Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 401, 2012 г.

В. М. Каплицкий

О РЕГУЛЯРИЗАТОРАХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Введение

Понятие регуляризатора ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$, где X и Y – некоторые банаховы пространства, важно для исследования многих задач теории линейных операторов. Хорошо известно, что в терминах существования регуляризатора формулируются необходимые и достаточные условия нётеровости и различные теоремы об односторонней обратимости оператора T и свойствах его образа (см. [1–5]). В монографии [3] рассмотрен и более общий случай ограниченных операторов в линейных топологических счётно-нормированных пространствах. В настоящей работе мы вводим в рассмотрение односторонние регуляризаторы и односторонние канонические регуляризаторы неограниченного плотно определённого линейного оператора в банаховом пространстве и рассматриваем некоторые приложения этих понятий к спектральной теории, в частности, к условиям дискретности спектра и к вопросу об асимптотическом распределении собственных значений оператора T, лежащих в некотором секторе комплексной плоскости. В п. 2 показано, что если неограниченный оператор T в гильбертовом пространстве H обладает каноническим компактным самосопряжённым регуляризатором R, то его спектр дискретен и в некотором смысле "прижат" к действительной оси. При некоторых дополнительных условиях асимптотика собственных чисел оператора T определяется асимптотикой характеристических чисел его регуляризатора. Доказательства этих результатов основаны на известной лемме М. В. Келдыша об оценке резольвенты нормального оператора и теоремах А. С. Маркуса и В. И. Мацаева об асимптотическом распределении характеристических чисел полиномиальных операторных пучков ([6–10]). Через $\mathrm{Ker}(T)$ и $\mathrm{Ran}(T)$

Ключевые слова: регуляризатор, канонический регуляризатор, идеал Шаттена–фон Неймана, дискретный спектр.

обозначаются ядро и образ оператора T, через $\mathfrak{S}_p$ ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) – операторный идеал Шаттена–фон Неймана [6]. Определения спектра и корневых векторов линейных операторов и аналитических оператор-функций, оператора с дискретным спектром, функции распределения характеристических чисел аналитической оператор-функции, принадлежащих некоторой области G в комплексной плоскости, см. в [6, 7]. Как известно, неограниченный оператор T будет оператором с дискретным спектром тогда и только тогда, когда его резольвента компактна при некотором λ из резольвентного множества $\rho(T)$ оператора T.

§1. Регуляризаторы неограниченных операторов с плотной областью определения

Пусть X, Y – банаховы пространства, $D(T) \subset X$ – плотное в X линейное многообразие и $T\colon D(T) \to Y$ – неограниченный линейный оператор. Ограниченный линейный оператор $R_1\colon Y \to X$ называется левым регуляризатором оператора T, если $R_1 T x = A_1 x$ при $x \in D(T)$, где A_1 – ограниченный линейный оператор в пространстве X. Ограниченный линейный оператор $R_2\colon Y \to X$, такой, что $\operatorname{Ran}(R_2) \subset D(T)$, называется правым регуляризатором оператора T, если $T R_2 x = A_2 x$ при $x \in Y$, где A_2 – ограниченный линейный оператор в пространстве Y. Пусть $X = Y$. Тогда множество левых регуляризаторов оператора T является собственным левым идеалом в алгебре $L(X)$ всех ограниченных линейных операторов в пространстве X, а множество всех правых регуляризаторов оператора T является собственным правым идеалом в алгебре $L(X)$. Если $X = Y$ и R – двусторонний регуляризатор оператора T, то оператор R будем называть просто регуляризатором. Пусть у оператора T существует левый регуляризатор R_1 такой, что $R_1 T = A_1$, где A_1 – канонический оператор Фредгольма, т.е. $A_1 = I + K_1$, где K_1 – компактный оператор в X. В этом случае будем говорить, что R_1 – канонический левый регуляризатор оператора T. Аналогичным образом вводится определение канонического правого регуляризатора. Двусторонний канонический регуляризатор будем называть каноническим регуляризатором. Как известно, в теории псевдодифференциальных операторов (ПДО) важную роль играет понятие параметрикса псевдодифференциального оператора [11]. Параметрикс псевдодифференциального оператора является каноническим регуляризатором специального вида, поскольку в определении параметрикса требуется, чтобы он принадлежал алгебре псевдодифференциальных операторов. Общее определение регуляризатора необходимо, например, в тех задачах теории дифференциальных уравнений, в которых возникают операторы, не входящие в известные алгебры псевдодифференциальных операторов. Соответствующие этим операторам регуляризаторы также не обязаны быть псевдодифференциальными операторами. В данной работе мы будем рассматривать лишь канонические регуляризаторы неограниченных линейных операторов и их применения к спектральной теории, хотя, по-видимому, в некоторых задачах представляют интерес и неканонические регуляризаторы.

Теорема 1.1. *Пусть $T : D(T) \to X$ – замкнутый неограниченный оператор в банаховом пространстве X и резольвентное множество оператора T непусто. Тогда оператор T имеет дискретный спектр в том и только том случае, когда у оператора T существует компактный канонический регуляризатор.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть T имеет дискретный спектр и $\lambda_0 \in \rho(T)$. Пусть $R = (T-\lambda_0 I)^{-1}$. Тогда $TR = RT = (T-\lambda_0 I+\lambda_0 I)(T-\lambda_0 I)^{-1} = I+\lambda_0(T-\lambda_0 I)^{-1} = I+K_0$, где $K_0 = \lambda_0(T-\lambda_0 I)^{-1}$ – компактный оператор. Таким образом, компактный оператор R – канонический регуляризатор оператора T.

Достаточность. Пусть $\lambda_0 \in \rho(T)$ и $S = T - \lambda_0 I$. Пусть R – канонический компактный регуляризатор оператора T. Тогда существуют компактные операторы K_i $(i = 1, 2)$ такие, что

$$RT = I + K_1\,, \qquad TR = I + K_2\,.$$

Далее, $RS = RT-\lambda_0 R = I+(K_1-\lambda_0 R)$, $SR = TR-\lambda_0 R = I+(K_2-\lambda_0 R)$, т.е. R – регуляризатор и для оператора S:

$$RS = I + L_1\,, \qquad SR = I + L_2\,,$$

где L_i $(i = 1, 2)$ – компактные операторы. Пусть

$$\widetilde{R} = R - \lambda S^{-1} L_2\,,$$

где λ – постоянная, которая будет выбрана далее. Так как $S\colon D(T) \to X$ – замкнутый биективный оператор, то из теоремы о замкнутом графике следует, что оператор $S^{-1}\colon X \to X$ ограничен, а тогда оператор $\widetilde{R}$ компактен. Далее, $S\widetilde{R} = SR - \lambda L_2 = I - (\lambda - 1)L_2 = I - \mu^{-1} L_2$, где

$\mu = \frac{1}{\lambda - 1}$. Выберем число $\mu \neq 0$ так, чтобы оно не принадлежало спектру оператора L_2. Это всегда можно сделать, поскольку оператор L_2 компактен, а значит множество его ненулевых собственных значений не более, чем счётно. С учётом этого получим, что $S\widetilde{R} = I + K$, где оператор K компактен и $\mathrm{Ker}(I+K) = 0$. Из теоремы Фредгольма следует, что в этом случае оператор $I + K$ обратим. Так как $\mathrm{Ker}(S) = 0$ и $S\widetilde{R}(I+K)^{-1} = I$, то оператор S обратим и $S^{-1} = \widetilde{R}(I+K)^{-1}$. Отсюда с учётом компактности оператора $\widetilde{R}$ следует, что оператор $S^{-1} = (T - \lambda_0 I)^{-1}$ компактен. Теорема доказана. $\square$

Замечание. Замкнутый неограниченный оператор может обладать каноническим компактным регуляризатором, однако его спектр может не быть дискретным. Рассмотрим следующий пример. Пусть $X = C[0,1]$, $D(T) = C^1[0,1]$, $(Tx)(t) = x'(t)$, $x \in D(T)$. Оператор T, очевидно, замкнутый и неограниченный. Пусть

$$(Rx)(t) = \int_0^t x(s)ds\,.$$

Тогда $TRx = x, RTx = x + Kx$, где $(Kx)(t) = -x(0)$. Так как K и R – компактные операторы в $C[0,1]$, то оператор R – двусторонний канонический регуляризатор оператора T. Простое вычисление показывает, что $\sigma(T) = \mathbb{C}$ и, соответственно, $\rho(T) = \varnothing$. Таким образом, если неограниченный замкнутый оператор T обладает компактным каноническим регуляризатором, то имеет место альтернатива: либо $\sigma(T) = \mathbb{C}$, либо T – оператор с дискретным спектром.

§2. Спектральные свойства операторов, обладающих компактным каноническим самосопряженным регуляризатором

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Для исследования спектральных свойств неограниченного оператора T, обладающего каноническим компактным самосопряженным регуляризатором, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть $K\colon H \to H$ – компактный самосопряженный оператор в H и L – произвольное плотное в H линейное многообразие. Тогда, если оператор K имеет конечномерное ядро и* $\dim \mathrm{Ker}(K) =$

N, то существует ортонормированный набор векторов $\{f_i\}_{i=1}^N$, $f_i \in L$, такой, что оператор

$$\widetilde{K} = K + \sum_{i=1}^{N} (f_i, \cdot) f_i$$

имеет нулевое ядро: $\mathrm{Ker}(\widetilde{K}) = \{0\}$.

Доказательство см. в [12]. Отметим, что в [12] это утверждение, а точнее несколько более сильное утверждение, сформулировано в предположении, что $H = L_2(Q)$, $L = C_0^\infty(Q)$, где Q – область в $\mathbb{R}^n$, однако данное в [12] доказательство без всяких изменений переносится на рассматриваемый случай.

Теорема 2.1. *Пусть T – замкнутый неограниченный оператор в гильбертовом пространстве H. Если оператор T обладает каноническим компактным самосопряженным регуляризатором R, то спектр оператора T дискретен. Если $R \in \mathfrak{S}_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то система корневых векторов оператора T полна в H. При этом для любого $\varepsilon > 0$ все собственные числа оператора T, за исключением, быть может, конечного числа, лежат в объединении секторов Ω_k^ε, где*

$$\Omega_k^\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \pi k - \varepsilon < \arg\lambda < \pi k + \varepsilon\} \quad (k = 0, 1). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть R – компактный самосопряженный регуляризатор оператора T и

$$RT = I + K_1\,, \qquad TR = I + K_2\,,$$

где K_i – компактные операторы в H. Так как $\mathrm{Ker}(R) \subset \mathrm{Ker}(I+K_2)$, а, ввиду компактности оператора K_2, оператор $I+K_2$ имеет конечномерное ядро, то и ядро оператора R конечномерно. Пусть $\dim \mathrm{Ker}(R) = N$. По лемме 2.1 существует ортономированный набор векторов $\{f_i\}_{i=1}^N$, $f_i \in D(T)$, такой, что оператор

$$R' = R + \sum_{i=1}^{N} (f_i, \cdot) f_i$$

имеет нулевое ядро. Так как $TR' = TR + \sum_{i=1}^N (f_i, \cdot) T f_i = I + K_2 + K_N$, где K_N – конечномерный, а значит, компактный оператор, то R' – правый канонический регуляризатор оператора T. Оператор R', очевидно, компактный и самосопряженный. По лемме 2.1 существует ортонормированный набор векторов $\{g_i\}_{i=1}^N$, $g_i \in D(T^*)$, такой, что оператор

$$R'' = R + \sum_{i=1}^{N} (g_i, \cdot\,) g_i$$

имеет нулевое ядро. Пусть $x \in D(T)$. Тогда

$$R''Tx = RTx + \sum_{i=1}^{N} (g_i, Tx) g_i = RTx + \sum_{i=1}^{N} (T^* g_i, x) g_i\,.$$

Отсюда с учётом того, что $RTx = x + K_1 x$, получаем, что R'' – левый канонический регуляризатор оператора T. При этом R'' – компактный самосопряженный оператор. Таким образом, существуют такие компактные самосопряженные операторы R', R'', что $\operatorname{Ker}(R') = \operatorname{Ker}(R'') = \{0\}$ и

$$TR' = I + K'\,, \qquad R''T = I + K''\,,$$

где K', K'' – компактные операторы в H. Далее, $(T - \lambda I)R' = I + K' - \lambda R'$, $R''(T - \lambda I) = I + K'' - \lambda R''$. Покажем, что спектр аналитических оператор-функций $S_1(\lambda) = I + K' - \lambda R'$ и $S_2(\lambda) = I + K'' - \lambda R''$ не содержит точек λ таких, что $|\lambda| > R_0$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$, где R_0 достаточно велико. Представим $S_1(\lambda)$ в виде:

$$S_1(\lambda) = (I + K'(I - \lambda R')^{-1})(I - \lambda R').$$

Оператор $I - \lambda R'$ обратим при всех невещественных λ, поскольку оператор R' самосопряжен. Так как $\operatorname{Ker}(R') = \{0\}$ и оператор K' компактен, то, по лемме М. В. Келдыша (см. [6], гл. 5), имеет место предельное соотношение:

$$\lim_{\lambda \to \infty, \lambda \in \Omega_\varepsilon} \|K'(I - \lambda R')^{-1}\| = 0\,,$$

где $\Omega_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \varepsilon < |\arg\lambda| < \pi - \varepsilon\}$. Выбирая λ в виде $\lambda = i\mu$, где $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| > R_0$ и R_0 достаточно велико, получим при таких λ

$$\|K'(I - \lambda R')^{-1}\| < 1\,,$$

а тогда оператор $I + K'(I - \lambda R')^{-1}$ обратим. Таким образом, оператор $S_1(\lambda)$ обратим при всех $|\lambda| > R_0$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$. То же самое справедливо и для оператора $S_2(\lambda)$. Фиксируем невещественное λ_0 так, чтобы операторы $S_i(\lambda_0)$ были обратимы. Тогда из условия $R''(T - \lambda_0 I) = S_2(\lambda_0)$ следует, что $\operatorname{Ker}(T - \lambda_0 I) = \{0\}$, а из условия $(T - \lambda_0 I)R' = S_1(\lambda_0)$

следует, что $\operatorname{Ran}(T-\lambda_0 I)=H$. В этом случае оператор $T-\lambda_0 I$ обратим, причём оператор $(T-\lambda_0 I)^{-1}=R'S_1^{-1}(\lambda_0)$ компактен как произведение компактного оператора на ограниченный. Таким образом, спектр оператора T дискретен. Как было показано выше, существует компактный самосопряженный оператор R' с нулевым ядром такой, что $\operatorname{Ran}(R')\subset D(T)$ и $TR'=I+K'$, где K' – компактный оператор. Если вектор x_0 ортогонален пространству $\operatorname{Ran}(R')$, то $(x_0,R'y)=(R'x_0,y)=0$ для любого $y\in H$, откуда следует, что $R'x_0=0$, а значит, $x_0=0$ и многообразие $V=\operatorname{Ran}(R')$ плотно в H. Пусть $L=(R')^{-1}$, $D(L)=V$. Тогда $D(L)\subset D(T)$. Из равенства $TR'=I+K'$ следует, что $Tx=Lx+L_1x$ при $x\in D(L)$, где $L_1x=K'Lx$ при $x\in D(L)$. Пусть $T_1=T|_{D(L)}$ – сужение оператора T на $D(L)$. Тогда $T_1=L+L_1$, где L – обратимый самосопряженный оператор с дискретным спектром, $D(L)\subset D(L_1)$, оператор L_1 является относительно компактным возмущением оператора L и $L^{-1}L_1L^{-1}=R'K'$. Если $R\in\mathfrak{S}_p$, то и $R'\in\mathfrak{S}_p$ $(1\leqslant p<\infty)$, а тогда $R'K'\in\mathfrak{S}_p$ $(1\leqslant p<\infty)$. По теореме 10.1 монографии [6] (см. [6], гл. 5, п. 10) в этом случае система корневых векторов оператора T_1 полна в H, а поскольку оператор T является расширением оператора T_1, система корневых векторов оператора T тоже полна в H. Покажем, что собственные числа оператора T, за исключением, быть может, конечного числа, лежат в секторах (1). Если λ_0 – собственное значение оператора T, то $R''(T-\lambda_0 I)x_0=0$ при некотором $x_0\in D(T)$, $x_0\neq 0$. Таким образом, $S_2(\lambda_0)x_0=0$. Из леммы Келдыша следует, что оператор $S_2(\lambda)$ обратим при всех $|\lambda|>R_0$, не лежащих в секторах Ω_k^ε $(k=0,1)$. Таким образом, либо $\lambda_0\in B_{R_0}(0)$, либо $\lambda\in\Omega_0^\varepsilon\cup\Omega_1^\varepsilon$. Теорема доказана. □

Фиксируем какое-либо число $\varepsilon_0>0$ и рассмотрим секторы $\Omega^\pm$, где

$$\Omega^+=\{\lambda\in\mathbb{C}\colon -\varepsilon_0<\arg\lambda<\varepsilon_0\},\quad \Omega^-=\{\lambda\in\mathbb{C}\colon \pi-\varepsilon_0<\arg\lambda<\pi+\varepsilon_0\}.$$

Через $N^\pm(r;T)$ обозначим число собственных значений $\lambda_j(T)$ оператора T (с учётом алгебраической кратности), лежащих в $\Omega^\pm$ и таких, что $|\lambda_j(T)|\leqslant r$. Через $\widetilde{N}^\pm(r;R)$ обозначим количество характеристических чисел $\mu_j(R)$ оператора R (с учётом алгебраической кратности), лежащих на отрезках $[0,r]$ и $[-r,0]$, соответственно.

Теорема 2.2. *Пусть замкнутый неограниченный оператор T обладает каноническим самосопряженным регуляризатором R, причем*

$R \in \mathfrak{S}_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$. *Пусть*

$$\lim_{\substack{r\to+\infty,\\ \varepsilon\to+0}} \frac{\widetilde{N}^+((1+\varepsilon)r;R)}{\widetilde{N}^+(r;R)} = 1. \tag{2}$$

Тогда $N^+(r;T) \sim \widetilde{N}^+(r;R)$ *при* $r \to +\infty$.

Доказательство. По предыдущей теореме спектр оператора T дискретен. Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. Как было показано выше, можно построить новый левый канонический регуляризатор $R' = R + T_N$, где T_N – конечномерный самосопряженный оператор такой, что $\mathrm{Ker}(R') = \{0\}$. Добавление конечномерного слагаемого не влияет на асимптотику функции распределения характеристических чисел, а функция $\widetilde{N}^+(r;R')$ также будет удовлетворять условию (2). Поэтому можно с самого начала предпологать, что $\mathrm{Ker}(R) = \{0\}$. Пусть $Tx - \lambda x = 0$. Тогда $(RT - \lambda R)x = (I - K - \lambda R)x = 0$, где K – компактный оператор. Пусть $S(\lambda) = I - K - \lambda R$. Операторный пучок $S(\lambda)$ допускает факторизацию:

$$S(\lambda) = B(I - \lambda T^{-1}),$$

где $Bx = RTx$ при $x \in D(T)$. Заметим, что оператор B ограничен на $D(T)$, а значит его можно продолжить до ограниченного оператора на всём H. Этот оператор также будем обозначать через B. Покажем, что $\mathrm{Ker}(B) = \{0\}$. Пусть $x_0 \in \mathrm{Ker}(B)$. Так как оператор $T\colon D(T) \to H$ обратим, то существует вектор $y_0 \in D(T)$ такой, что $x_0 = T^{-1}y_0$. Поэтому $Bx_0 = BT^{-1}y_0 = 0$. Так как $BT^{-1} = R$, то $Ry_0 = 0$, а значит $y_0 = 0$ и $x_0 = 0$, т.е. $\mathrm{Ker}(B) = \{0\}$. Поскольку $\mathrm{Ker}(B) = \{0\}$, корневые векторы пучка $S(\lambda)$ совпадают с корневыми векторами пучка $S_1(\lambda) = I - \lambda T^{-1}$, а значит, и с корневыми векторами оператора T. Отсюда следует, что оператор T и операторный пучок $S(\lambda)$ имеют общий спектр и общие корневые векторы. При выполнении условия (2) функция распределения характеристических чисел пучка $S(\lambda)$, лежащих в Ω^+, эквивалентна соотвествующей функции распределения для "невозмущенного" пучка $S_0(\lambda) = I - \lambda R$ (см. [7, 8]), которая, очевидно, равна функции распределения неотрицательных характеристических чисел оператора R. Таким образом, $N^+(r;T) \sim \widetilde{N}^+(r;R)$ при $r \to +\infty$. Теорема доказана. □

Замечание. Из результатов работ [7, 8] следует, что при выполнении условий теоремы при каждом $\varepsilon > 0$ будет справедлива асимптотическая формула:

$$N^+(r;T) = \widetilde{N}^+(r;R) + O(\widetilde{N}^+((1+\varepsilon)r;R) - \widetilde{N}^+((1-\varepsilon)r;R)) \qquad (3)$$

при $r \to +\infty$. В некоторых случаях формула (3) позволяет дать оценку остатка, а не только главный член асимптотики.

Утверджение, аналогичное утверждению теоремы 2.2, справедливо и для функции $N^-(r;T)$. Полученные в работе результаты могут быть использованы для нахождения асимптотики функций $N^{\pm}(r;T)$ в случае неполуограниченных дифференциальных операторов на гладком многообразии в тех случаях, когда применение известных методов, хорошо приспособленных к случаю полуограниченных эллиптических операторов с гладкими коэффицентами, затруднительно. Такие задачи представляют интерес для математической физики (см. [14]). Основную трудность при использовании теоремы 2.2 представляет эффективное построение регуляризатора. Если регуляризатор построен, то вычисление главного члена асимптотики функций распределения его собственных значений может быть сделано с помощью результатов работ [15, 16].

Литература

1. С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.* М., Физматгиз, 1962.
2. С. С. Кутателадзе, *Основы функционального анализа.* Новосибирск, Изд-во института математики, 2000.
3. З. Прёсдорф, *Некоторые классы сингулярных интегральных уравнений.* М., Мир, 1973.
4. В. А. Солонников, *Об операторах, допускающих регуляризацию.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **21** (1971), 159–163.
5. О. И. Панич, В. А. Солонников, *К вопросу об эквивалентном правом регуляризаторе.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **22** (1971), 192–195.
6. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М., Наука, 1965.
7. А. С. Маркус, В. И. Мацаев, *Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М. В. Келдыша.* — Мат. сб., 123(165):53 (1984), 391–406.
8. А. С. Маркус, В. И. Мацаев, *Об асимптотике спектра операторов, близких к нормальным.* — Функ. анализ и его прилож., 13:3 (1979), 93–94.
9. А. С. Маркус, В. И. Мацаев, *Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики.* — Труды ММО, **45** (1982), 133–181.

10. Г. В. Радзиевский, *Асимптотика распределения характеристических чисел оператор-функций, аналитических в угле.* — Мат. сб. 112(154):3(7) (1980), 396–420.
11. Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 3., *Псевдодифференциальные операторы.* М., Мир, 1987.
12. В. М. Каплицкий, *Об асимптотическом распределении собственных значений самосопряженного гиперболического дифференциального оператора второго порядка на двумерном торе.* — Сиб. матем. журнал, **51**, No. 5 (2010), 1041–1060.
13. Г. В. Розенблюм, М. З. Соломяк, М. А. Шубин, *Спектральная теория дифференциальных операторов*, М., ВИНИТИ, 1989, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т.64.
14. V. V. Kozlov, I. V. Volovich, *Finite action Klein-Gordon solutions on Loretzian manifolds.* — Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., **3**, No. 7 (2006), 1349–1357.
15. А. С. Андреев, *Асимптотика спектра компактных псевдодифференциальных операторов на евклидовом множестве.* — Мат. сб., 1988, т.137(179), No. 2(10), 202–223.
16. А. С. Андреев, *Оценки спектра компактных псевдодифференциальных операторов в неограниченных областях.* — Мат. сб., 181:7 (1990), 995–1006.

Kaplitskii V. M. On regulariziers of unbounded linear operators in Banach spaces.

Regulariziers of densely defined unbounded linear operators in Banach spaces and their applications to spectral theory are considered. Necessary and sufficient conditions in terms of regularizier properties for an unbounded operator T to be discrete are obtained. In the case when T has a selfadjoint regularizier in some Schatten–von Neumann ideals, asymptotic properties of the eigenvalues are investigated, namely, it is shown that the eigenvalues of T asymptotically belong to a some angle in the complex plane.

Южный федеральный университет,
ул.Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону 344090.
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса 22, Владикавказ 362027, Россия
E-mail: kaplitsky@donpac.ru

Поступило 16 июля 2012 г.