Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 401, 2012 г.

П. Иванишвили

J-ЗАМКНУТОСТЬ КОНЕЧНЫХ НАБОРОВ ПРОСТРАНСТВ ТИПА ХАРДИ

Введение

Пусть $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ – допустимый набор квазибанаховых пространств. Напоминаем, что это означает, что все пространства X_j вложены в одно и то же линейное топологическое пространство. Пусть для каждого j, $j = 0, \ldots, n$, в X_j выделено замкнутое подпространство Y_j.

Определение 1. Набор $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ называется K-замкнутым в $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, если для любого вектора $y \in Y_0 + \cdots + Y_n$ и любого его представления $y = x_0 + \cdots + x_n$, $x_j \in X_j$, найдется другое представление $y = y_0 + \cdots + y_n$ такое, что $y_j \in Y_j$ и $\|y_j\|_{Y_j} \leq C\|x_j\|_{X_j}$, $j = 0, \ldots, n$, где C не зависит от рассматриваемых векторов.

Определение 2. Набор $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ называется J-замкнутым в $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, если для любого вектора $x \in \bigcap_{j=0}^{n} X_j$ и любых положительных чисел $c_j > \operatorname{dist}_{X_j}(x, Y_j)$ найдется вектор $y \in \bigcap_{j=0}^{n} Y_j$ такой, что $\|x - y\|_{X_j} < Cc_j$, $j = 0, \ldots, n$, где C не зависит от участвующих векторов.

В последние 25 лет феномен K-замкнутости изучался довольно подробно, в частности, было показано, что он встречается во многих классических ситуациях. Один из главных примеров K-замкнутости относится к подпространствам типа Харди в банаховых решетках. Если X – квазинормированная решетка измеримых функций на окружности, подчиненная некому условию невырожденности (условие $(*)$

Ключевые слова: пространства типа Харди, K-замкнутость, J-замкнутость.
Работа выполнена при поддержке лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ дог. 11.Г34.31.0026.

в [1, 2] или свойство B ниже), то можно корректно ввести "аналитическое пространство" X_A в X, положив $X_A = X \cap N_+$, где N_+ – (граничный) класс Смирнова (см. [3]). Такие пространства часто называют пространствами типа Харди, поскольку в случае, когда $X = L^p$, X_A оказывается классическим пространством Харди H^p. Нам понадобится еще определение BMO-регулярной банаховой решетки. См. примеры в [2], демонстрирующие, что классических решеток измеримых функций на окружности BMO-регулярны.

Определение 3. Квазибанахова решетка X измеримых функций на окружности называется BMO-регулярной, если для всякой функции $f \in X$, $f \neq 0$, найдется такая функция $g \in X$, что $g \geq |f|$ и $\|g\|_X \leq m\|f\|_X$, $\|\log g\|_{\mathrm{BMO}} \leq C$ (m и C не зависят от f). Такая функция g называется BMO-мажорантой для f.

Будем говорить, что решетка X обладает свойством B, если для любой функции $f \in X$ с условием $f \neq 0$ существует функция $g \in X$, $g \geq |f|$, такая что $\|g\| \leq c\|f\|$ и $\log g \in L^1(\mathbb{T})$. Ясно, что BMO-регулярная решетка обладает свойством B.

В [4] было доказано, что если $(X^0, \ldots, X^n)$ – конечный набор BMO-регулярных решеток измеримых функций на окружности, то набор пространств типа Харди $(X_A^0, \ldots, X_A^n)$ непременно K-замкнут в нем.

В случае пар пространств, понятия K-замкнутости и J-замкнутости эквивалентны в самой общей ситуации. Доказательство фактически состоит в эквивалентности равенств $a + b = u + v$ и $a - u = v - b$. В [5], впрочем, это соображение называется "основной леммой теории интерполяции", поскольку из него выводится эквивалентность интерполяционных методов "K" и "J" для пар пространств. Буквы K и J в определении K-замкнутости и J-замкнутости возникли в связи с упомянутыми методами, однако нас не будет это особенно интересовать, поскольку эти понятия имеют непосредственно очевидный геометрический смысл.

Для наборов из n пространств при $n > 2$ понятия K- и J-замкнутости, скорее всего, уже не эквивалентны. Можно, однако, спросить, будет ли J-замкнутым набор $(X_A^0, \ldots, X_A^n)$, если решетки $X^0, \ldots, X^n$ измеримых функций на окружности BMO-регулярны. Автору известно, что этим вопросом интересовался Н. Я. Кругляк.

В настоящей заметке дается положительный ответ на этот вопрос. Выясняется, что ситуация довольно проста, если правильно использовать информацию о K-замкнутости пространств типа Харди. Мы приведем три разных доказательства этого утверждения – в трех разделах ниже, в каждом из которых содержится дополнительная информация.

§1. Связь J-замкнутости и K-замкнутости

В случае набора из более чем двух пространств такая связь все равно существует, несмотря на неприменимость "основной леммы из теории интерполяции". Пусть $c_j > 0$, $j = 0, \dots, n$. Наряду с исходными нормами, рассмотрим в пространствах X_j еще и нормы $c_j^{-1}\|\cdot\|_{X_j}$. Таким образом, и пересечение $\bigcap\limits_{j=0}^{n} X_j$ наделяется нормой, соответствующей константам $c_0, \dots, c_n$: $|||x||| = \max\limits_{0\le j\le n} c_j^{-1}\|x\|_{X_j}$. Такие нормировки пространств X_j и производных от них (например, пересечения) будем называть стандартными.

Лемма 1. *Пусть $(X_0, \dots, X_n)$ – допустимый набор квазибанаховых пространств и Y_j – замкнутые подпространства пространств X_j при $j = 0, \dots, n$. Следующие условия эквивалентны.*

(i) *Для любой стандартной нормировки пространств X_j, пара $\Big(\bigcap\limits_{j\in e_1} Y_j, \bigcap\limits_{j\in e_2} Y_j\Big)$ K-замкнута в паре $\Big(\bigcap\limits_{j\in e_1} X_j, \bigcap\limits_{j\in e_2} X_j\Big)$ для всех непустых множеств $e_1, e_2 \subset \{0, 1, \dots, n\}$, $e_1 \cup e_2 = \{0, 1, \dots, n\}$, при этом константы в определении K-замкнутости не зависят от нормировки.*

(ii) *Набор $(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ J-замкнут в наборе $(X_0, X_1, \dots, X_n)$.*

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii). Утверждение доказывается индукцией по n. Как уже отмечалось, при $n = 2$ оно известно и очень просто. Пусть оно доказано для $n-1$ и пусть $x \in \bigcap\limits_{j=0}^{n} X_j$ и $\operatorname{dist}_{X_j}(x, Y_j) < c_j$, $j = 0, \dots, n$. По индукционному предположению, найдется такой вектор $y \in \bigcap\limits_{j=0}^{n-1} Y_j$, что $\operatorname{dist}_{X_j}(x, y) < Cc_j$, $j = 0, \dots, n-1$. Это означает, что если ввести в пересечении $X = \bigcap\limits_{j=0}^{n-1} X_j$ стандартную норму, соответствующую постоянным $c_0, \dots, c_{n-1}$, и положить $Y = \bigcap\limits_{j=0}^{n-1} Y_j$, то

$\mathrm{dist}_X(x, Y) < C$ (и, разумеется, $\mathrm{dist}_{X_n}(x, Y_n) < c_n$). Но пара (Y, Y_n) K-замкнута в паре (X, X_n) по условию. Следовательно, она J-замкнута, откуда вытекает требуемое.

(ii)$\Rightarrow$(i). Поскольку для пар K-замкнутость и J-замкнутость эквивалентны, нам достаточно доказать, что для любой стандартной нормировки пара $\Big(\bigcap\limits_{j\in e_1} Y_j, \bigcap\limits_{j\in e_2} Y_j\Big)$ J-замкнута в паре $\Big(\bigcap\limits_{j\in e_1} X_j, \bigcap\limits_{j\in e_2} X_j\Big)$ для всех непустых $e_1, e_2 \subset \{0, 1, \ldots, n\}$, $e_1 \cup e_2 = \{0, 1, \ldots, n\}$. Пусть выбрана стандартная нормировка, соответствующая постоянным c_0, $\ldots, c_n$. Пусть

$$f \in \Big(\bigcap_{j\in e_1} X_j\Big) \cap \Big(\bigcap_{j\in e_2} X_j\Big) = \bigcap_{j=0}^{n} X_j.$$

Тогда, по предположению, существует элемент $y \in \bigcap\limits_{j=0}^{n} Y_j$ такой, что $\|f - y\|_{X_j} \le C\,\mathrm{dist}_{X_j}(f, Y_j)$. Стало быть,

$$\begin{aligned}
\|f-y\|_{\cap_{j\in e_i} X_j} &= \max_{j\in e_i}\left\{\frac{\|f-y\|_{X_j}}{c_j}\right\} \le C\max_{j\in e_i}\left\{\frac{\inf\limits_{y\in Y_j}\|f-y\|_{X_j}}{c_j}\right\} \\
&\le C\max_{j\in e_i}\left\{\frac{\inf\limits_{y\in\cap_{j\in e_i} Y_j}\|f-y\|_{X_j}}{c_j}\right\} \\
&\le C\inf_{y\in\cap_{j\in e_i} Y_j}\max_{j\in e_i}\left\{\frac{\|f-y\|_{X_j}}{c_j}\right\} \\
&= C\mathrm{dist}_{\cap_{j\in e_i} X_j}(f, \cap_{j\in e_i} Y_j), \quad \text{где} \quad i = 0, 1.
\end{aligned}$$

□

Теперь мы можем легко получить первое доказательство основного результата этой заметки.

Теорема 1. *Пусть $X^0, \ldots, X^n$ – BMO-регулярные квазибанаховы решетки измеримых функций на окружности. Тогда набор их аналитических подпространств $X_A^0, \ldots, X_A^n$ J-замкнут в $X^0, \ldots, X^n$.*

Доказательство. При умножении нормы в решетке на положительную постоянную BMO-регулярность сохраняется с теми же константами в оценках (напомним, что в BMO все постоянные функции имеют нулевую норму). Далее, хорошо известно и легко проверяется, что поточечный максимум двух функций из BMO лежит в BMO с надлежащим контролем нормы. Отсюда следует, что для любого множества $e \subset \{0, 1, \dots, n\}$ решетка $\bigcap_{j \in e} X_j$ BMO-регулярна в любой стандартной нормировке с константами, от этой нормировки не зависящими. Известно, что пара (X_A, Y_A) K-замкнута в (X, Y) для любой пары BMO-регулярных решеток X и Y (см. [2, 6, 7]), причем постоянная из определения K-замкнутости зависит только от постоянных в свойстве BMO-регулярности для X и Y. Остается сослаться на лемму 1. $\square$

§2. Частичные ретракции

В этом разделе мы приведем другой абстрактный результат, который позволит доказать теорему 1 иным способом. Пусть $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ – допустимый набор банаховых пространств. Пусть Y_j – замкнутые подпространства в X_j $(j = 0, \dots, n)$.

Определение 4. Набор $(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ является частичным ретрактом набора $(X_0, X_1, \dots, X_n)$, если для любого элемента $f \in \sum_{j=0}^{n} Y_j$ существует линейный оператор $T : X_j \to Y_j$, такой что $Tf = f$ и $\|T\|_{X_j \to Y_j} \le c$ для любого $j = 0, \dots, n$, при этом c не зависит от f.

Лемма 2. *Пусть $(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ – частичный ретракт в $(X_0, X_1, \dots, X_n)$. Если элементы $f_1, f_2, \dots, f_k$ лежат в $Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n$, то существует оператор $S : X_i \to Y_i$, такой что $Sf_j = f_j$ и $\|S\|_{X_i \to Y_i} \le C$ для всех $j = 1, \dots, k$, $i = 0, \dots, n$, где C не зависит от $f_1, f_2, \dots, f_k$ при фиксированном k.*

Доказательство. Пусть оператор T_1 (такой как в определении частичных ретрактов) фиксирует элемент f_1. Тогда $(I - T_1)f_1 = 0$, где I – тождественный оператор. Ясно, что $(I - T_1)f_2 \in \sum_{j=0}^{n} Y_j$. Пусть оператор T_2 (тоже такой, как в определении частичных ретрактов) фиксирует элемент $(I - T_1)f_2$, тогда $(I - T_2)(I - T_1)f_2 = 0$ и $(I - T_2)(I - T_1)f_1 = 0$. Продолжая эту процедуру, мы построим операторы $T_1, T_2, \dots, T_k$ такие, что T_j отображает X_i в Y_i и $\|T_j\|_{X_i \to Y_i} \le C$ для всех $j = 1, \dots, k$, $i = 0, \dots, n$, кроме того

$$\prod_{j=1}^{k} (I - T_j) f_i = 0 \quad \text{для всех} \quad i = 1, \dots, k.$$

Раскрывая скобки, получим $\prod_{j=1}^{k}(I - T_j) = I - S$. Ясно, что $Sf_j = f_j$ и $\|S\|_{X_i \to Y_i} \le C_1$ для всех $j = 1, \dots, k$, $i = 0, \dots, n$. □

Следствие 1. *Если набор* $(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ *является частичным ретрактом набора* $(X_0, X_1, \dots, X_n)$, *то набор* $(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ K*-замкнут и* J*-замкнут в наборе* $(X_0, X_1, \dots, X_n)$.

Доказательство. K-замкнутость проверяется совсем легко, поэтому мы докажем только J-замкнутость. Пусть $x \in \bigcap_{j=0}^{n} X_j$ и $c_j > \operatorname{dist}(x, Y_j)$, $j = 0, \dots, n$. Тогда существуют $y_j \in Y_j$ такие, что $\|x - y_j\|_{X_j} < c_j$ для всех $j = 0, \dots, n$. Найдем оператор S как в лемме 2, чтобы он фиксировал все элементы y_j, а тогда формула $Sx = y_j + S(x - y_j)$ показывает, что Sx содержится в пересечении пространств Y_j, $j = 0, \dots, n$. Стало быть,

$$\|x - Sx\|_{X_i} \le \|x - y_i\|_{X_i} + \|S(x - y_i)\|_{X_i} \le Cc_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

где C зависит от n. □

Возвращаемся к теореме 1. Для ее второго доказательства нам понадобятся весовые пространства Харди. Почти всюду неотрицательную измеримую на $\mathbb{T}$ функцию w такую, что функция $\log w$ суммируема на единичной окружности, будем называть *весом*. Положим

$$L^p(w) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \,:\, \|f\|_{p,w} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int |f|^p w dm \right)^{1/p} < \infty \right\} \quad \text{для} \quad 0 < p < \infty.$$

Для $p = \infty$ определим

$$L^\infty(w) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \,:\, \|f\|_{\infty,w} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{\zeta \in \mathbb{T}} |f| w^{-1} < \infty \right\}.$$

Весовое пространство Харди $H^p(w)$ определяется формулой $H^p(w) = W^{-1/p} H^p$ при $p < \infty$ и $H^\infty(w) = W H^\infty$, где W – "внешняя" аналитическая функция такая, что $|W| = w$, а именно, $W = \exp(\log w + iH \log w)$, где H – оператор гармонического сопряжения.

В работе [7] была доказана следующая теорема.

Теорема A. *Если* $\log(w_i / w_j) \in \mathrm{BMO}$ *для всех* $i, j = 0, \dots, n$, *то при всех* $1 \le p \le \infty$ *набор* $(H^p(w_0), H^p(w_1), \dots, H^p(w_n))$ *является частичным ретрактом для* $(L^p(w_0), L^p(w_1), \dots, L^p(w_n))$.

Отсюда снова можно вывести теорему 1. А именно, пусть $x \in \bigcap_{j=0}^{n} X^j$ и пусть $\mathrm{dist}_{X^j}(x, X_A^j) < c_j$. Тогда существуют функции $y_j \in X_A^j$ такие, что $\|x - y_j\|_{X^j} \le c_j$ для всех $j = 0, \ldots, n$. Пусть w_j – соответствующие BMO-мажоранты для $x - y_j$. Отметим, что, слегка увеличив функции w_j и не меняя существенно остальных свойств, можно добиться того, чтобы $x \in L^\infty(w_j)$, $j = 0, \ldots, n$. Действительно, достаточно взять любую BMO-мажоранту w для x в $\bigcap_{j=0}^{n} X^j$ и заменить функции w_j функциями $\max(\varepsilon w, w_j)$, где ε – достаточно малое положительное число. Тогда и $y_j \in H^\infty(w_j)$, при этом $\|x - y_j\|_{L^\infty(w_j)} \le 1$. Применив теорему A и следствие 1, убеждаемся в том, что найдется функция $y \in \bigcap_{j=0}^{n} H^\infty(w_j)$ такая, что $\|x - y\|_{L^\infty(w_j)} \le c$, $j = 0, \ldots, n$, где $c > 1$. Тогда $\|x - y\|_{X_j} \le \|x - y\|_{L^\infty(w_j)} \|w_j\|_{X_j} \le C' c_j$.

§3. Двойственность

Предположим, что $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ – допустимый набор банаховых пространств и $\bigcap_{j=0}^{n} X_j$ плотно в каждом пространстве X_j при $j = 0, \ldots, n$. Тогда пространства X_j^* вложены в $\left(\bigcap_{j=0}^{n} X_j\right)^*$, следовательно, набор $(X_0^*, X_1^*, \ldots, X_n^*)$ является допустимым. Хорошо известно и легко проверяется, что $(\bigcap_{j=0}^{n} X_j)^* = \sum_{j=0}^{n} X_j^*$. Пусть Y_j – замкнутые подпространства пространств X_j, $j = 0, \ldots, n$. Рассмотрим аннуляторы

$$Y_j^\perp \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{F \in X_j^* \,:\, F(y) = 0 \text{ для всех } y \in Y_j\right\}, \quad j = 0, \ldots, n.$$

Как и в случае пары пространств, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *При сделанных предположениях, следующие условия равносильны.*

(i) *Набор* $(Y_0^\perp, Y_1^\perp, \ldots, Y_n^\perp)$ K*-замкнут в* $(X_0^*, X_1^*, \ldots, X_n^*)$.

(ii) *Набор* $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ J*-замкнут в* $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

Доказательство легко получается при помощи теорем отделимости, мы опустим его. Имеется, однако, менее простой вариант этого утверждения для подпространств аналитических функций в решетках.

Напоминаем, что банахова решетка X измеримых функций на окружности обладает свойством Фату, если выполнено следующее условие:

$$\text{если} \quad g_n \in X, \ g_n(\tau) \to g(\tau) \ \text{ п.в. и } \ \|g_n\|_X \le 1, \ \text{ то } \ g \in X \ \text{ и } \|g\|_X \le 1.$$

Далее, обозначим символом X' порядковое сопряженное с пространством X: $X' = \{g : \int |fg| < \infty, f \in X\}$. Тогда X' будет решеткой измеримых функций, норма в которой задается следующим образом: $\|g\|_{X'} = \sup\{\int |fg| \ : \ \|f\|_X \le 1\}$. Пространство X' всегда обладает свойством Фату. Кроме того, свойство Фату в X эквивалентно равенству $X = X''$ (см. [8]).

Лемма 4. *Пусть банаховы решетки* $X^0, \dots, X^n$ *измеримых функций на окружности обладают свойством Фату и свойством* B. *Следующие условия равносильны.*

(i) *Набор* $(X^0_A, \dots, X^n_A)$ J*-замкнут в наборе* $(X^0, \dots, X^n)$.

(ii) *Набор* $((X^0)'_A, \dots, (X^n)'_A)$ K*-замкнут в наборе* $((X^0)', \dots, (X^n)')$.

Чтобы связать эту формулировку с леммой 3, отметим, что $(X_A)^\perp \cap X' = z(X')_A$ для любой решетки X измеримых функций, обладающей свойством Фату и свойством B. Таким образом, с точностью до умножения на z, мы имеем дело с аналогом леммы 3, только на этот раз аннуляторы берутся в порядково-сопряженных пространствах.

Доказательство. Проверим сначала, что (ii)$\Rightarrow$(i). Пусть $f \in \bigcap_{j=0}^{n} X^j$ и пусть $c_j > \mathrm{dist}_{X^j}(f, X^j_A)$. Введем на пространствах X^j стандартные нормы $\|\cdot\|_{X^j} c_j^{-1}$ и будем считать, что все пространства, производные от X^j (например, $\cap_j X^j$ или $(X^j)'$) нормированы в соответствии с такой нормировкой пространств X^j. Тогда нам нужно доказать, что величина $b = \mathrm{dist}_{\cap X^j}\left(f, \cap X^j_A\right)$ ограничена сверху константой, не зависящей от f и c_j. Обозначим $\cap_j X^j$ через X, тогда $X_A = \cap_j X^j_A$. Заметим, что $X' = X'_0 + \dots + X'_n$ (это следует из очевидного равенства $(X'_0 + \dots + X'_n)' = X$ и того обстоятельства, что сумма пространств со свойством Фату тоже обладает свойством Фату, см. рассуждение перед леммой 3 в [8]).

Рассмотрим величину

$$a = \sup\left\{\left|\int fg\right| : g \in z(X')_A, \|g\|_{X'} \le 1\right\}.$$

По лемме 6 из [2] существует такая функция $\varphi \in X$, что $\varphi - f \in X_A$ и $\|\varphi\|_X = a$, откуда $b = \operatorname{dist}_X(f, X_A) \le a$. Значит, зафиксировав произвольное число $\delta > 0$, можно найти функцию g из $z(X')_A$ такую, что $\|g\|_{X'} \le 1$ и $\left|\int fg\right| > b - \delta$.

Теперь сошлёмся на пункт (а) леммы 3 в [9], который говорит, что если набор $(Y_A^0, \dots, Y_A^n)$ K-замкнут в наборе решеток $(Y^0, \dots, Y^n)$ со свойством Фату, то K-замкнутость автоматически верна в следующей усиленной форме: если $h \in (Y^0 + \dots + Y^n)_A$ и $h = u_0 + \dots + u_n$, где $u_j \in Y_j$, то найдутся функции $v_j \in Y_A^j$ такие, что $h = v_0 + \dots + v_n$ и $\|v_j\| \le c\|u_j\|$. (В [9] утверждение формулировалось для пары решёток, но в общем случае доказательство почти не отличается.) Таким образом, построенную выше функцию g можно представить в виде $g = g_0 + \dots + g_n$, где $g_j \in z(X_j)'_A$ и $\|g_j\|_{(X^j)'} c_j \le C$. Поэтому

$$\begin{aligned} b - \delta < \left|\int gf\right| &\le \sum \inf_{y_j \in X_A^j} \left|\int g_j(f - y_j)\right| \\ &\le C \sum \frac{\operatorname{dist}_{X^j}(f, X_A^j)}{c_j} \le (n+1)C. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает требуемая оценка величины b.

Проверим теперь, что (i)$\Rightarrow$(ii). Пусть B_j – шар радиуса a_j с центром в нуле пространства $(X^j)'$ и пусть $h \in \sum_j (X^j)'_A$ и $h \in \sum B_j$. Нам надо доказать, что h лежит в сумме шаров U_j пространств $(X^j)'_A$ с центром в нуле и радиусами Ca_j, где C не зависит от f и чисел a_j. Рассуждаем от противного: если $h \notin U_0 + \dots + U_n$, то в силу тех же соображений, которые использовались при доказательстве леммы 7 в [2], найдется такая функция $x \in \left(\sum (X_j)'\right)' = \cap X_j$, что $\left|\int xh\right| > 1$ и

$$\sup\left\{\left|\int x(g_0 + \dots + g_n)\right| : g_j \in U_j\right\} < 1.$$

Из последнего неравенства следует, что $\operatorname{dist}_{X^j}(x, zX_A^j) \le (Ca_j)^{-1}$ (здесь снова нужно прибегнуть к лемме 6 из [2], как это делалось на первом этапе доказательства).

Воспользовавшись J-замкнутостью, мы найдем элемент $y \in \cap X_A^j$ такой, что $\|x-y\|_{X^j} \le C' \mathrm{dist}_{X^j}(x, X_A^j)$ для всех $j = 0, \dots, n$. Стало быть, представив h в виде $h = \sum h_j$, где $h_j \in B_j$, можем написать

$$\left|\int xh\right| = \left|\int (x-y)h\right| \le \sum \left|\int (x-y)h_j\right| \le C' \sum \mathrm{dist}_{X^j}(x, X_A^j) a_j \le C'C^{-1}.$$

Выбирая C достаточно большим, мы приходим к противоречию. $\square$

Заметим, что, в отличие от разделов 1 и 2, двойственность (лемма 4) не требует условия BMO-регулярности. Если, тем не менее, все решётки X^j BMO-регулярны, то получается ещё одно доказательство J-замкнутости набора $\{X_A^j\}$ в наборе $\{X^j\}$ (не охватывающее, правда, случая квазибанаховых решёток): имеется довольно трудный результат (см. [2]), гласящий, что тогда и решётки $(X^j)'$ BMO-регулярны, а в таком случае K-замкнутость набора $\{(X^j)'_A\}$ отмечалась в [7]. В свете простых процедур из разделов 1 и 2, такое доказательство, разумеется, выглядит искусственным, однако лемма 4 интересна и сама по себе.

Наконец, отметим, что все результаты и доказательства распространяются на случай пространств функций, лежащих в классе Смирнова по первой переменной в решётках измеримых функций на $(\mathbb{T} \times S, m \times \mu)$, где (S, μ) – пространство с σ-конечной мерой.

Автор признателен своему научному руководителю С. В. Кислякову за ценные замечания и указания.

Литература

1. N. J. Kalton, *Complex interpolation of Hardy-type subspaces.* — Math. Nachr. **171** (1995), 227–258.
2. С. В. Кисляков, *О BMO-регулярных решетках измеримых функций.* — Алгебра и анализ **14**, No. 2 (2002), 117–135.
3. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций.* ГИТТЛ, Москва–Ленинград, 1950.
4. S. V. Kislyakov, Q. Xu, *Interpolation of weighted and vector valued Hardy spaces.* — Trans. Amer. Math. Soc. **343**, No. 1 (1994), 1–34.
5. J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
6. S. V. Kislyakov, *Interpolation of Hardy spaces: some recent developments.* — Israel Math. Conf. Proceedings **13** (1999), 102–140.

7. S. V. Kislyakov, Q. Xu, *Partial retractions for weighted Hardy spaces.* — Studia Math. **138** (2000), 251–264.
8. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ.* Наука, М., 1977.
9. S. V. Kislyakov, *On BMO-regular couples of lattices of measurable functions.* — Studia Math. **159** (2003), 277–290.

Ivanishvili P. J-closed finite collections of Hardy-type subspaces.

Several proofs of the following statement are given: if $X^0, \dots, X^n$ are BMO-regular lattices on the circle and $x \in X^0 \cap \dots \cap X^n$, then the distances from x to the Hardy-type subspaces X^j_A are roughly attained at one and the same element of $\cap_j X^j_A$.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ivanishvili.Paata@gmail.com

Поступило 29 июня 2012 г.