Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 401, 2012 г.

М. Ф. Гамаль

ОБ УПРАВЛЯЮЩИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ МИНИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

§1. Введение

В статье даются достаточные условия на оператор, при которых его характеристика "disc" равна бесконечности. Приводятся два вида примеров циклических операторов (то есть операторов с кратностью спектра 1), для которых характеристика "disc" равна бесконечности. Один вид примеров – это некоторые сжатия, сопряженные с операторами, действующими на своем полном аналитическом инвариантном подпространстве. Другой вид примеров – это некоторый класс нормальных операторов. Также дается ответ на вопрос из [1] о характеристике "disc" прямой суммы операторов.

Характеристика "disc" была введена в [1] и изучалась в [1–3]. Понятие "disc" связано с проблемой управляемости, а сокращение "disc" означает "Dimension of the Input Subspace of Control" (более подробно см. [1–3]). Прежде чем дать точное определение, введем некоторые обозначения.

Пусть T – (линейный ограниченный) оператор в (сепарабельном) гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Подпространство (замкнутое линейное подмножество) $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$ называется *инвариатным подпространством* оператора T, если $T\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$; множество всех инвариантных подпространств оператора T обозначается через $\operatorname{Lat} T$. Подпространство $E \subset \mathcal{H}$ называется *воспроизводящим подпространством* оператора T, если наименьшее инвариатное подпространство оператора T, содержащее E, – это пространство $\mathcal{H}$. Обозначим через $\mathcal{R}(T)$ совокупность всех конечномерных воспроизводящих подпространств оператора T. Тогда хорошо известное определение *кратности спектра* оператора T может быть записано в виде

$$\mu_T = \mu(T) = \min\{\dim E : E \in \mathcal{R}(T)\}.$$

Ключевые слова: нормальный оператор, инвариантные подпространства.
Работа частично поддержана грантом РФФИ No. 11-01-00584-а.

(Заметим, что если $\mathcal{R}(T) = \varnothing$, то множество значений функции $E \mapsto \dim E$, определенной на $\mathcal{R}(T)$, – это пустое множество, а $\min \varnothing = \infty$.) Характеристика "disc" определяется в [1] формулой

$$\operatorname{disc} T = \sup_{E \in \mathcal{R}(T)} \min\{\dim E' : E' \subset E,\ E' \in \mathcal{R}(T)\}.$$

Легко видеть, что если $\mathcal{R}(T) \neq \varnothing$, то $\operatorname{disc} T \geq \mu_T$. Если $\mathcal{R}(T) = \varnothing$, то полагают $\operatorname{disc} T = \infty$, чтобы сохранить указанное выше соотношение между $\operatorname{disc} T$ и μ_T.

Следующие простые свойства характеристики "disc" доказаны в [1] (см. также [2]) и будут использованы в дальнейшем.

1. Если T и R – два оператора, действующие в одном пространстве, и $\operatorname{Lat} T = \operatorname{Lat} R$, то $\operatorname{disc} T = \operatorname{disc} R$.

2. Если T и R подобны, то есть существует обратимый оператор X, действующий между пространствами, на которых заданы операторы T и R и такой, что $XT = RX$, то $\operatorname{disc} T = \operatorname{disc} R$.

3. Если пространство $\mathcal{E} \in \operatorname{Lat} T$ таково, что $\mu(T|_{\mathcal{E}}) < \infty$, то $\operatorname{disc} T \geq \operatorname{disc} P_{\mathcal{E}^\perp} T|_{\mathcal{E}^\perp}$ (символом P с нижним индексом обозначается ортогональный проектор на подпространство, указанное в нижнем индексе).

4. $\operatorname{disc}(T_1 \oplus T_2) \geq \max(\operatorname{disc} T_1, \operatorname{disc} T_2)$.

Статья организована следующим образом. В следующем параграфе доказаны основная теорема и предложение о сжатиях, сопряженных с операторами, действующими на своем полном аналитическом инвариантном подпространстве. В последнем параграфе показано, что характеристика "disc" равна бесконечности для некоторых циклических нормальных операторов.

§2. Основная теорема

Следующая теорема является основным результатом статьи, однако она является следствием результатов из [2].

Теорема 1. *Пусть оператор T в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ обладает следующими свойствами:*

(i) *$T\mathcal{H} = \mathcal{H}$;*

(ii) *$\dim \ker T < \infty$;*

(iii) *если пространство $\mathcal{G} \in \operatorname{Lat} T$ таково, что $T\mathcal{G} = \mathcal{G}$ и $\ker T \subset \mathcal{G}$, то $\mathcal{G}$ является дополняемым инвариантным подпространством* *оператора T, то есть существует пространство $\mathcal{G}' \in \operatorname{Lat} T$, такое что $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' = \{0\}$ и $\mathcal{H} = \mathcal{G} + \mathcal{G}'$, обозначение: $\mathcal{H} = \mathcal{G} \dotplus \mathcal{G}'$;*

(iv) *существуют число n, $1 \le n < \infty$, и пространства $\mathcal{N}$, $\mathcal{M} \in \operatorname{Lat} T$, такие что $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, $T\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ и $\dim \mathcal{M} \ominus \mathcal{N} = n$.*

Тогда $\operatorname{disc} T \ge n$.

Доказательство. Следуя теореме 2.9 из [4], положим

$$\mathcal{E} = \bigvee_{k \ge 0} T^k(\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}).$$

Ясно, что $\mu(T|_{\mathcal{E}}) \le n$ и $\mathcal{E} = T\mathcal{E} \oplus (\mathcal{M} \ominus \mathcal{N})$. Из последнего равенства заключаем, что

$$\operatorname{ind} T|_{\mathcal{E}} \le \dim \ker T - n \tag{1}$$

(где “ind” обозначает индекс фредгольмова оператора).

Положим

$$\mathcal{G} = \operatorname{clos} \bigcup_{k \ge 0} T^{-k}\mathcal{E}$$

(где $T^{-k}\mathcal{E} = \{x \in \mathcal{H} : \ T^k x \in \mathcal{E}\}$). Ясно, что $\mathcal{G}$ удовлетворяет условию (iii) теоремы, поэтому существует пространство $\mathcal{G}' \in \operatorname{Lat} T$, дополняющее $\mathcal{G}$: $\mathcal{H} = \mathcal{G} \dotplus \mathcal{G}'$. Так как оператор T подобен прямой сумме $T|_{\mathcal{G}} \oplus T|_{\mathcal{G}'}$, из свойств 2 и 4 характеристики “disc” (см. введение) заключаем, что $\operatorname{disc} T \ge \operatorname{disc} T|_{\mathcal{G}}$.

Положим $\mathcal{L} = \mathcal{G} \ominus \mathcal{E}$. Так как $\mu(T|_{\mathcal{E}}) < \infty$, из свойства 3 характеристики “disc” (см. введение) заключаем, что $\operatorname{disc} T|_{\mathcal{G}} \ge \operatorname{disc} P_{\mathcal{L}} T|_{\mathcal{L}}$.

Ясно, что $T|_{\mathcal{G}}$ – фредгольмов оператор и, так как $\mathcal{G}$ удовлетворяет условию (iii) теоремы, то

$$\operatorname{ind} T|_{\mathcal{G}} = \dim \ker T. \tag{2}$$

Из равенства

$$\operatorname{ind} T|_{\mathcal{G}} = \operatorname{ind} T\Big|_{\mathcal{E}} + \operatorname{ind} P_{\mathcal{L}} T|_{\mathcal{L}}$$

и формул (1) и (2) заключаем, что

$$\operatorname{ind} P_{\mathcal{L}} T|_{\mathcal{L}} \ge n. \tag{3}$$

Из построения пространства $\mathcal{L}$ легко видеть, что $P_{\mathcal{L}} T|_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет условию теоремы 2 из [2], именно, $\mathcal{L} = \operatorname{clos} \bigcup_{k \ge 1} \ker P_{\mathcal{L}} T^k|_{\mathcal{L}}$. Теорема 2 и лемма 6.b из [2] показывают, что

$$\operatorname{disc} P_{\mathcal{L}} T|_{\mathcal{L}} \ge \operatorname{ind} P_{\mathcal{L}} T|_{\mathcal{L}}.$$

Теперь заключение теоремы следует из (3). □

Следствие. *Пусть оператор T удовлетворяет условиям* (i)–(iii) *теоремы* 1, *и пусть существуют пространства $\mathcal{N}$, $\mathcal{M} \in \operatorname{Lat} T$, такие что $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, $T\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ и $\dim \mathcal{M} \ominus \mathcal{N} = \infty$. Тогда* $\operatorname{disc} T = \infty$.

Доказательство. Пусть число n, $1 \le n < \infty$, фиксировано, и пусть $\mathcal{K}$ – подпространство пространства $\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}$, такое что $\dim \mathcal{K} = n$. Как и в доказательстве теоремы 1, положим $\mathcal{E} = \bigvee_{k \ge 0} T^k \mathcal{K}$. Ясно, что $\mathcal{E} \ominus \mathcal{K}$ и $\mathcal{E}$ удовлетворяют условию (iv) теоремы 1. Поэтому $\operatorname{disc} T \ge n$. Так как n можно взять произвольно большим, заключаем, что $\operatorname{disc} T = \infty$. □

Следующая теорема непосредственно вытекает из следствия теоремы 1 и предложения 4.2 из [5]. Перед формулировкой теоремы напомним определения.

Оператор T называется сжатием, если $\|T\| \le 1$. Сжатие называется абсолютно непрерывным, если у него нет сингулярного унитарного слагаемого. Для абсолютно непрерывного сжатия T определено функциональное исчисление С.-Надя–Фояша (см. [6, III.2.1]), то есть для любой функции $h \in H^\infty$, где H^∞ – пространство всех ограниченных аналитических функций в открытом единичном круге $\mathbb{D}$, корректно определен оператор $h(T)$. Для любого абсолютно непрерывного сжатия T и любой функции $h \in H^\infty$ имеет место неравенство $\|h(T)\| \le \|h\|_\infty$. Абсолютно непрерывное сжатие T принадлежит классу $\mathbb{A}$, если $\|h(T)\| = \|h\|_\infty$ для любой функции $h \in H^\infty$ (см. [7] и ссылки там). Обозначим через $\sigma(T)$ спектр оператора T. Легко видеть (и хорошо известно), что если для абсолютно непрерывного сжатия T имеет место равенство $\sigma(T) = \operatorname{clos} \mathbb{D}$, то T принадлежит классу $\mathbb{A}$.

Сжатие T, действующее в пространстве $\mathcal{H}$, принадлежит классу $C_{0\cdot}$ (является $C_{0\cdot}$-сжатием), если $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0$ для любого $x \in \mathcal{H}$. T принадлежит классу $C_{\cdot 0}$, если T^* принадлежит классу $C_{0\cdot}$, и T принадлежит классу C_{00}, если T принадлежит классам $C_{0\cdot}$ и $C_{\cdot 0}$. Хорошо известно (и легко видеть), что сжатия из классов $C_{0\cdot}$ или $C_{\cdot 0}$ абсолютно непрерывны (см. [6]).

Теорема 2. *Пусть T – C_{00}-сжатие из класса $\mathbb{A}$, и пусть T удовлетворяет условиям* (i)–(iii) *теоремы* 1. *Тогда* $\operatorname{disc} T = \infty$.

Доказательство. По теореме 1.2 из [8] и теореме 2.3 из [4] T удовлетворяет условиям предложения 4.2 из [5]. Поэтому существуют пространства $\mathcal{N}$, $\mathcal{M} \in \operatorname{Lat} T$, такие что $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, $T\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ и $\dim \mathcal{M} \ominus$

$\mathcal{N} = \infty$. Таким образом, T удовлетворяет условиям следствия теоремы 1. $\square$

Перед формулировкой следующего предложения напомним определение из [7].

Пусть T – оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и пусть $\mathcal{M}$ – его инвариантное подпространство. Пусть существуют элементы h_z пространства $\mathcal{M}$, такие что $(T|_{\mathcal{M}})^* h_z = \overline{z} h_z$ для любого $z \in \mathbb{D}$ и отображение $z \mapsto h_{\overline{z}}$, $\mathbb{D} \to \mathcal{M}$, – ненулевое и аналитическое. Тогда $\mathcal{M}$ называется *аналитическим инвариантным подпространством* для T. Если ещё и $\bigvee_{z\in\mathbb{D}} h_z = \mathcal{M}$, то $\mathcal{M}$ называется *полным аналитическим инвариантным подпространством* для T. Легко видеть, что если T – сжатие, а $\mathcal{M}$ – его полное аналитическое инвариантное подпространство, то $T|_{\mathcal{M}}$ принадлежит классу $C_{\cdot 0}$.

Следующая лемма является простым следствием результатов из [7] и [2].

Лемма 1. *Пусть T – сжатие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, такое что $\mathcal{H}$ – полное аналитическое инвариантное подпространство для T^*. Тогда $\mu_T = 1$.*

Доказательство. По [7, §4] $\ker T^* = \{0\}$ и существует последовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}$, такая что $Ty_n = y_{n-1}$ для $n \geq 1$, $Ty_0 = 0$ и $\bigvee_{n=0}^{\infty} y_n = \mathcal{H}$. Поэтому $\mathcal{H} = \operatorname{clos} \cup_{n\geq 1} \ker T^n$. По лемме 7 из [2] $\mu_T = \max(1, \dim \ker T^*) = 1$. $\square$

Предложение. *Пусть T – C_{00}-сжатие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, такое что $\mathcal{H}$ – полное аналитическое инвариантное подпространство для T^*. Пусть T удовлетворяет условиям* (i) *и* (ii) *теоремы* 1. *Тогда* $\operatorname{disc} T = \infty$.

Доказательство. Покажем, что T удовлетворяет условиям теоремы 2. Оператор T принадлежит классу $\mathbb{A}$, потому что, по определению полного аналитического инвариантного подпространства, $\sigma(T) = \operatorname{clos} \mathbb{D}$.

Пусть пространство $\mathcal{G} \in \operatorname{Lat} T$ таково, что $T\mathcal{G} = \mathcal{G}$ и $\ker T \subset \mathcal{G}$. Предположим, что $\mathcal{G}^\perp \neq \{0\}$. Ясно, что $\mathcal{G}^\perp \in \operatorname{Lat} T^*$ и $\mathcal{G}^\perp$ – полное аналитическое инвариантное подпространство для T^*. Поэтому $\sigma(T^*|_{\mathcal{G}^\perp}) = \operatorname{clos} \mathbb{D}$ и

$$\ker(T^* - z)|_{\mathcal{G}^\perp} = \{0\} \quad \text{для любого} \quad z \in \mathbb{D} \tag{4}$$

(см. [7, §4]). С другой стороны, $\operatorname{ind} T|_{\mathcal{G}} = \dim\ker T = \operatorname{ind} T$, поэтому $\operatorname{ind} T^*|_{\mathcal{G}^\perp} = -\operatorname{ind} P_{\mathcal{G}^\perp} T|_{\mathcal{G}^\perp} = 0$. Следовательно, существует окрестность нуля D, такая что

$$\operatorname{ind}(T^* - z)|_{\mathcal{G}^\perp} = 0 \quad \text{для любого} \quad z \in D. \tag{5}$$

Из (4) и (5) заключаем, что $\sigma(T^*|_{\mathcal{G}^\perp})$ не содержит D – противоречие. Таким образом, $\mathcal{G}^\perp = \{0\}$. Мы доказали, что T удовлетворяет условию (iii) теоремы 1. □

§3. Нормальные операторы

В этом параграфе будет показано, что для некоторого класса циклических нормальных операторов характеристика “disc” равна бесконечности. Напомним, что каждый циклический нормальный оператор может быть представлен как оператор умножения на независимую переменную в пространстве $L^2(\nu)$, где ν – положительная конечная борелевская мера на компактном подмножестве в $\mathbb{C}$. Также имеет место обратное утверждение: если ν – положительная конечная борелевская мера на компактном подмножестве в $\mathbb{C}$ и T – оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\nu)$, то $\mu(T) = 1$ (см., например, [9, теорема V.14.21]). Мера ν и спектральная мера оператора T взаимно абсолютно непрерывны. В [1] доказано, что для циклических нормальных операторов характеристика “disc” равна 1 если и только если оператор редуктивен. В терминах спектральной меры нормального оператора редуктивные операторы описываются следующим образом (см. [9, гл. VI, §7 и VII.1.3]). Пусть T – нормальный оператор, а ν – положительная конечная борелевская мера на компактном подмножестве в $\mathbb{C}$, такая что ν и спектральная мера оператора T взаимно абсолютно непрерывны. Тогда T редуктивен если и только если

$$\text{не существует ограниченной односвязной области } D,$$

$$\text{такой что} \quad \operatorname{ess\,sup}_{\nu_D} |f| = \|f\|_\infty \quad \text{для любой функции} \quad f \in H^\infty(D), \tag{6}$$

где $H^\infty(D)$ – пространство ограниченных аналитических функций в D, а ν_D – это часть меры ν, состоящая из сужения меры ν на D и части сужения меры ν на границу области D, абсолютно непрерывной относительно гармонической меры области D.

Здесь мы покажем, что если D – ограниченная односвязная область, ν – положительная конечная борелевская мера на D, такая что

$\operatorname{ess\,sup}_\nu |f| = \|f\|_\infty$ для любой функции $f \in H^\infty(D)$, и T – оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\nu)$, то при некоторых условиях на D, в частности, если D – жорданова область, $\operatorname{disc} T = \infty$. В качестве следствия получается, что $\operatorname{disc} T = \infty$ для нормального оператора T, если существует отвечающая только что приведенному описанию мера ν, абсолютно непрерывная относительно спектральной меры оператора T.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $K \subset \mathbb{C}$ – компактное множество с пустой внутренностью и $\mathbb{C}\setminus K = D_0 \cup D_\infty$, где D_0 и D_∞ – области, $D_0 \cap D_\infty = \varnothing$, область D_∞ неограничена и $0 \in D_0$. Пусть ν – положительная конечная борелевская мера на K, и пусть T – оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\nu)$. Наконец, пусть пространство $\mathcal{G} \in \operatorname{Lat} T$ таково, что $T\mathcal{G} = \mathcal{G}$. Тогда $T^*\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$ (и, следовательно, $T^*\mathcal{G} = \mathcal{G}$).*

Доказательство. Так как $0 \notin K$, то оператор T обратим. Так как $T\mathcal{G} = \mathcal{G}$, то $\mathcal{G} \in \operatorname{Lat} T^{-1}$. Поэтому $r(T)\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$ для любой рациональной функции r с полюсом в точке 0. Из [10, III.1.C, III.3.C$_2$] (см. также [9, V.19.3]) получаем, что для любой непрерывной на K функции f и для любого $\varepsilon > 0$ существует рациональная функция r с полюсом в точке 0, такая что $|f(z) - r(z)| < \varepsilon$ для любого $z \in K$ (здесь использовалось, что $\operatorname{int} K = \varnothing$ и $\mathbb{C} \setminus K$ состоит из двух компонент D_0 и D_∞, одна из которых содержит 0). Поэтому $f(T)\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$ любой функции f, непрерывной на K. В частности, $f(T)\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$ для $f(z) = \overline{z}$, $z \in K$. Это означает, что $T^*\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$. (Так как $T^*\mathcal{G}^\perp \subset \mathcal{G}^\perp$ и оператор T^* обратим, заключаем, что $T^*\mathcal{G} = \mathcal{G}$.) □

Следствие. *Пусть T – оператор из леммы* 2. *Тогда T удовлетворяет условиям* (i)–(iii) *теоремы* 1.

Доказательство. Так как T обратим, то T удовлетворяет условиям (i) и (ii) теоремы 1. Пусть пространство $\mathcal{G} \in \operatorname{Lat} T$ таково, что $T\mathcal{G} = \mathcal{G}$. По лемме 2 $T^*\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$. Поэтому $T\mathcal{G}^\perp \subset \mathcal{G}^\perp$. Таким образом, $\mathcal{G}$ – дополняемое инвариантное подпространство оператора T с дополняющим подпространством $\mathcal{G}^\perp$. □

Следующая теорема является основным результатом этого параграфа.

Теорема 3. *Пусть ν – положительная конечная борелевская мера на $\mathbb{D}$, такая что* $\operatorname{ess\,sup}_\nu |f| = \|f\|_\infty$ *для любой функции* $f \in H^\infty$. *Пусть* T *– оператор умножения на независимую переменную в* $L^2(\nu)$. *Тогда* $\operatorname{disc} T = \infty$.

Доказательство. По лемме 3.5 из [1] существует множество $M \subset \mathbb{D}$, такое что $\operatorname{int} M = \varnothing$, $\mathbb{D} \setminus M$ открыто и связно и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\nu|_M} |f| = \|f\|_\infty \quad \text{для любой функции} \quad f \in H^\infty. \tag{7}$$

Ясно, что M может быть выбрано так, чтобы $0 \notin M$. Положим $K = \operatorname{clos} M$. Из условий на M заключаем, что $K = \mathbb{T} \cup M$. Из этого равенства ясно, что K удовлетворяет условиям леммы 2. Поэтому $T|_{L^2(\nu|_M)}$ удовлетворяет условиям (i)–(iii) теоремы 1.

Ясно, что $T|_{L^2(\nu|_M)}$ – сжатие, и, так как M содержится в *открытом* единичном круге $\mathbb{D}$, то $T|_{L^2(\nu|_M)}$ принадлежит классу C_{00}. Пусть $f \in H^\infty$. Ясно, что $f(T|_{L^2(\nu|_M)})$ действует как оператор умножения на f в $L^2(\nu|_M)$. Так как $\|f(T|_{L^2(\nu|_M)})\| = \operatorname{ess\,sup}_{\nu|_M} |f|$, из (7) заключаем, что $T|_{L^2(\nu|_M)}$ принадлежит классу $\mathbb{A}$. Таким образом, $T|_{L^2(\nu|_M)}$ удовлетворяет условиям теоремы 2, следовательно, $\operatorname{disc} T|_{L^2(\nu|_M)} = \infty$.

Наконец, $L^2(\nu|_M)$ – дополняемое инвариантное подпространство оператора T, поэтому $\operatorname{disc} T \geq \operatorname{disc} T|_{L^2(\nu|_M)} = \infty$ (см. свойство 4 характеристики “disc” во введении). □

Прежде чем формулировать следствия теоремы 3, напомним определение. Функция $\varphi \in H^\infty$ называется $*$-слабым генератором алгебры H^∞, если наименьшая алгебра, содержащая φ и единицу и замкнутая в $*$-слабой топологии пространства H^∞ – это сама алгебра H^∞. Описание $*$-слабых генераторов алгебры H^∞ дано в [11] (см. также [9]). Одно из (эквивалентных) описаний таково: функция φ является $*$-слабым генератором алгебры H^∞, если и только если φ является конформным отображением круга $\mathbb{D}$ на ограниченную односвязную область D, для которой не существует области D', такой что $D \subset D'$, $D \neq D'$ и $\sup_{D'} |f| = \sup_D |f|$ для любой функции $f \in H^\infty(D')$.

Следствие 1. *Пусть D – ограниченная односвязная область, $\varphi : \mathbb{D} \to D$ – конформное отображение и ν – положительная конечная борелевская мера на D, такая что* $\operatorname{ess\,sup}_\nu |f| = \|f\|_\infty$ *для любой функции $f \in H^\infty(D)$. Пусть T – оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\nu)$. Если φ – $*$-слабый генератор алгебры H^∞, то* $\operatorname{disc} T = \infty$.

Доказательство. Определим положительную конечную борелевскую меру λ на $\mathbb{D}$ по формуле $\lambda(\tau) = \nu(\varphi(\tau))$, где τ – борелевское подмножество круга $\mathbb{D}$. Пусть R – оператор умножения на независимую переменную в пространстве $L^2(\lambda)$. Ясно, что λ удовлетворяет условиям теоремы 3 и оператор T унитарно эквивалентен оператору $\varphi(R)$ (который является оператором умножения на φ в $L^2(\lambda)$). Ясно, что $\operatorname{Lat} R \subset \operatorname{Lat} \varphi(R)$. Пусть φ – $*$-слабый генератор алгебры H^∞. Тогда из результатов работы [11] следует, что $\operatorname{Lat} R = \operatorname{Lat} \varphi(R)$. Для более подробного объяснения напомним построение из [11].

Положим $M^0 = \{p(\varphi),\ p$ – многочлен$\}$, и для каждого счетного ординала α положим $M^\alpha = \{f \in H^\infty :$ существует последовательность $\{f_n\}_n \subset \bigcup_{\beta<\alpha} M^\beta$, сходящаяся к f в $*$-слабой топологии пространства $H^\infty\}$. Так как φ – $*$-слабый генератор алгебры H^∞, то существует счетный ординал γ, для которого $M^\gamma = H^\infty$. Используя трансфинитную индукцию, легко видеть, что

$$\operatorname{Lat} \varphi(R) \subset \operatorname{Lat} f(R) \quad \text{для любой функции} \quad f \in M^\gamma. \tag{8}$$

В самом деле, база индукции ($\alpha = 0$) очевидна. Предположим, что $\operatorname{Lat} \varphi(R) \subset \operatorname{Lat} f(R)$ для любой функции $f \in \bigcup_{\beta<\alpha} M^\beta$. Пусть $f \in M^\alpha$. Тогда существует последовательность $\{f_n\}_n \subset \bigcup_{\beta<\alpha} M^\beta$, сходящаяся к f в $*$-слабой топологии пространства H^∞. По лемме 1 из [11] $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ и $f_n(z) \to f(z)$ для любого $z \in \mathbb{D}$. Из этих соотношений заключаем, что $\operatorname{Lat} f_n(R) \subset \operatorname{Lat} f(R)$. Из индукционного предположения получаем, что $\operatorname{Lat} \varphi(R) \subset \operatorname{Lat} f(R)$. Включение (8) доказано.

Полагая $f(z) = z$ при $z \in \mathbb{D}$, получаем, что $\operatorname{Lat} \varphi(R) \subset \operatorname{Lat} R$. Таким образом, $\operatorname{Lat} R = \operatorname{Lat} \varphi(R)$.

По теореме 3 $\operatorname{disc} R = \infty$. Из свойств 1 и 2 характеристики “disc” (см. введение) вытекает, что $\operatorname{disc} T = \operatorname{disc} \varphi(R) = \operatorname{disc} R = \infty$. □

Следствие 2. *Пусть D, φ и ν такие же, как в следствии* 1. *Пусть T – нормальный оператор, такой что мера ν абсолютно непрерывна относительно спектральной меры оператора T. Если φ – $*$-слабый генератор алгебры H^∞, то* $\operatorname{disc} T = \infty$.

Доказательство. Из спектральной теоремы для нормального оператора и условий на ν и спектральную меру оператора T легко заключить, что у T есть приводящее подпространство $\mathcal{M}$, такое что оператор $T|_{\mathcal{M}}$ унитарно эквивалентен оператору умножения на независимую переменную в $L^2(\nu)$. По следствию 1 $\operatorname{disc} T|_{\mathcal{M}} = \infty$. Так как $T = T|_{\mathcal{M}} \oplus T|_{\mathcal{M}^\perp}$, утверждение следует из свойства 4 характеристики "disc" (см. введение). □

Замечание. В работе [1] был поставлен следующий вопрос: пусть оператор T представим в виде $T = T_1 \oplus T_2$, верно ли, что $\operatorname{disc} T \leq \operatorname{disc} T_1 + \operatorname{disc} T_2$? Было высказано предположение, что ответ отрицательный, и что контрпример можно найти среди нормальных операторов. Используя теорему 3, легко найти такой контрпример. Именно, пусть мера ν удовлетворяет условиям теоремы 3, и пусть $\nu = \nu_1 + \nu_2$, где ν_1 и ν_2 – взаимно сингулярные меры, удовлетворяющие условию (6). (Например, пусть $\Lambda \subset \mathbb{D}$ – определяющее множество для $\mathbb{D}$, не имеющее предельных точек в $\mathbb{D}$. Пусть Λ_1 и Λ_2 – пересечения множества Λ с верхней и нижней половиной круга $\mathbb{D}$, соответственно. Пусть ν – мера на Λ, такая что $\nu(\{z\}) \neq 0$ для любого $z \in \Lambda$. Положим $\nu_k = \nu|_{\Lambda_k}$, $k = 1, 2$. Тогда ν удовлетворяет условиям теоремы 3, а ν_1 и ν_2 удовлетворяют условию (6).) Пусть T – оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\nu)$, и пусть $T_k = T|_{L^2(\nu_k)}$, $k = 1, 2$. Тогда $T = T_1 \oplus T_2$, $\operatorname{disc} T = \infty$ по теореме 3, а $\operatorname{disc} T_k = 1$ по условию (6), $k = 1, 2$.

Литература

1. В. И. Васюнин, Н. К. Никольский, *Управляющие пространства минимальной размерности. Элементарное введение. Discotheca.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **113** (1981), 41–75.
2. N. K. Nikol'skii, V. I. Vasjunin, *Control subspaces of minimal dimension and root vectors.* — Integral Equations Operator Theory **6** (1983), 274–311.
3. N. K. Nikolskii, V. I. Vasjunin, *Control subspaces of minimal dimension, unitary and model operators.* — J. Operator Theory **10** (1983), 307–330.
4. C. Apostol, H. Bercovici, C. Foias, C. Pearcy, *Invariant subspaces, dilation theory, and the structure of the predual of a dual algebra. I.* — J. Funct. Anal. **63** (1985), 369–404.
5. H. Bercovici, C. Foiaş, C. Pearcy, *Dilation theory and systems of simultaneous equations in the predual of an operator algebra. I.* — Michigan Math. J. **30** (1983), 335–354.
6. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве,* Мир, М., 1970.
7. B. Chevreau, G. Exner, C. Pearcy, *On the structure of contraction operators, III.* — Michigan Math. J. **36** (1989), 29–62.
8. H. Bercovici, *Factorization theorems and the structure of operators on Hilbert space.* — Ann. Math. **128** (1988), 399–413.

9. J. B. Conway, *Subnormal operators*, Pitnam (Advanced Publishing Program), 1981.
10. Д. Гайер, *Лекции по теории аппроксимации в комплексной области.* Мир, М., 1986.
11. D. Sarason, *Weak-star generators of H^∞.* — Pacific J. Math. **17** (1966), 519–528.

Gamal' M. F. On control subspaces of minimal dimension.

The quantity "disc" for a (bounded linear) operator was introduced by N. K. Nikol'skii and V. I. Vasjunin, namely,

$$\operatorname{disc} T = \sup_{E\in\mathcal{R}(T)} \min\{\dim E' : E' \subset E,\ E' \in \mathcal{R}(T)\},$$

where $\mathcal{R}(T)$ is the family of all finite dimensional reproducing subspaces for an operator T. We give sufficient conditions on operators T under which $\operatorname{disc} T = \infty$. In particular, we show that there exists an operator T with $\operatorname{disc} T = \infty$ and such that T can be represented in the form $T = T_1 \oplus T_2$ with $\operatorname{disc} T_1 = \operatorname{disc} T_2 = 1$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: gamal@pdmi.ras.ru

Поступило 8 июня 2012 г.