar{\lambda}|}{2} \leq |1-z| \leq \frac{3|1-\bar{\lambda}|}{2} \leq \frac{3(1-|\lambda|)}{2\sigma}.$$

Чтобы доказать лемму в рассматриваемом случае, перепишем первое вспомогательное неравенство в виде

$$\frac{(1+|\lambda|)(1-|\lambda|)}{2} \leq |1-z\lambda| \leq \frac{3(1+|\lambda|)(1-|\lambda|)}{2}$$

и далее

$$\frac{(1-|\lambda|)}{2} \leq |1-z\lambda| \leq 3(1-|\lambda|).$$

Второе вспомогательное неравенство позволяет заменять $1 - |\lambda|$ на $|1 - z|$, что дает возможность получить следующее неравенство:

$$\frac{(1-|\lambda|) + \frac{2\sigma}{3}|1-z|}{4} \leq |1-z\lambda| \leq 6((1-|\lambda|) + 2|1-z|).$$

Осталось воспользоваться условием $1 - |\lambda| > \sigma|1 - \lambda|$ и получить требуемое неравенство

$$\frac{\sigma}{6}(|1-\lambda| + |1-z|) \leq |1-z\lambda| \leq 12(|1-\lambda| + |1-z|).$$

2) Остается рассмотреть случай $|z - \bar{\lambda}| \geq \frac{1}{2}(1 - |\lambda|)$. Докажем вспомогательное неравенство

$$\frac{1}{c_1}|z-\bar{\lambda}| \leq |1-z\lambda| \leq c_1|z-\bar{\lambda}|.$$

Если $\lambda = 0$, то неравенство очевидно. Можно считать, что $\inf\{|\lambda| : \lambda \in \Lambda\} > \delta_0$. Тогда перепишем это соотношение в более удобном для анализа виде

$$\frac{1}{c_1} \leq \frac{|\lambda|\,|\frac{1}{\lambda} - z|}{|z-\bar{\lambda}|} \leq c_1.$$

Фактически надо проверить, что отношение чисел $|\frac{1}{\lambda} - z|$ и $|z - \bar{\lambda}|$ ограничено сверху и снизу. Легко установить, что это условие выполняется, если точка z не принадлежит кругам достаточно малого радиуса с центами в точках $\bar{\lambda}$ и $\frac{1}{\lambda}$. Выполнение этих условий гарантируют неравенства $|z - \frac{1}{\lambda}| > \varepsilon|1-\bar{\lambda}|$ и $|z-\bar{\lambda}| \geq \frac{1}{2}(1-|\lambda|)$. Следовательно, вспомогательное неравенство справедливо.

Завершим доказательство основного неравенства. Из вспомогательного неравенства следует, что достаточно доказать оценку

$$\frac{1}{c_2}(|1-z| + |1-\lambda|) \leq |z-\bar{\lambda}| \leq c_2(|1-z| + |1-\lambda|).$$

Оценка сверху легко получается из неравенства треугольника. Противоположное неравенство будет доказано в два этапа. Если $|1-z| > 2|1-\lambda|$, получаем

$$|z-\bar{\lambda}| \geq |1-z| - |1-\lambda| \geq \frac{1}{2}|1-z| \geq \frac{1}{4}(|1-z| + |1-\lambda|).$$

Если $|1-z| \leq 2|1-\lambda|$, то поскольку здесь $|z-\bar{\lambda}| \geq \frac{1}{2}(1-|\lambda|)$, получаем

$$|z-\bar{\lambda}| \geq \frac{\sigma}{2}|1-\lambda| \geq \frac{\sigma}{8}(|1-\lambda| + |1-z|).$$

□

Следствие 4.1. *Если выполнены условия леммы, то при любом положительном числе a существует постоянная $c = c(\sigma, \varepsilon, a)$ такая, что*

$$\frac{1}{c}(|1-z|^a + |1-\lambda|^a) \leq |1-z\lambda|^a \leq c(|1-z|^a + |1-\lambda|^a).$$

Доказательство. Обозначим через m большее из чисел $|1-z|$ и $|1-\lambda|$ и через c_1 постоянную из леммы, тогда справедлива оценка

$$\frac{1}{c_1}m \leq |1-z\lambda| \leq c_1 2m.$$

Возведем члены неравенства в степень a и "переделаем" его в нужную оценку

$$2^{-a}c_1^{-a}(|1-z|^a + |1-\lambda|^a) \leq |1-z\lambda|^a \leq c_1^a 2^a(|1-z|^a + |1-\lambda|^a).$$

□

Лемма 4.3. *Пусть Λ – некасательное множество, являющееся объединением конечного числа редких множеств, с предельной точкой $z = 1$. Тогда существует такое положительное число ε, что в области $|\arg(z-1)| > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ справедливы оценки*

$$|B^{(k)}(z)| \leq \frac{c}{|1-z|^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Здесь $B(z) = \prod\limits_{\tau\in\Lambda} b_\tau(z)$.

Доказательство. Напомним обозначения: $B_\lambda(z) = \prod_{\tau\in\Lambda\setminus\{\lambda\}} b_\tau(z)$ – произведение Бляшке, $b_\tau(z) = \dfrac{|\tau|}{\tau}\dfrac{\tau - z}{1 - z\bar{\tau}}$ – фактор Бляшке. Воспользуемся следующим тождеством (см. [7] с. 85):

$$1 - b_\tau(z) = (1 - |\tau|)\left(1 + \frac{z|\tau|(1+|\tau|)}{\tau(1-z\bar{\tau})}\right).$$

Множество Λ – некасательное, значит точки $\{\frac{1}{\bar{\tau}} : \tau \in \Lambda\}$ лежат в некотором угле $\{|\arg(z-1)| < \frac{\pi}{2} - \delta\}$. Заметим, что для любой фиксированной точки $z \in \{|\arg(t-1)| > \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\}$ найдется число $\rho > 0$ такое, что в круге $\{t : |t - z| < \rho\}$ величина $|1 - z\tau| = |\tau||z - \frac{1}{\tau}|$ больше некоторой положительной константы при всех $\tau \in \Lambda$, $|\tau| \neq 0$. Из свойств произведений Бляшке следует, что в этих кругах частичные произведения $B_N(t) = \prod\limits_{i=1}^{N} b_{\tau_i}(t)$ равномерно сходятся к $B(t)$. По теореме Вейерштрасса (см. [8]) из этого следует равномерная сходимость любых производных. Следовательно, достаточно оценить $B_N^{(k)}(z)$. Для удобства положим $b_j(z) = b_{\tau_j}(z)$. Имеем:

$$B_N^{(k)}(z) = \sum_J \prod_{j_q\in J} b_{j_q}^{(s_q)}(z) \prod_{j_q\notin J} b_{j_q}(z),$$

$$J = \{(j_1, \dots, j_p) \colon j_q \in \mathbb{N},\ p \leq r+1\},$$

$$s_q \in \mathbb{N}, \quad q = 1, \dots, p, \quad s_1 + \dots + s_q = k,$$

здесь r – число из формулировки теоремы (глубина интерполяции). Заметим, что

$$b_\tau(z) = \frac{|\tau|}{\tau}\left(\frac{1}{\bar{\tau}} - \frac{\dfrac{1}{\bar{\tau}} - \tau}{1 - z\bar{\tau}}\right).$$

Отсюда вытекает, что $|b_\tau^{(k)}(z)| \le \dfrac{c|1-\tau|}{|1-z\bar\tau|^{k+1}}$, и с учетом неравенства $|b_\tau(z)| < c$ при $z \in \{|\arg(t-1)| > \frac{\pi}{2} - \varepsilon\}$ получим

$$|B_N^{(k)}(z)| \le c \sum_J \prod_{j_q \in J} |b_{j_q}^{(s_q)}(z)| \le c \sum_J \prod_{j_q\in J} \frac{|1-\tau_{j_q}|}{|1-z\bar\tau_{j_q}|^{s_q+1}}\,.$$

Соберем слагаемые в группы с одинаковым набором производных $S = (s_1, \dots, s_p)$ и обозначим все наборы индексов длины p через J_p, тогда

$$|B_N^{(k)}(z)| \le c \sum_J \prod_{j_q\in J} \frac{|1-\tau_{j_q}|}{|1-z\bar\tau_{j_q}|^{s_q+1}} = c \sum_S \sum_{J_p} \prod_{j_q \in J_p} \frac{|1-\tau_{j_q}|}{|1-z\bar\tau_{j_q}|^{s_q+1}}$$

$$\le c \sum_S \prod_{j=1}^{p} \sum_{n=1}^{N} \frac{|1-\tau_n|}{|1-z\bar\tau_n|^{s_j+1}} = \frac{c}{|1-z|^k} \sum_S \prod_{j=1}^{p} \sum_{n=1}^{N} \frac{|1-\tau_n|\,|1-z|^{s_j}}{|1-z\bar\tau_n|^{s_j+1}}\,.$$

Внутренняя сумма допускает равномерную оценку (лемма 4.1), произведение и внешняя сумма имеют конечное число членов, $p \ge 1$, следовательно

$$|B_N^{(k)}(z)| \le \frac{c}{|1-z|^k}\,.$$

□

Следствие 4.2.

$$|(B^{r+1}(z))^{(k)}| \le \frac{c}{|1-z|^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. В доказательстве леммы никак не использовалось то обстоятельство, что точки множества Λ различны. Можно считать, что все они имеют кратность $r+1$. Условия леммы останутся при этом выполнены. □

Лемма 4.4. *Если $|\lambda| < 1$, то существует такое положительное число ε, что в области $|\arg(z-1)| > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ справедливы оценки*

$$\left|\left(\left(\frac{(1-\lambda^2)(1-z^2)}{(1-\lambda z)^2}\right)^{r+1}\right)^{(k)}\right| \le c\frac{|1-\lambda|^{r+1}|1-z|^{r+1-k}}{|1-\lambda|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}}\,, \quad k \le r\,.$$

Доказательство. Требуется оценить величину

$$(1-\lambda^2)^{r+1}\left(\frac{(1-z)^{r+1}(1+z)^{r+1}}{(1-\lambda z)^{2(r+1)}}\right)^{(k)}.$$

Запишем производную произведения в виде суммы

$$\left(\frac{(1-z)^{r+1}(1+z)^{r+1}}{(1-\lambda z)^{2(r+1)}}\right)^{(k)}$$

$$=\sum_{k_1+k_2+k_3=k}\frac{k!(-1)^{k_1}}{k_1!\,k_2!\,k_3!}(1-z)^{r+1-k_1}(1+z)^{r+1-k_2}\frac{\bar\lambda^{k_3}}{(1-\lambda z)^{2(r+1)+k_3}}\,.$$

Поскольку сумма конечна, достаточно оценить одно слагаемое "общего вида", исключив из него множитель $(1+z)^s$. Обозначим такое слагаемое буквой σ:

$$\sigma=\frac{|1-z|^{r+1-k_1}}{|1-z|^{2(r+1)+k_3}+|1-\lambda|^{2(r+1)+k_3}}\,,\quad k_1+k_3\le k\,.$$

Чтобы упростить выкладки, введем обозначения $|1-z|=e^{-\alpha}$, $|1-\lambda|=e^{-\beta}$:

$$\sigma=\frac{e^{-\alpha(r+1-k_1)}}{e^{-\alpha(2(r+1)+k_3)}+e^{-\beta(2(r+1)+k_3)}}\,.$$

Сперва рассмотрим случай, когда $|1-z|\ge|1-\lambda|$, то есть $\alpha\le\beta$. В этом случае

$$\begin{aligned}\sigma&\le c\,e^{\alpha(r+1+k_1+k_3)}\le c\,e^{\alpha(r+1+k)}=c\,\frac{e^{-\alpha(r+1-k)}}{e^{-2\alpha(r+1)}}\\&\le c\,\frac{e^{-\alpha(r+1-k)}}{e^{-2\alpha(r+1)}+e^{-2\beta(r+1)}}=c\,\frac{|1-z|^{r+1-k}}{|1-\lambda|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}}\,.\end{aligned}$$

Пусть теперь $|1-z|\le|1-\lambda|$, то есть $\alpha\ge\beta$. Тогда

$$\sigma\le c\,e^{\beta(2r+2+k_3)}\,e^{-\alpha(r+1-k_1)}=c\,e^{(2\beta-\alpha)(r+1)}\,e^{\beta k_1+\alpha k_3}.$$

Заметим, что $k_1,k_3\ge0$, $k_1+k_3\le k$, $\alpha\ge\beta$, поэтому $\beta k_1+\alpha k_3\le\alpha k$ и

$$\sigma\le c\,e^{(2\beta-\alpha)(r+1)}\,e^{\alpha k}=c\,\frac{|1-z|^{r+1-k}}{|1-\lambda|^{2r+2}}\le c\,\frac{|1-z|^{r+1-k}}{|1-\lambda|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}}\,.$$

Следовательно,

$$\left|(1-\lambda^2)^{r+1}\left(\frac{(1-z)^{r+1}(1+z)^{r+1}}{(1-\lambda z)^{2(r+1)}}\right)^{(k)}\right|\le c\,\frac{|1-\lambda|^{r+1}|1-z|^{r+1-k}}{|1-\lambda|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}}\,,$$

и лемма доказана. □

Лемма 4.5. *Если* $|\lambda| < 1$, *то существует такое положительное число* ε, *что в области* $|\arg(z-1)| > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ *справедливы оценки*

$$\left|\left[\Phi_\lambda(z)\right]^{(k)}\right| \le c\ \frac{|1-\lambda|^{r+1}|1-z|^{r+1-k}}{|1-\lambda|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}}.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\Phi_\lambda(z) = \left(\frac{B_\lambda(z)}{B_\lambda(\lambda)}\right)^{r+1}\phi_\lambda(z), \qquad \text{где } \phi_\lambda(z) = \left(\frac{(1-\lambda^2)(1-z^2)}{(1-\lambda z)^2}\right)^{r+1},$$

и запишем формальное выражение для производной

$$\left[\Phi_\lambda(z)\right]^{(k)} = \frac{1}{B_\lambda^{r+1}(\lambda)} \sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!}\left(B_\lambda^{r+1}(z)\right)^{(k_1)}\phi_\lambda^{(k_2)}(z).$$

Из лемм 4.4 и 4.3 следует оценка

$$\left|\left[\Phi_\lambda(z)\right]^{(k)}\right| \le c\ \frac{|1-\lambda|^{r+1}|1-z|^{r+1-k}}{|1-\lambda|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}}\ .$$

□

Лемма 4.6. *Если* $|\lambda| < 1$, *то существует такое положительное число* ε, *что в области* $|\arg(z-1)| > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ *справедливы оценки*

$$\left|\left[(1-z)^m\Omega(z)\Phi_\lambda(z)\right]^{(k)}\right| \le c\ \frac{\omega(|1-z|)|1-\lambda|^{r+1}|1-z|^{r+1-k+m}}{|1-\lambda|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}}\ .$$

Доказательство. Леммы 2.2 и 4.5 позволяют получить оценку

$$\begin{aligned}
&\left|\left[(1-z)^m\Omega(z)\Phi_\lambda(z)\right]^{(k)}\right| \\
&\qquad \le c \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}|c(k_1)||1-z|^{m-k_1}|c(k_2)|\frac{\omega(|1-z|)}{|1-z|^{k_2}}\times \\
&\qquad\qquad \times |c(k_3)|\frac{|1-\lambda|^{r+1}|1-z|^{r+1-k_3}}{|1-\lambda|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}} \\
&\qquad \le c \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}\ \frac{|1-\lambda|^{r+1}|1-z|^{r+1-k+m}}{|1-\lambda|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}}\ .
\end{aligned}$$

Из приведенного неравенства следует нужная оценка, поскольку при фиксированных m, r, k все константы и число слагаемых равномерно ограничены. □

Вернемся к оценкам коэффициентов $p_{\lambda,j}$.

Лемма 4.7.

$$|p_{\lambda,j}| \le \frac{c}{|1-\lambda|^j}\,.$$

Доказательство. Напомним, что

$$|\phi_k(\lambda)| \le c|1-\lambda|^{m-k}\omega(|1-\lambda|), \qquad k=0,1,\dots,r,$$

и воспользуемся леммой 2.2 для оценки $|\Omega(z)|$. Используя формулы для коэффициентов $p_{\lambda,0}$ из раздела 3, получим оценку

$$|p_{\lambda,0}| \le \frac{|\phi_0(\lambda)|}{|1-\lambda|^m\omega(|1-\lambda|)} \le c\,.$$

Это дает возможность провести оценку следующего коэффициента:

$$|p_{\lambda,1}| \le \frac{|\phi_1(\lambda)|}{|1-\lambda|^m\omega(|1-\lambda|)} + \frac{c\;|p_{\lambda,0}|\,\big|\big[(1-z)^m\Omega(z)\Phi_\lambda(z)\big]'_{z=\lambda}\big|}{|1-\lambda|^m\omega(|1-\lambda|)}\,,$$

и далее на основании леммы 4.6 получить оценку

$$|p_{\lambda,1}| \le \frac{c\;|1-\lambda|^{m-1}\omega(|1-\lambda|)}{|1-\lambda|^m\omega(|1-\lambda|)} + \frac{c\;|1-\lambda|^{m-1}\omega(|1-\lambda|)}{|1-\lambda|^m\omega(|1-\lambda|)} \le \frac{c}{|1-\lambda|}.$$

Проведем индукцию: примем гипотезу $|p_{\lambda,j-1}| \le \dfrac{c}{|1-\lambda|^{j-1}}$ и совершим индукционный переход

$$|p_{\lambda,j}| \le \frac{|\phi_j(\lambda)|}{|1-\lambda|^m\omega(|1-\lambda|)} + \frac{\sum_{k=0}^{j-1}|p_{\lambda,k}|\,\big|\big[(1-z)^m\Omega(z)\Phi_\lambda(z)\big]^{(j-k)}_{z=\lambda}\big|}{|1-\lambda|^m\omega(|1-\lambda|)}\,.$$

Так как

$$\big|\big[(1-z)^m\Omega(z)\Phi_\lambda(z)\big]^{(j-k)}_{z=\lambda}\big| \le c\;\omega(|1-z|)\frac{|1-\lambda|^{r+1}|1-z|^{r+1-(j-k)+m}}{|1-\lambda|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}}\,,$$

то, полагая в последней оценке $z=\lambda$, получим:

$$|p_{\lambda,j}| \le \frac{c}{|1-\lambda|^j} + c\sum_{k=0}^{j-1}|1-\lambda|^{-j+k} \le \frac{c}{|1-\lambda|^j}\,.$$

$\square$

§5. Доказательство теоремы

Если ряд, определяющий функцию f, сходится и его можно дифференцировать почленно, то из самой конструкции следует, что функция осуществляет интерполяцию. Следовательно, достаточно доказать сходимость этих рядов, точнее, оценить норму функции в пространстве $C^{m,\omega}_{0,A}$. Покажем, что имеющихся оценок достаточно для получения нужных оценок производных функции f:

$$f^{(j)}(z) = \sum_{\lambda} \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4} ((1-z)^m)^{(j_1)} \Omega^{(j_2)}(z) p_\lambda^{(j_3)}(z) \Phi_\lambda^{(j_4)}(z),$$

здесь $j_n \geq 0$ и $j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = j$.

Перепишем эту формулу, вычислив производную первого и третьего сомножителя:

$$f^{(j)}(z) = \sum_{\lambda} \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4} c(m,j_1)(1-z)^{m-j_1} \Omega^{(j_2)}(z) \times \\ \times \left(\sum_{k=j_3}^{r} c(k,j_3) p_{\lambda,k} (z-\lambda)^{k-j_3} \right) \Phi_\lambda^{(j_4)}(z)\,.$$

Из последующих оценок будет видно, что возникающие здесь ряды сходятся абсолютно и равномерно, это оправдает примененный здесь переход к почленному дифференцированию и перестановку порядка суммирования. Все внутренние суммы имеют конечное число слагаемых с равномерно ограниченными по параметрам суммирования коэффициентами, следовательно, достаточно установить равномерную оценку для произвольного слагаемого. Остается для произвольного набора параметров j_n, k оценить величину суммы

$$S = \Big| \sum_{\lambda} (1-z)^{m-j_1} \Omega^{(j_2)}(z) p_{\lambda,k} (z-\lambda)^{k-j_3} \Phi_\lambda^{(j_4)}(z) \Big|\,.$$

Воспользуемся доказанными оценками для $|\Omega^{(j_2)}(z)|$ (лемма 2.2), $|p_{\lambda,k}|$ (лемма 4.7), $|\Phi_\lambda^{(j_4)}(z)|$ (лемма 4.5) и получим оценку

$$S \leq c \sum_{\lambda} |1-z|^{m-j_1} \frac{\omega(|1-z|)}{|1-z|^{j_2}} \cdot \frac{|z-\lambda|^{k-j_3}}{|1-\lambda|^k} \cdot \frac{|1-\lambda|^{r+1} |1-z|^{r+1-j_4}}{|1-\lambda|^{2r+2} + |1-z|^{2r+2}}\,.$$

Перепишем неравенство в более удобном для последующей работы виде:

$$S \le c\,\omega(|1-z|)\sum_{\lambda}|z-\lambda|^{k-j_3}\ \frac{|1-\lambda|^{r+1-k}|1-z|^{r+1-j_4-j_2+m-j_1}}{|1-\lambda|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}}\,.$$

Напомним, что требуется получить оценки производных $f^{(j)}$ для $j=0,1,\ldots,m$, следовательно, $m \ge j$ и $j=j_1+j_2+j_3+j_4$, $j_n \ge 0$, $j_3 \le k \le r$. Применению стандартных оценок (леммы 4.1) мешает присутствие множителя $|z-\lambda|$. Чтобы устранить это препятствие, разобьем сумму на три части. Если z располагается близко от множества Λ, т.е. существует такое λ_*, $\lambda_* \in \Lambda$, что $|z-\lambda_*| \le \varepsilon|1-z|$, то оценим это слагаемое отдельно. Оставшиеся слагаемые разобьем на две части: $\sum_{(1)}$, где сумма распространяется на такие λ, что $|z-\lambda_*| > \varepsilon|1-z|$ и $|1-\lambda| \ge |1-z|$, и сумму $\sum_{(2)}$, где $|z-\lambda_*| > \varepsilon|1-z|$ и $|1-\lambda| < |1-z|$. Условия редкости и некасательности гарантируют возможность такого разбиения для любого z. Заметим, что первая сумма конечна, а вторая бесконечна.

Проведем оценки для каждой из трех частей.

Запишем слагаемое, отвечающее $\lambda=\lambda_*$, и оценим его, учитывая что $|1-z| \asymp |1-\lambda_*|$ и $|z-\lambda_*| < |1-z|$:

$$|z-\lambda_*|^{k-j_3}\ \frac{|1-\lambda_*|^{r+1-k}\ |1-z|^{r+1-j_4-j_2+m-j_1}}{|1-\lambda_*|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}}$$

$$\le c\ |1-z|^{k-j_3}\ \frac{|1-z|^{r+1-k}\ |1-z|^{r+1-j_4-j_2+m-j_1}}{|1-z|^{2r+2}} = c\ |1-z|^{m-j}\,.$$

Оценим первую сумму $\sum_{(1)}$ (здесь из неравенства треугольника следует, что $|z-\lambda| \le |1-\lambda|+|1-z| < 2|1-\lambda|$):

$$\sum\nolimits_{(1)}|z-\lambda|^{k-j_3}\ \frac{|1-\lambda|^{r+1-k}\ |1-z|^{r+1-j_4-j_2+m-j_1}}{|1-\lambda|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}}$$

$$\le c\ \sum\nolimits_{(1)}\frac{|1-\lambda|^{r+1-j_3}\ |1-z|^{r+1-j_4-j_2+m-j_1}}{|1-\lambda|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}}\,.$$

Обозначим показатель при $|1-\lambda|$ через $a=r+1-j_3$, тогда, если бы показатель при $|1-z|$ был равен $b=r+1+j_3$, то по лемме 4.1 сумма была бы конечна. Фактически этот показатель равен $r+1+(m-j_1-j_2-j_4)=b+m-j$, следовательно

$$\sum\nolimits_{(1)} \le c\ |1-z|^{m-j}.$$

Теперь оценим вторую сумму $\sum_{(2)}$ (здесь из неравенства треугольника следует, что $|z-\lambda| \le |1-\lambda| + |1-z| < 2|1-z|$):

$$\sum\nolimits_{(2)} |z-\lambda|^{k-j_3} \; \frac{|1-\lambda|^{r+1-k}\; |1-z|^{r+1-j_4-j_2+m-j_1}}{|1-\lambda|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}}$$

$$\le c \; \sum\nolimits_{(2)} \frac{|1-\lambda|^{r+1-k}\; |1-z|^{r+1+m+k-j}}{|1-\lambda|^{2r+2}+|1-z|^{2r+2}}.$$

Обозначим показатель при $|1-\lambda|$ через $a=r+1-k$, тогда, если бы показатель при $|1-z|$ был равен $b=r+1+k$, то по лемме 4.1 сумма была бы конечна. Фактически этот показатель равен $r+1+m+k-j = b+m-j$, следовательно

$$\sum\nolimits_{(2)} \le c|1-z|^{m-j}\,.$$

Таким образом, доказана оценка

$$|f^{(j)}(z)| \le c|1-z|^{m-j}\omega(|1-z|), \quad j=0,1,\dots,m.$$

Требуемая оценка производной получена. Из нее, как отмечалось выше, следует оценка нормы функции f. Значит, введенный в условии теоремы линейный оператор $\vec{\phi} \mapsto f$ является непрерывным оператором продолжения.

Литература

1. L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions.* — Amer. J. Math. **80**, No. 4 (1958), 921–930.
2. А. М. Коточигов, *Интерполяция аналитическими функциями, гладкими вплоть до границы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **30** (1972), 167–169.
3. В. И. Васюнин, *О числе серий Карлесона.* — Зап. научн. семинаров ЛОМИ, **65** (1976), 178–182.
4. А. М. Коточигов, *Свободная интерполяция в классах функций с s-й производной из класса Харди.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **303** (2003), 169–202.
5. А. М. Коточигов, *Интерполяция в пространствах аналитических функций, определяемых модулем непрерывности.* — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, **41** (1983), 77–90.
6. В. К. Дзядык, *Введение в теорию приближения функций полиномами.* “Наука”, Москва, 1977.
7. П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p.* “Мир”, Москва, 1984.
8. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* “Наука”, Москва, 1966.

Kotochigov A. M. Free multiple interpolation.

Our aim in this article is to construct a bounded linear operator that solves the problem of multiple interpolation (interpolation with derivatives). It is proved that such an operator exists for nontangential and sparse interpolation sets if we consider interpolation by analytic functions satisfying the following condition: $|f^{(m)}(z_1) - f^{(m)}(z_2)| \le \omega(|z_1 - z_2|)$.

Санкт-Петербургский
Электротехнический университет,
ул. проф. Попова, д. 5,
Санкт-Петербург 197376, Россия
E-mail: amkotochigov@gmail.com

Поступило 17 июля 2012 г.